

А

Российская академия наук
Российская академия образования
Издательство «Просвещение»

Академический школьный учебник

АЛГЕБРА



8


ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО



Российская академия наук
Российская академия образования
Издательство «Просвещение»

Академический школьный учебник

АЛГЕБРА

8 класс

**Учебник
для общеобразовательных
учреждений**

Под редакцией Г. В. Дорофеева

*Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации*

5-е издание

Москва
«Просвещение»
2010

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Серия «Академический школьный учебник» основана в 2005 году

Проект «Российская академия наук, Российская академия образования, издательство «Просвещение» — российской школе»

Руководители проекта:

вице-президент РАН акад. *В. В. Козлов*, президент РАО акад. *Н. Д. Никандров*, генеральный директор издательства «Просвещение» чл.-корр. РАО А. М. *Кондаков*

Научные редакторы серии:

акад.-секретарь РАО, д-р пед. наук А. А. *Кузнецов*, акад. РАО, д-р пед. наук М. В. *Рыжаков*, д-р экон. наук С. В. *Сидоренко*

Авторы: Г. В. *Дорофеев*, С. Б. *Суворова*, Е. А. *Бунимович*,
Л. В. *Кузнецова*, С. С. *Минаева*

На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (№ 2-10106-5215/1449 от 25.10.06)
и Российской академии образования (№ 01-77/5/7д от 12.07.06)

Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений /
А45 [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.] ;
под ред. Г. В. Дорофеева ; Рос. акад. наук, Рос. акад. образо-
вания, изд-во «Просвещение». — 5-е изд. — М. : Просвеще-
ние, 2010. — 288 с. : ил. — (Академический школьный учеб-
ник). — ISBN 978-5-09-022759-9.

Учебник соответствует федеральным компонентам Государственно-
го стандарта общего образования. Учебно-методический комплект по
алгебре для 8 класса под редакцией Г. В. Дорофеева включает учеб-
ник, рабочую тетрадь, тематические тесты, дидактические материалы,
книгу для учителя и контрольные работы для 7—9 классов. В оформ-
лении заставок учебника использованы мотивы рисунков М. Эшера.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-022759-9

© Издательство «Просвещение», 2005
© Издательство «Просвещение», 2009,
с изменениями
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2009
Все права защищены



1.1

Что такое алгебраическая дробь

Вспомните, что вам известно о выполнимости арифметических действий в множестве целых чисел: сумма, разность и произведение двух целых чисел также являются числами целыми. Однако для того чтобы всегда можно было найти частное двух целых чисел (кроме деления на нуль), уже нужны дроби.

В множестве рациональных чисел, объединяющем целые и дробные числа, частное двух целых чисел выражается дробью, числитель которой равен делимому, а знаменатель — делителю. Например,

$$12:7 = \frac{12}{7}, \quad 8:20 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}, \quad 3:(-10) = \frac{3}{-10} = -\frac{3}{10}.$$

В некоторых случаях — когда числитель делится на знаменатель — эта дробь может оказаться равной целому числу. Так,

$$20:4 = \frac{20}{4} = 5, \quad (-36):12 = \frac{-36}{12} = -3.$$

Похожим образом обстоит дело и с многочленами, которые вы рассматривали в курсе алгебры 7 класса. Вы научились складывать, вычитать и умножать многочлены и знаете, что сумму, разность и произведение двух многочленов всегда можно записать в виде многочлена. Поговорим теперь о делении многочленов.

Возьмем, например, многочлены $x^2 - 4$ и $x - 2$. По смыслу действия деления

$$(x^2 - 4):(x - 2) = x + 2,$$

так как $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$.

Таким образом, частное многочленов $x^2 - 4$ и $x - 2$ также является многочленом. Говорят, что *многочлен $x^2 - 4$ делится на многочлен $x - 2$* .

Не всегда, однако, один многочлен делится на другой. Например, многочлен $x^2 + 4$ не делится на $x - 2$, так как не существует такого многочлена, который в произведении с двучленом $x - 2$ был бы равен $x^2 + 4$.

Докажем это. Воспользуемся методом рассуждения от противного. Допустим, что существует многочлен A , такой, что выполняется равенство $A(x - 2) = x^2 + 4$. В это равенство вместо переменной можно подставлять любые числа, и при этом всегда должно получаться верное числовое равенство. Однако при $x = 2$ произведение в левой части обращается в нуль, а значение многочлена в правой части равно 8. Таким образом, мы пришли к противоречию, и наше предположение неверно.

Поэтому, чтобы существовало частное любых двух многочленов (кроме случая деления на *нулевой многочлен*, обращающийся в нуль при любых значениях входящих в него переменных), мы пойдем по уже проторенному пути, а именно: будем рассматривать дроби вида $\frac{P}{Q}$, где P и Q — любые многочлены, но $Q \neq 0$, т. е. не является

нулевым многочленом. Такие дроби мы будем называть *алгебраическими* (их называют также рациональными).

Приведем примеры алгебраических дробей:

$$\frac{ac - 2b}{ab + 3c}; \quad \frac{x^2 + 4}{x - 2}; \quad \frac{8}{15}.$$

Обратите внимание на последний пример: числовые дроби являются одновременно и алгебраическими. (Как мы говорили в 7 классе, числа — это тоже многочлены.)

Точно так же, как и для числовых дробей, мы будем считать алгебраическую дробь $\frac{P}{Q}$ *частным* от деления многочлена P на многочлен Q :

$$\frac{P}{Q} = P : Q.$$

Например,

$$\frac{ac - 2b}{ab + 3c} = (ac - 2b) : (ab + 3c), \quad \frac{x^2 + 4}{x - 2} = (x^2 + 4) : (x - 2).$$

При $Q = 1$ частное $\frac{P}{Q} = P : 1 = P$ есть многочлен, поэтому любой многочлен можно записать в виде дроби со знаменателем, равным 1:

$$3x^2y + 5xy^2 = \frac{3x^2y + 5xy^2}{1}.$$

Легко заметить аналогию — любое целое число можно записать в виде дроби со знаменателем 1.

Как и в любых алгебраических выражениях, переменные в алгебраической дроби можно заменять числами. Однако необходимо помнить:

в алгебраическую дробь нельзя подставлять числа, которые обращают ее знаменатель в нуль.

В таблице приведены несколько дробей и для каждой из них указано, какие числа не входят в *множество допустимых значений переменных*.

Дробь	$\frac{1}{6x}$	$\frac{2a}{5+a}$	$\frac{c+1}{2c-4}$	$\frac{10}{y^2-1}$	$\frac{3-2b}{1+b^2}$
Значения переменных, не являющиеся допустимыми	0	-5	2	1 и -1	Таких значений нет

Вы можете получить эти результаты самостоятельно, приравняв знаменатель каждой дроби к нулю и решив соответствующее уравнение.

A

- Перепишите данное выражение, заменив знак : чертой дроби:
 - $4a : (8bc)$; в) $5c + 3c : (2c + 4)$;
 - $(a + b) : (2a - 3c)$; г) $(2x + a) : 2x - a$.
- Используя определение частного, докажите, что:
 - $(9x^2 - 4y^2) : (3x + 2y) = 3x - 2y$;
 - $(4a^2 - 20a + 25) : (2a - 5) = 2a - 5$;
 - $\frac{3m^3 - 6m^2 - 3m}{m^2 - 2m - 1} = 3m$;
 - $\frac{4a^2 - 11a - 3}{a - 3} = 4a + 1$.
- Составьте какое-нибудь выражение, которое делится на каждое из данных выражений:
 - ab, bc ; г) $a + b, a - b$;
 - x^2y, xy^2, xy ; д) $(p + q)^2, 2(p + q)$;
 - a^2, b^2, c^2, abc ; е) $m^2 - n^2, 5(m - n)$.

4. Найдите значение дроби при указанных значениях переменных:
- $\frac{a+b}{a-b}$ при $a = -0,7$, $b = 1,7$;
 - $\frac{mn}{m-n}$ при $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$;
 - $\frac{3x+2y}{x-y}$ при $x = -0,4$, $y = 0,6$;
 - $\frac{a^2+b^2}{ab}$ при $a = -2$, $b = 5$.
5. Подберите значения a , при которых значение выражения $\frac{1}{a}$ является: а) дробным числом; б) целым числом; в) положительным дробным числом, меньшим 1; г) дробным числом, большим 1; д) отрицательным целым числом, меньшим -100 .
6. Известно, что $x + y = 1$ и $x - y = \frac{2}{3}$. Найдите значение выражения: а) $\frac{x+y}{x-y}$; б) $\frac{y-x}{x+y}$; в) $\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$; г) $\frac{(y-x)^2}{x+y}$.
7. Найдите допустимые значения переменной для дроби:
- $\frac{c}{c+2}$;
 - $\frac{n-1}{n}$;
 - $\frac{x-7}{2x+8}$;
 - $\frac{2a-3}{a^2}$;
 - $\frac{x-1}{x-2}$;
 - $\frac{y-4}{3y}$;
 - $\frac{a^2-1}{15}$;
 - $\frac{x^2}{x^2+3}$.
8. Используя данные выражения, составьте две дроби и найдите допустимые значения переменной для каждой из них: а) $p^2 + 1$ и $p + 1$; б) $(c+1)^2$ и $c^2 + 1$.
9. Для каждого выражения из верхнего ряда укажите множество допустимых значений переменной, выбрав их из нижнего ряда:
- $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$;
 - $\frac{(x-2)(x-3)}{x-1}$;
 - $\frac{x^2}{x^2+1}$;
 - $\frac{x^2+1}{x^2}$.
- а) $x \neq 0$; б) $x \neq 1$; в) $x \neq 2$; $x \neq 3$; г) x — любое число.
- Ответ. 1) _____; 2) _____; 3) _____; 4) _____
10. а) Из формулы скорости равноускоренного движения $v = v_0 + at$, где v_0 — начальная скорость, a — ускорение, t — время движения, выразите a и t .
 б) Из формулы пути равномерного движения $s = s_0 + vt$, где s_0 — начальное расстояние, v — скорость, t — время движения, выразите v и t .
11. Составьте выражение по условию задачи:
- а) Моторная лодка проплыла s км по течению реки. Какое время она на это затратила, если ее собственная скорость v км/ч, а скорость течения реки a км/ч?

- б) Какое время потребуется катеру, чтобы проплыть a км против течения реки и вернуться обратно, если его собственная скорость x км/ч, а скорость течения реки r км/ч?
- в) Пловец проплыл l м по течению реки за t мин. Чему равна собственная скорость пловца, если скорость течения реки a м/мин?

12. Упростите дробь и найдите ее значение при указанных значениях переменных:

а) $\frac{x^2 - xy + y^2 - (x - y)^2}{x + y}$ при $x = 0,3$ и $y = 0,5$;

б) $\frac{m - 4}{(m + n)^2 - (m - n)^2}$ при $m = \frac{2}{3}$ и $n = -\frac{3}{4}$;

в) $\frac{(a + b)^2 - 4ab}{a + b}$ при $a = 0,74$ и $b = -0,26$;

г) $\frac{cd}{2(c - d)(c + d) - (c - d)^2 + 4d^2}$ при $c = -1$ и $d = 11$.

13. Найдите допустимые значения переменной для дроби:

а) $\frac{(a + 1)(a + 3)}{2a(a - 4)}$; в) $\frac{2x - 3}{2x^2 + 10x}$; д) $\frac{b + 3}{b^2 - 6b + 9}$;

б) $\frac{4c}{(c - 5)(2c - 4)}$; г) $\frac{5a}{a^2 - 36}$; е) $\frac{2n - 5}{4n^2 + 4n + 1}$.

14. Укажите несколько пар значений переменных, при которых выражение не имеет смысла:

а) $\frac{x + y}{x - y}$; в) $\frac{ab}{(a - 2)(b - 3)}$;

б) $\frac{a - b}{ab}$; г) $\frac{2c}{ac - 12}$.

15. Подберите, если возможно, такие значения переменных, при которых дробь: 1) не имеет смысла; 2) равна 0:

а) $\frac{x + y}{x^2 + y^2}$; б) $\frac{x^2 + y^2}{x + y}$; в) $\frac{x + y}{x^2 - y^2}$.

16. Выясните, имеет ли смысл выражение $\frac{x - 1 + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}}$ при $x = 0$; $x = 1$;

$x = -1$; $x = \frac{1}{2}$. Если имеет, то найдите его значение.

17. Выразите из формулы:

а) $l' = l(1 + \alpha\tau)$ переменные l и τ ;

б) $Q = cm(t_2 - t_1)$ переменные m , t_2 и t_1 .

18. а) Площадь поверхности параллелепипеда можно найти по формуле $S = 2(ab + bc + ac)$ (рис. 1.1). Выразите из этой формулы высоту параллелепипеда c .

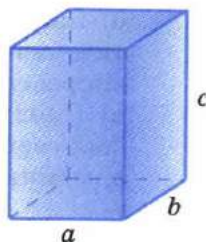


Рис. 1.1

- б) Площадь поверхности прямого кругового цилиндра (рис. 1.2) можно найти по формуле $S = 2\pi r(r + h)$. Выразите из этой формулы высоту цилиндра h .

19. (Задача-исследование.) 1) Сравните значения выражения $\frac{x^2 + y^2}{xy}$ при $x = -2$, $y = 5$ и при $x = 5$, $y = -2$. Изменится ли данное выражение, если

вместо переменной x подставить переменную y , а вместо переменной y — переменную x ? Проверьте свой ответ, выполнив такую замену.

2) Выражение с двумя переменными, например x и y , называют *симметрическим*, если оно не меняется при подстановке y вместо x и x вместо y . Какие из следующих выражений являются симметрическими: $x^3 + y^3$, $x^2 - y^2$, $x(x + y)$,

$$xy(x + y), \frac{x^2 + y^2}{y}, \frac{(x - y)^2}{xy}, (x + y)^2 - 2xy?$$

3) Придумайте примеры симметрических выражений.

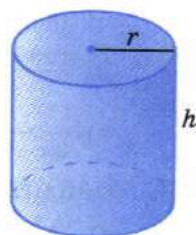


Рис. 1.2

1.2 Основное свойство дроби

Источником правил действий с алгебраическими дробями являются известные из арифметики правила действий с обыкновенными дробями. Это легко объяснимо: буквы в алгебре — обобщенные обозначения конкретных чисел, законы алгебры соответствуют законам арифметики. Поэтому действия с алгебраическими дробями, любые преобразования этих дробей проводятся по тем же правилам, что и с обыкновенными дробями.

Вам известно основное свойство обыкновенной дроби, согласно которому при умножении или делении числителя и знаменателя дроби на одно и то же отличное от нуля число получается дробь, равная данной. Например,

$$\frac{13}{17} = \frac{13 \cdot 4}{17 \cdot 4} = \frac{52}{68}, \quad \frac{75}{114} = \frac{25 \cdot 3}{38 \cdot 3} = \frac{25}{38}.$$

Аналогичным свойством обладают и алгебраические дроби:

Если числитель и знаменатель алгебраической дроби умножить или разделить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится дробь, равная данной.

Это основное свойство алгебраической дроби. С помощью букв его записывают так:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}, \text{ где } C \neq 0.$$

Как и в арифметике, основное свойство алгебраической дроби используется для преобразования дробей.

■ Пример 1. Приведем дробь $\frac{3}{x-y}$ к знаменателю $2(x^2 - y^2)$.

Так как $2(x^2 - y^2) = 2(x - y)(x + y)$, то новый знаменатель отличается от исходного множителем $2(x + y)$.

Значит, числитель и знаменатель дроби $\frac{3}{x-y}$ надо умножить на дополнительный множитель $2(x + y)$:

$$\frac{3}{x-y} = \frac{3 \cdot 2(x+y)}{(x-y) \cdot 2(x+y)} = \frac{6(x+y)}{2(x^2 - y^2)}.$$

■ Пример 2. Сократим дробь $\frac{ax^2 + bx}{ax^2}$.

Разложим числитель дроби на множители и выделим в числителе и знаменателе общий множитель:

$$\frac{ax^2 + bx}{ax^2} = \frac{x(ax + b)}{x \cdot ax} = \frac{ax + b}{ax}.$$

Дальнейшее сокращение дроби невозможно.

Из основного свойства алгебраической дроби можно получить важное следствие, которое удобно использовать при преобразовании дробей:

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}.$$

Понятно, что вторая дробь получается из первой умножением числителя и знаменателя на (-1) . Итак,

Если и числитель, и знаменатель дроби заменить на противоположные выражения, то получится дробь, равная данной.

Дробь $\frac{-A}{-B}$ можно переписать, поставив один из минусов перед дробью. Поэтому $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{A}{-B} = -\frac{-A}{B}$.

Если числитель или знаменатель дроби заменить на противоположное выражение и при этом поменять знак перед дробью, то получится дробь, равная данной.

Этими равенствами часто пользуются из соображений эстетики: лучше воспринимаются дроби, у которых числитель и знаменатель не начинаются со знака «минус».

■ Пример 3. Преобразуем дробь $\frac{-x-y}{-2x+y}$, заменив двучлены в числителе и знаменателе на противоположные:

$$\frac{-x-y}{-2x+y} = \frac{x+y}{2x-y}.$$

■ Пример 4. Сократим дробь $\frac{a^2-b^2}{4b-4a}$.

Разложим на множители числитель и знаменатель дроби:

$$\frac{a^2-b^2}{4b-4a} = \frac{(a-b)(a+b)}{4(b-a)}.$$

Множители $a-b$ и $b-a$ «почти одинаковы» — они различаются только знаками. Чтобы дробь можно было сократить, заменим, например, выражение $b-a$ в знаменателе на $a-b$ и при этом поставим знак «минус» перед дробью:

$$\frac{(a-b)(a+b)}{4(b-a)} = -\frac{(a-b)(a+b)}{4(a-b)} = -\frac{(a+b)}{4}.$$

А

20. Дополните равенства:

а) $\frac{5}{a} = \frac{\quad}{2a} = \frac{5c}{a^2} = \frac{5(a+b)}{\quad}$;

б) $\frac{x-y}{x+y} = \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} = \frac{\quad}{ax+ay} = \frac{x^2-xy}{\quad}$.

21. Приведите дроби:

а) $\frac{a}{c}$ к знаменателю $2c$; ac ; $-c$; c^2 ; $3c^2$;

б) $\frac{x+y}{xy}$ к знаменателю x^2y^2 ; xy^2 ; x^3y ; $2xy$; $-xy$;

в) $\frac{m}{m-n}$ к знаменателю $m(m-n)$; m^2-n^2 ; m^2n-mn^2 ;

г) $\frac{x-1}{x+1}$ к знаменателю $(x+1)^2$; x^2-1 ; x^2+x .

Сократите дробь (22—25):

22. а) $\frac{16x}{4}$; б) $\frac{10}{15m}$; в) $\frac{3x}{2ax}$; г) $\frac{12xy}{20y}$.

23. а) $\frac{18ab^2}{18ab}$; б) $\frac{abc}{a^2c^2}$; в) $\frac{xy^3z^5}{x^5y^3z}$;

б) $\frac{2x^2y}{10xy^2}$; г) $\frac{24m^3n}{16m^2n^2}$; е) $\frac{2^5p^4q^4}{2^6p^8q^2}$.

24. а) $\frac{2a-2c}{8a}$; б) $\frac{3x+3y}{3x-3y}$;

б) $\frac{10m-5n}{5n}$; г) $\frac{2ab-2c}{2ac-2b}$.

25. а) $\frac{am}{am+m}$; б) $\frac{ac-ab}{abc}$; в) $\frac{3xy}{3x^2y-6xy}$;

б) $\frac{x}{xy-x}$; г) $\frac{a^2b+ab}{ab}$; е) $\frac{2mnp}{2m^2p-6mp}$.

26. Разложите на множители числитель и знаменатель дроби и сократите ее:

а) $\frac{ax-bx}{mx+nx}$; б) $\frac{x^2-2x}{xy-2y}$; в) $\frac{a^2+ab}{a^2+ac}$;

б) $\frac{am-an}{bm-bn}$; г) $\frac{d^2-d}{d^2+d}$; е) $\frac{y^2+xy}{x^2+xy}$.

Сократите дробь (27—30):

27. а) $\frac{y^3}{y^3+y^2}$; б) $\frac{x^5+x^3}{x^2+1}$; в) $\frac{m^4-m^3}{m^2+m^3}$;

б) $\frac{5a^2}{a^4+a^2}$; г) $\frac{b^5-b^4}{b^5}$; е) $\frac{n^2-n-1}{n^4-n^3-n^2}$.

28. а) $\frac{x^2-9y^2}{x+3y}$; б) $\frac{m^2-n^2}{mn-n^2}$; в) $\frac{2ab-6a}{b^2-6b+9}$;

б) $\frac{a+2b}{a^2+4ab+4b^2}$; г) $\frac{ax-ay}{x^2-2xy+y^2}$; е) $\frac{5n^2+10n}{n^2-4}$.

29. а) $\frac{x^2y-xy^2}{x^2-xy}$; б) $\frac{m(m^2-n^2)}{m^2n+mn^2}$; в) $\frac{a(9-a^2)}{3a+a^2}$;

б) $\frac{3ac+6a}{ac^2+2ac}$; г) $\frac{4a-2a^2}{4b-2ab}$; е) $\frac{ac^2-bc^2}{c(a^2-b^2)}$.

30. а) $\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}$; б) $\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$; в) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$; г) $\frac{x^2-10x+25}{x^2-25}$.

31. Восстановите запись:

а) $\frac{m}{n} = -\frac{\quad}{-n} = -\frac{-m}{\quad} = -\frac{\quad}{-n}$;

б) $\frac{a}{a-b} = \frac{-a}{\quad} = -\frac{-a}{\quad} = -\frac{\quad}{b-a}$;

в) $\frac{x-z}{x-y} = \frac{\quad}{y-x} = -\frac{x-z}{\quad} = -\frac{\quad}{x-y}$;

г) $\frac{p-c}{p+c} = -\frac{\quad}{p+c} = -\frac{p-c}{\quad} = \frac{\quad}{-p-c}$.

32. (Задание с выбором ответа.) Какое из следующих выражений:

1) $-\frac{x}{-y}$; 2) $-\frac{-x}{-y}$; 3) $-\frac{-x}{y}$; 4) $-\frac{x}{y}$; — равно дроби $\frac{x}{y}$?

А. Только 1. Б. 2 и 4. В. 1 и 2. Г. 1 и 3.

33. Замените выражение равным ему так, чтобы перед дробью не было знака «минус»:

а) $-\frac{a-b}{a-c}$; б) $-\frac{-x-1}{x+2}$; в) $-\frac{m-n}{mn}$; г) $-\frac{2x^2}{x-y}$.

Образец. Способ 1. $-\frac{a-3}{a-1} = \frac{-(a-3)}{a-1} = \frac{3-a}{a-1}$.

Способ 2. $-\frac{a-3}{a-1} = \frac{a-3}{-(a-1)} = \frac{a-3}{1-a}$.

34. Замените выражение равным ему так, чтобы перед дробью стоял знак «минус»:

а) $\frac{x}{1-y}$; б) $\frac{m-n}{m-p}$; д) $\frac{a+p}{b+p}$;

б) $\frac{a-5}{a}$; г) $\frac{x+y}{x-z}$; е) $\frac{-b-c}{a-c}$.

Б

35. а) В футляре цилиндрической формы уложены 3 теннисных мяча так, что они касаются крышек и стенок футляра (рис. 1.3). Какую часть объема футляра занимают мячи? (При решении пользуйтесь формулами объема шара и объема цилиндра:

$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi r^3$, где r — радиус

шара; $V_{\text{цилиндра}} = \pi r^2 h$, где r — радиус основания цилиндра и h — его высота.)

Указание. Выразите высоту h через радиус r .

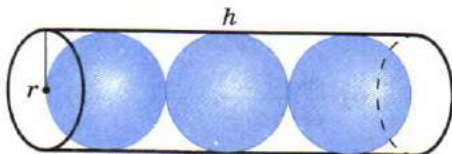


Рис. 1.3

б) В коробку уложены 3 банки консервов цилиндрической формы так, что они касаются друг друга и всех стенок коробки (рис. 1.4). Какую часть объема коробки занимают банки? Выразите ответ обыкновенной дробью, считая, что $\pi \approx 3$.

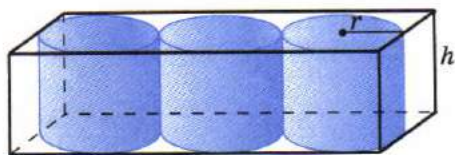


Рис. 1.4

Сократите дробь (36—37):

36. а) $\frac{x^3 - xy^2}{x^2 - xy}$; в) $\frac{3a^2 - 6ab + 3b^2}{6a - 6b}$; д) $\frac{p^3 - p}{p^2 - p}$;
 б) $\frac{2z^2 - 8}{6z^2 + 12z}$; г) $\frac{an + 3a}{an^2 + 6an + 9a}$; е) $\frac{a^2b + ab^2}{a^3b - ab^3}$.
37. а) $\frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$; в) $\frac{(x+y)^2}{x^3 + y^3}$; д) $\frac{x^2 - y^2}{(x-y)^2(x+y)^2}$;
 б) $\frac{x^3 - y^3}{(x-y)^2}$; г) $\frac{x^3 + y^3}{x^3 - x^2y + xy^2}$; е) $\frac{(x-y)^2(x+y)^2}{x^4 - y^4}$.

38. Разложите на множители числитель и знаменатель дроби и сократите ее:

- а) $\frac{ax - ay}{ax + bx - ay - by}$; г) $\frac{ax + ay - x^2 - xy}{ab + ac - bx - cx}$;
 б) $\frac{mn - pq + mq - pn}{pq + pn}$; д) $\frac{x^2 + 2xy + y^2 - z^2}{x + y + z}$;
 в) $\frac{ab + 1 + a + b}{ab + a}$; е) $\frac{a^2 + b^2 - 2ab - c^2}{a^2 - b^2 - c^2 - 2bc}$.

39. Выпишите выражения, равные дроби $\frac{p+a}{p-b}$:

$$\begin{array}{cccc} \frac{p+a}{b-p}; & -\frac{-p-a}{p-b}; & \frac{-p-a}{p-b}; & -\frac{p+a}{b-p}; \\ -\frac{p-a}{p-b}; & -\frac{-p-a}{b-p}; & \frac{-p-a}{b-p}; & \frac{p-a}{b-p}. \end{array}$$

Сократите дробь (40—43):

40. а) $\frac{m-n}{n-m}$; в) $\frac{a^2(a-2)}{a(2-a)}$; д) $\frac{a(a-3)^2}{b(3-a)^2}$;
 б) $\frac{2(x-y)}{x(y-x)}$; г) $\frac{x^2(c-x)}{cx(x-c)}$; е) $\frac{b^2c(b-c)}{bc(c-b)^2}$.

41. а) $\frac{y^2 - y}{1 - y^2}$; г) $\frac{5a^2 - 10ab}{2b^2 - ab}$; ж) $\frac{x^3 - x}{x - x^2}$;
 б) $\frac{a^2 - 4}{2a - a^2}$; д) $\frac{m^2 - n^2}{(n - m)^2}$; з) $\frac{a^2x - ax^2}{x^2 - ax}$;
 в) $\frac{3x - 3c}{ac - ax}$; е) $\frac{z^2 - 3z}{9 - 6z + z^2}$; и) $\frac{p^2 - 2pn + n^2}{n^2 - pn}$.
42. а) $\frac{a(x - y) - b(y - x)}{(a - b)(y - x)}$; в) $\frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{(a - p)(b - p)(c - p)}$;
 б) $\frac{(1 - n)(n - 2)}{2(n - 1) - n(n - 1)}$; г) $\frac{(a + b - c)(a - b)}{(c - a - b)(a - c)}$.
43. а) $\frac{(2a - 2b)^2}{8b - 8a}$; б) $\frac{4m^2 - 4n^2}{(4n - 4m)^2}$.

1.3

Сложение и вычитание алгебраических дробей

Вы знаете, как складывают и вычитают обыкновенные дроби с одинаковыми знаменателями. Например,

$$\frac{7}{11} + \frac{3}{11} = \frac{10}{11}, \quad \frac{7}{11} - \frac{3}{11} = \frac{4}{11}.$$

По таким же правилам складывают и вычитают и алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями.

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тем же.

Чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй, а знаменатель оставить тем же.

С помощью букв *правила сложения и вычитания алгебраических дробей* с одинаковыми знаменателями записываются так:

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A + B}{C}, \quad \frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A - B}{C}.$$

■ **Пример 1.** Найдем сумму и разность дробей

$$\frac{a + b}{ab} \quad \text{и} \quad \frac{a - b}{ab}:$$

$$\frac{a+b}{ab} + \frac{a-b}{ab} = \frac{(a+b)+(a-b)}{ab} = \frac{a+b+a-b}{ab} = \frac{2a}{ab} = \frac{2}{b};$$

$$\frac{a+b}{ab} - \frac{a-b}{ab} = \frac{(a+b)-(a-b)}{ab} = \frac{a+b-a+b}{ab} = \frac{2b}{ab} = \frac{2}{a}.$$

Если дроби имеют разные знаменатели, то их сначала нужно привести к общему знаменателю, после чего воспользоваться правилами сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

В качестве общего знаменателя дробей можно взять любое выражение, которое делится на каждый из знаменателей, в частности всегда можно взять произведение знаменателей данных дробей.

■ Пример 2. Найдём сумму и разность дробей

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a+b} \text{ и } \frac{1}{a-b}: \\ \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} &= \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} + \frac{a+b}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a-b)+(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{2a}{a^2-b^2}, \\ \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} &= \frac{(a-b)-(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{-2b}{a^2-b^2} = \frac{2b}{b^2-a^2}. \end{aligned}$$

Часто при сложении и вычитании дробей можно найти более простой общий знаменатель, чем произведение их знаменателей.

■ Пример 3. Представим в виде дроби выражение

$$\frac{c}{3ab} + \frac{b}{4ac} - \frac{a}{6bc}.$$

Произведение знаменателей данных дробей равно $3ab \cdot 4ac \cdot 6bc = 72a^2b^2c^2$. Но в качестве общего знаменателя удобнее взять более простое выражение $12abc$. Действительно, общий знаменатель должен делиться и на ab , и на ac , и на bc , а для этого достаточно, чтобы каждая из переменных a , b и c входила в него в первой степени. В качестве коэффициента для простоты вычислений удобно взять наименьшее общее кратное чисел 3, 4 и 6.

Таким образом,

$$\frac{c}{3ab} + \frac{b}{4ac} - \frac{a}{6bc} = \frac{c \cdot 4c}{3ab \cdot 4c} + \frac{b \cdot 3b}{4ac \cdot 3b} - \frac{a \cdot 2a}{6bc \cdot 2a} = \frac{4c^2 + 3b^2 - 2a^2}{12abc}.$$

■ Пример 4. Преобразуем в дробь выражение

$$\frac{y}{x^2 - xy} + \frac{2}{x - y}.$$

Разложим на множители знаменатель первой дроби:

$$x^2 - xy = x(x - y).$$

Теперь ясно, что это выражение делится на $x - y$, а значит, его можно принять за общий знаменатель дробей.

Получим

$$\frac{y}{x^2 - xy} + \frac{2}{x - y} = \frac{y}{x(x - y)} + \frac{2x}{(x - y)x} = \frac{y + 2x}{x(x - y)}.$$

Запись можно вести короче, указывая дополнительные множители:

$$\frac{y}{x^2 - xy} + \frac{2x}{x - y} = \frac{y + 2x}{x(x - y)}.$$

■ Пример 5. Представим в виде дроби выражение

$$a + \frac{a^2}{1 - a}.$$

Сначала первое слагаемое запишем в виде дроби со знаменателем 1, а затем приведем эту дробь к знаменателю $1 - a$; тогда дальше можно будет воспользоваться правилом сложения дробей с одинаковыми знаменателями. Получим

$$a + \frac{a^2}{1 - a} = \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1 - a} = \frac{a(1 - a) + a^2}{1 - a} = \frac{a - a^2 + a^2}{1 - a} = \frac{a}{1 - a}.$$

Заметим, что решение можно записать короче, пропустив некоторые промежуточные шаги, например так:

$$a + \frac{a^2}{1 - a} = \frac{a(1 - a) + a^2}{1 - a} = \frac{a - a^2 + a^2}{1 - a} = \frac{a}{1 - a}.$$

А

Упростите выражение (44—47):

44. а) $\frac{5a}{12} + \frac{a}{12}$; в) $\frac{3p^2}{10c} - \frac{7p^2}{10c} - \frac{p^2}{10c}$;

б) $\frac{14b^2}{5} - \frac{9b^2}{5}$; г) $\frac{5}{3m} - \frac{7}{3m} - \frac{1}{3m}$.

45. а) $\frac{2a - 1}{2} + \frac{a + 4}{2}$; в) $\frac{x - y}{z} - \frac{x + y}{z}$;

б) $\frac{c + 3}{3} - \frac{5c}{3}$; г) $\frac{m + 3}{n} + \frac{m - 3}{n}$.

46. а) $\frac{ax}{x + y} + \frac{ay}{x + y}$; в) $\frac{m^2}{m + n} - \frac{n^2}{m + n}$;

б) $\frac{a}{a - 1} - \frac{1}{a - 1}$; г) $\frac{c}{c^2 - 9} + \frac{3}{c^2 - 9}$;

д) $\frac{2}{1 - x^2} - \frac{2x}{1 - x^2}$;

е) $\frac{5p}{p^2 - q^2} + \frac{5q}{p^2 - q^2}$.

47. а) $\frac{4a+1}{3a-3} - \frac{a+1}{3a-3}$; в) $\frac{x+a}{a-5} - \frac{x+5}{a-5}$; д) $\frac{k^2+k}{k^2-9} - \frac{7k-9}{k^2-9}$;
 б) $\frac{3a+2b}{a+b} + \frac{2a+3b}{a+b}$; г) $\frac{2mn}{m^2-n^2} + \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$; е) $\frac{2a^2}{a^2-4a+4} - \frac{a^2+4}{a^2-4a+4}$.

48. Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{5}$; г) $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{3a}$; ж) $\frac{c}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{c^2}{ab}$;
 б) $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{9}$; д) $\frac{c}{ab}$ и $\frac{a}{bc}$; з) $\frac{c-x}{c+x}$ и $\frac{cx}{c-x}$;
 в) $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$; е) $\frac{1}{x^2y}$ и $\frac{1}{xy^2}$; и) $\frac{a-b}{a^2+ab}$ и $\frac{a^2+b}{b^2+ab}$.

Выполните действия (49—50):

49. а) $\frac{2m}{5} + \frac{3m}{2}$; в) $\frac{x}{ab} - \frac{x}{c}$; д) $\frac{a}{b} + \frac{c}{10}$;
 б) $\frac{2}{a} - \frac{7}{b}$; г) $\frac{c}{ab} + \frac{a}{cd}$; е) $\frac{b}{a^2} - \frac{a}{b^2}$.
 50. а) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+y}$; в) $\frac{x}{x+y} - \frac{x-y}{x}$; д) $\frac{2c}{c-d} - \frac{c+d}{c}$;
 б) $\frac{5}{a} + \frac{3a-5}{a+1}$; г) $\frac{m+n}{m} - \frac{n+m}{m-n}$; е) $\frac{p}{q-p} - \frac{p}{q}$.

51. Найдите сумму и разность дробей:

а) $\frac{1}{a-b}$ и $\frac{1}{a+b}$; в) $\frac{p-q}{p+q}$ и $\frac{p+q}{p-q}$;
 б) $\frac{a+1}{a-1}$ и $\frac{a-1}{a+1}$; г) $\frac{m}{m+4}$ и $\frac{m}{m-4}$.

Приведите дроби к общему знаменателю и выполните действия (52—53):

52. а) $\frac{n-1}{2n} - \frac{n+1}{5n}$; г) $\frac{1-xz}{xyz} - \frac{1-ax}{axy}$;
 б) $\frac{2}{x} - \frac{1+y}{xy}$; д) $\frac{c+b}{bc^2} - \frac{c+b}{b^2c}$;
 в) $\frac{1}{y^3} + \frac{1-y^2}{y^5}$; е) $\frac{1+b}{abc} + \frac{1-a}{a^2c}$.
 53. а) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$; в) $\frac{x+y}{xy} - \frac{x+z}{xz} + \frac{y+z}{yz}$;
 б) $\frac{1}{b^3} - \frac{2}{b^2} + \frac{1}{b}$; г) $\frac{3x+1}{3x} - \frac{2y+1}{2y} + \frac{3x-y}{6xy}$.

Упростите выражение (54—57):

54. а) $\frac{4b}{3(b+3)} - \frac{4}{b+3}$; в) $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)}$;
 б) $\frac{x}{4(x-1)} - \frac{x}{6(x-1)}$; г) $\frac{3x}{y(x+y)} - \frac{3y}{x(x+y)}$.

$$55. \quad \text{а) } \frac{2a}{3a+3} + \frac{5a}{6a+6}; \quad \text{г) } \frac{4p}{9p+9q} - \frac{p}{3p+3q};$$

$$\text{б) } \frac{m}{4m-4} - \frac{m}{12m-12}; \quad \text{д) } \frac{x}{ax+ay} + \frac{y}{by+bx};$$

$$\text{в) } \frac{x}{2x-2y} + \frac{3x}{8x-8y}; \quad \text{е) } \frac{a}{cb-cd} - \frac{c}{ab-ad}.$$

$$56. \quad \text{а) } \frac{2a}{a^2-b^2} - \frac{2}{a+b}; \quad \text{г) } \frac{y^2}{y^2-2y+1} - \frac{y}{y-1};$$

$$\text{б) } \frac{c^2+25}{c^2-25} - \frac{c}{c+5}; \quad \text{д) } \frac{a+b}{a-b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2};$$

$$\text{в) } \frac{2}{3a+2} + \frac{8}{9a^2-4}; \quad \text{е) } \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2} - \frac{m-n}{m+n}.$$

$$57. \quad \text{а) } \frac{4}{x} + \frac{20}{x^2-5x}; \quad \text{г) } \frac{y^2+4}{y^2-2y} - \frac{2}{y-2};$$

$$\text{б) } \frac{n^2}{mn-m^2} - \frac{m}{n-m}; \quad \text{д) } \frac{2}{a^2+ab} + \frac{2}{b^2+ab};$$

$$\text{в) } \frac{a}{a-c} - \frac{2ac-c^2}{a^2-ac}; \quad \text{е) } \frac{1}{xy-x^2} - \frac{1}{y^2-xy}.$$

58. Замените знаменатель одной из дробей противоположным выражением и поменяйте знак перед этой дробью. Упростите полученное выражение:

$$\text{а) } \frac{2x}{x-y} + \frac{2y}{y-x}; \quad \text{в) } \frac{m+n}{m-n} - \frac{n}{n-m};$$

$$\text{б) } \frac{a+b}{b-a} + \frac{a+2b}{a-b}; \quad \text{г) } \frac{a-1}{a-2} - \frac{a+1}{2-a}.$$

Образец. а) $\frac{2x}{x-y} + \frac{2y}{y-x} = \frac{2x}{x-y} - \frac{2y}{x-y} = \dots$

Доведите преобразование до конца.

59. Приведите дроби к общему знаменателю, заменив у одной из них числитель и знаменатель на противоположные выражения, а затем выполните действие:

$$\text{а) } \frac{3b-a}{b-a} + \frac{4b}{a-b}; \quad \text{в) } \frac{1-x}{x-y} + \frac{1-6x}{y-x};$$

$$\text{б) } \frac{2y+x}{x-1} + \frac{x-3y}{1-x}; \quad \text{г) } \frac{2m}{m-n} + \frac{3n-m}{n-m}.$$

Образец. а) $\frac{3b-a}{b-a} + \frac{4b}{a-b} = \frac{a-3b}{a-b} + \frac{4b}{a-b} = \dots$

Доведите преобразование до конца.

Упростите выражение (60—63):

60. а) $\frac{b}{b-1} - \frac{b-2}{1-b}$; в) $\frac{2c-5}{a-c} - \frac{c+5}{c-a}$; д) $\frac{m}{m^2-4} - \frac{2}{4-m^2}$;
 б) $\frac{4}{2a-1} + \frac{3-2a}{1-2a}$; г) $\frac{x^2}{x-3} + \frac{9}{3-x}$; е) $\frac{2x-1}{x-y} + \frac{x-1}{y-x}$.

61. а) $\frac{a}{b} + a$; в) $y - \frac{4}{y}$; д) $\frac{b}{c} - 2 + \frac{c}{b}$;
 б) $\frac{m}{n} - m$; г) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1$; е) $1 - \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}$.

62. а) $\frac{5x}{x-y} + 5$; г) $\frac{2c^2}{c-8} - 2c$; ж) $4x - \frac{10x^2-2}{3x}$;
 б) $1 + \frac{a}{b-a}$; д) $\frac{15a^2}{3a-2} - 5a$; з) $2 + \frac{1-ab}{ab}$;
 в) $7 - \frac{7x}{x+y}$; е) $2m - \frac{mn-1}{n}$; и) $\frac{3a+1}{2a+1} - 1$.

63. а) $\frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x} - \frac{2x^2}{1-x^2}$; в) $\frac{y-6}{y^2+3y} - \frac{y-3}{y} + \frac{y}{y+3}$;
 б) $\frac{1}{a+b} - \frac{2b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a-b}$; г) $\frac{a(4a-b)}{3a-3b} - \frac{a}{3} - \frac{b^2}{a-b}$.

64. а) Найдите дробь, которую надо сложить с дробью $\frac{c-c^2}{c^3+2c}$, чтобы получить $\frac{1}{c^2+2}$. Проверьте результат.

б) Найдите дробь, которую надо сложить с дробью $\frac{3}{x+3}$, чтобы получить $\frac{3x^2}{x^3+27}$.

Упростите выражение (65—68):

65. а) $\frac{a}{ax-x^2} - \frac{a}{ax+x^2}$; в) $\frac{m+n}{m^2n-mn^2} - \frac{m-n}{m^2n+mn^2}$;
 б) $\frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{a+b}{a^2-ab}$; г) $\frac{x+y}{xy-y^2} - \frac{4x}{x^2-y^2}$.

66. а) $\frac{4}{a} + \frac{4}{a^2-a} - \frac{2}{a+1}$; в) $\frac{x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$;
 б) $\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} + \frac{8}{x}$; г) $\frac{1}{m+n} - \frac{m+n}{m^2-mn+n^2} + \frac{4mn}{m^3+n^3}$.

67. а) $\frac{m+n}{m-n} + \frac{4mn}{n^2-m^2}$; г) $\frac{4}{c^2-25} + \frac{2}{5c-c^2}$;
 б) $\frac{1-a}{a^2-a} - \frac{1+a}{1-a^2}$; д) $\frac{x^2}{(x-3)^2} + \frac{x}{3-x}$;
 в) $\frac{b}{ab-a^2} + \frac{a}{ab-b^2}$; е) $\frac{y^2}{(1-y)^2} - \frac{y+1}{y-1}$.
68. а) $\frac{a}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{b^2-a^2} + \frac{a}{a+b}$; в) $\frac{a}{4-a^2} - \frac{2+a}{2a-4} - \frac{2-a}{4+2a}$;
 б) $\frac{1}{x+y} - \frac{1}{y-x} - \frac{2y}{x^2-y^2}$; г) $\frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{x+1}$.
69. Представьте в виде дроби:
 а) $2x - y - \frac{2x-y^2}{y}$; г) $6 + b - \frac{12b}{6+b}$;
 б) $1 - a + \frac{a^2-3}{3+a}$; д) $\frac{x^2+4}{x-2} - x - 2$;
 в) $\frac{a^2+b^2}{2a+b} + 2a - b$; е) $\frac{a^2-3}{a-1} - a + 1$.

70. Представьте дробь в виде суммы или в виде разности многочлена и дроби:

а) $\frac{a^2}{a^2-1}$; б) $\frac{c^2}{c^2-1}$; в) $\frac{m^2+n^2}{m-n}$; г) $\frac{x^2+xz+z^2}{x+z}$.

Образец. $\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x-1 + \frac{1}{x+1}$.

71. Докажите, что:

а) $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$;
 б) $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} = \frac{3}{a(a+3)}$.

У к а з а н и е. б) Сначала сложите первую и вторую дроби, затем прибавьте третью.

72. (Задача-исследование.)

1) Проверьте равенства:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3}; \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \cdot 4}; \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{4 \cdot 5}; \quad \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{5 \cdot 6}.$$

Продолжите эту цепочку равенств. Запишите соответствующее буквенное равенство и докажите его.

2) Примените доказанное равенство для упрощения выражений:

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$;

б) $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \dots + \frac{1}{(x+99)(x+100)}$.

3) Упростите эти выражения другим способом, последовательно складывая дроби. Получился ли тот же результат?

1.4

Умножение и деление алгебраических дробей

Вспомните, как умножают и делят обыкновенные дроби. Для этого рассмотрите примеры:

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}; \quad \frac{4}{9} : \frac{5}{7} = \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{5} = \frac{4 \cdot 7}{9 \cdot 5} = \frac{28}{45}.$$

Обратите внимание: деление сводится к умножению на дробь, обратную делителю.

Таким же образом умножают и делят алгебраические дроби.

Чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить их числители и их знаменатели и первое произведение записать в числителе дроби, а второе — в знаменателе.

Чтобы разделить дробь на дробь, нужно делимое умножить на дробь, обратную делителю.

С помощью букв правила умножения и деления алгебраических дробей записываются так:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}, \quad \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}.$$

■ Пример 1. Найдём произведение и частное дробей $\frac{2}{3x^2y}$ и $\frac{3x}{4y}$.

$$\frac{2}{3x^2y} \cdot \frac{3x}{4y} = \frac{2 \cdot 3x}{3x^2y \cdot 4y} = \frac{1}{2xy^2};$$

$$\frac{2}{3x^2y} : \frac{3x}{4y} = \frac{2}{3x^2y} \cdot \frac{4y}{3x} = \frac{2 \cdot 4y}{3x^2y \cdot 3x} = \frac{8}{9x^3}.$$

■ Пример 2. Преобразуем в дробь произведение $\frac{2x^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x+y}{x}$.

$$\frac{2x^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x+y}{x} = \frac{2x^2 \cdot (x+y)}{(x+y)(x-y) \cdot x} = \frac{2x}{x-y}.$$

- Пример 3. Преобразуем в дробь частное $\frac{x^2 - xy}{u} : \frac{x - y}{u^2}$.

$$\frac{x^2 - xy}{y} : \frac{x - y}{y^2} = \frac{x^2 - xy}{y} \cdot \frac{y^2}{x - y} = \frac{x(x - y) \cdot y^2}{y \cdot (x - y)} = xy.$$

- Пример 4. Выполним умножение дроби $\frac{ab}{2d}$ на одночлен $4bd$.

Запишем одночлен в виде дроби со знаменателем, равным 1, а затем воспользуемся правилом умножения дробей:

$$\frac{ab}{2d} \cdot 4bd = \frac{ab}{2d} \cdot \frac{4bd}{1} = \frac{ab \cdot 4bd}{2d \cdot 1} = 2ab^2.$$

- Пример 5. Разделим дробь $\frac{5ab^2}{6}$ на одночлен $10abc$.

Как и в предыдущем примере, представим одночлен в виде дроби со знаменателем, равным 1, а затем воспользуемся правилом деления дробей:

$$\frac{5a^2b}{6} : 10abc = \frac{5a^2b}{6} : \frac{10abc}{1} = \frac{5a^2b}{6} \cdot \frac{1}{10abc} = \frac{5a^2b \cdot 1}{6 \cdot 10abc} = \frac{a}{12c}.$$

A

73. Выполните умножение:

а) $\frac{a}{5} \cdot \frac{b}{2}$; в) $\frac{2a^2}{x} \cdot \frac{a^2}{x}$;
б) $\frac{m}{3} \cdot \frac{m}{3}$; г) $\frac{1}{a-1} \cdot \frac{2}{a-1}$.

74. Выполните деление:

а) $\frac{1}{a} : \frac{1}{d}$; в) $\frac{n+3}{2} : \frac{1}{n+3}$;
б) $\frac{n}{m^2} : \frac{m}{n}$; г) $\frac{1}{b+5} : \frac{b-5}{b}$.

75. Выполните действия:

а) $\frac{a}{bc} \cdot \frac{c^3}{3a}$; в) $\frac{x}{yz} \cdot \frac{y}{xz}$; д) $\frac{a^4b^2}{5xy} \cdot \frac{10x^3}{a^2b^2}$;
б) $\frac{x^2}{y} : \frac{x}{2y}$; г) $\frac{a^4}{b^3} : \frac{a^3}{b^2}$; е) $\frac{3mn}{2pq^2} : \frac{6m^2}{pq}$.

76. Выполните возведение в степень:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \left(\frac{x^2}{y}\right)^3; & \text{в)} \left(\frac{a^2b}{cd^2}\right)^4; & \text{д)} \left(-\frac{2a^2}{b}\right)^2; & \text{ж)} \left(-\frac{ax^3}{y^2}\right)^2; \\ \text{б)} \left(\frac{4}{bc^3}\right)^2; & \text{г)} \left(\frac{mn}{10p^3}\right)^3; & \text{е)} \left(-\frac{x^4}{2y}\right)^3; & \text{з)} \left(-\frac{2}{m^2n}\right)^5. \end{array}$$

77. Выполните умножение:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \frac{y}{x} \cdot \frac{x^2 - xy}{y^2}; & \text{в)} \frac{x}{5x + 5y} \cdot \frac{x + y}{y}; & \text{д)} \frac{a + 1}{a} \cdot \frac{b}{a^2 + a} \\ \text{б)} \frac{b^2}{2a} \cdot \frac{6a}{ab - b^2}; & \text{г)} \frac{a^2 - ab}{b} \cdot \frac{a}{a - b}; & \text{е)} \frac{ac - cd}{ad} \cdot \frac{d}{c^2}. \end{array}$$

78. Выполните деление:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{ax - xy}{a} : \frac{a^2 - ay}{x}; & \text{г)} \frac{1}{a^2 - ab} : \frac{b}{a^2 - b^2}; \\ \text{б)} \frac{ab + ac}{bc} : \frac{ab - ac}{bc}; & \text{д)} \frac{a^2 + ab}{b^2} : \frac{a^2 + a}{b}; \\ \text{в)} \frac{x}{x^2 - y^2} : \frac{1}{5x + 5y}; & \text{е)} \frac{m^2 - mn}{n} : \frac{mn - n^2}{m}. \end{array}$$

79. Выполните действия:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{ac - cd}{ad} \cdot \frac{cd}{a^2 - ad}; & \text{д)} \frac{b}{c^2 - bc} : \frac{b^3}{c^2 - b^2}; \\ \text{б)} \frac{x^2 - 2x}{y^2} : \frac{x^2y - 2xy}{4}; & \text{е)} \frac{m^2 - n^2}{2mn^2} \cdot \frac{2mn}{3m - 3n}; \\ \text{в)} \frac{x^2 - y^2}{x^2} : \frac{3x + 3y}{x}; & \text{ж)} \frac{a^2b}{a^2 - 2ab + b^2} : \frac{a}{ab - b^2}; \\ \text{г)} \frac{xy + x^2}{8y} \cdot \frac{2x}{xy + y^2}; & \text{з)} \frac{p^2 + 2pq + q^2}{2p} \cdot \frac{2p}{p^2 - q^2}. \end{array}$$

80. Упростите выражение:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{5x - 5y}{x} \cdot \frac{2x^2}{y - x}; & \text{г)} \frac{(x - 5)^2}{y^2} \cdot \frac{y^2}{y^2 - x^2}; \\ \text{б)} \frac{a^2 - c^2}{c^2} : \frac{c - a}{c}; & \text{д)} \frac{2a^2}{25 - 5a} : \frac{10a}{(a - 5)^2}; \\ \text{в)} \frac{a}{ab - b^2} : \frac{a^2}{b^2 - a^2}; & \text{е)} \frac{m}{3m - 3n} \cdot \frac{n^2 - m^2}{m^2}. \end{array}$$

Образец. $\frac{x - y}{a} : \frac{y - x}{b} = \frac{x - y}{a} \cdot \frac{b}{y - x} = -\frac{(x - y)b}{a(x - y)} = -\frac{b}{a}.$

81. Найдите произведение дроби и одночлена:

а) $a \cdot \frac{1}{b}$; в) $\frac{a}{2x} \cdot 2a$; д) $\frac{ab}{cd} \cdot bc$;
 б) $\frac{3}{x} \cdot y$; г) $8x \cdot \frac{c}{4x}$; е) $axy \cdot \frac{a}{xy}$.

82. Найдите частное:

а) $\frac{1}{x} : y$; в) $3a : \frac{9}{a}$; д) $\frac{ab}{cd} : (bc)$;
 б) $m : \frac{1}{n}$; г) $\frac{2ab}{3} : (6b)$; е) $mpq : \frac{m}{pq}$.

Выполните умножение или деление (83—84):

83. а) $2x^2y \cdot \frac{x}{y}$; в) $\frac{3a}{4b^2} \cdot 8a^2b^2$; д) $\frac{2a^2}{3b^3} : (6ab)$;
 б) $5ab^2 : \frac{a}{b}$; г) $\frac{12m^2}{n^2} : (6m^2n^2)$; е) $18pq^2 \cdot \frac{2p}{9q^6}$.

84. а) $\frac{x-y}{x} \cdot (x+y)$; д) $\frac{n^2-4}{3} : (n-2)^2$;
 б) $(2a+6) \cdot \frac{a-2}{a+3}$; е) $(x-z) : \frac{x^2-2xz+z^2}{x^2-z^2}$;
 в) $\frac{4a^2}{2a-b} \cdot (2a-b)$; ж) $\frac{p^2+4p+4}{p-2} : (p^2-4)$;
 г) $(2m-3) \cdot \frac{m-1}{2m-3}$; з) $\frac{b}{a^2-ab} : (ab-b^2)$.

Б

85. Упростите выражение:

а) $\frac{2x^2y}{a^2} \cdot \frac{a}{xy^2} : \frac{2x^2}{a^3y}$; в) $x^3y^2 : \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y^3}$; д) $3xy^2 \cdot \frac{x}{y} : \frac{6x^2}{y}$;
 б) $\frac{ab^3}{x} : \frac{5b^2}{a} : \frac{a^3}{2x}$; г) $\frac{2ab^5}{3c} \cdot 6ac : (2b^3c)$; е) $\frac{3m^2}{2n^2} \cdot \frac{10n}{3m} : (15mn)$.

Выполните действия (86—89):

86. а) $\frac{x^2-9}{x^2-5x} \cdot \frac{x^2-25}{x^2+3x}$; в) $\frac{4x-y}{x^2+xy} : \frac{4x^2-xy}{2x^2-2y^2}$;
 б) $\frac{b^2-ab}{a^2+ad} : \frac{ab}{d^2+ad}$; г) $\frac{a^2+4a+4}{2a-2} \cdot \frac{a^2-a}{3a+6}$.
 87. а) $\frac{(c-d)^2}{cd^2+d^3} : \frac{d^2-c^2}{d^4}$; в) $\frac{2z-2y}{(2z+2y)^2} \cdot \frac{(2y+2z)^3}{(2y-2z)^3}$;
 б) $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} \cdot \frac{(b-a)^3}{3(a+b)^3}$; г) $\frac{(x-2)^2}{(x-1)^2} : \frac{(4-2x)^3}{(3-3x)^2}$.

88. а) $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3} \cdot \frac{y-x}{y+x}$; в) $\frac{p^3-q^3}{p^4-q^4} \cdot \frac{p^2+q^2}{p-q}$;
 б) $\frac{2x^3+2z^3}{xz-x^2} : \frac{x^3-x^2z+xz^2}{x^2-z^2}$; г) $\frac{x^4-16}{x^2-4x+4} : \frac{x^3+8}{x-2}$.
89. а) $\frac{n-n^2}{2+n} \cdot \frac{1}{2n-n^2} \cdot \frac{n^2-4}{n-1}$; б) $\frac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2} : \frac{x+y}{x^3-y^3} \cdot \frac{1}{(y-x)^3}$.
90. Найдите с помощью калькулятора значение выражения:
 а) $\frac{x+y}{xy}$ при $x=1,25$ и $y=1,6$; при $x=0,032$ и $y=0,04$;
 б) $\frac{2x-y}{5y}$ при $x=10,24$ и $y=0,25$; при $x=5,12$ и $y=0,5$;
 в) $\frac{x^2+xy}{y^2}$ при $x=0,9$ и $y=7,5$; при $x=10,8$ и $y=0,45$.

У к а з а н и е. а) Чтобы выполнять вычисления непрерывной цепочкой, преобразуем выражение $\frac{x+y}{xy}$ следующим образом:

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{x+y}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{x+y}{x} : y.$$

1.5

Преобразование выражений, содержащих алгебраические дроби

Вы рассмотрели правила, по которым складывают, вычитают, умножают и делят две алгебраические дроби, т. е. преобразовывают в дробь их сумму, разность, произведение и частное. Пользуясь этими правилами, можно преобразовывать и более сложные выражения, содержащие алгебраические дроби.

■ Пример 1. Упростим выражение

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} : \left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} \right).$$

Преобразование этого выражения удобно выполнять по действиям:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} &= \frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^2+ab-ab+b^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}; \\ 2) \quad \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} : \frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)} &= \frac{(a^2+b^2) \cdot (a-b) \cdot (a+b)}{(a+b)^2 \cdot (a^2+b^2)} = \frac{a-b}{a+b}. \end{aligned}$$

Таким образом, данное выражение равно дроби $\frac{a-b}{a+b}$.

■ Пример 2. Упростим выражение

$$\left(\frac{a}{a^2 - b^2} - \frac{a}{a^2 + b^2} \right) \cdot (a^4 - b^4).$$

Здесь, как и в предыдущем примере, можно сначала преобразовать выражение в скобках, а затем умножить результат на двучлен $a^4 - b^4$. Но можно действовать и иначе. Двучлен $a^4 - b^4$ делится на знаменатель каждой из дробей, составляющих разность в скобках. Поэтому целесообразно сначала раскрыть скобки, выполнив умножение на этот двучлен:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{a^2 - b^2} - \frac{a}{a^2 + b^2} \right) \cdot (a^4 - b^4) &= \frac{a(a^4 - b^4)}{a^2 - b^2} - \frac{a(a^4 - b^4)}{a^2 + b^2} = \\ &= a(a^2 + b^2) - a(a^2 - b^2) = a(a^2 + b^2 - a^2 + b^2) = 2ab^2. \end{aligned}$$

■ Пример 3. Докажем, что выражение

$$(c^3 - 1) : \left(\frac{c^2}{c+1} + 1 \right) + 5$$

может принимать только положительные значения.

Прежде всего упростим данное выражение, выполнив указанные действия:

- 1) $\frac{c^2}{c+1} + 1 = \frac{c^2 + c + 1}{c+1};$
- 2) $(c^3 - 1) : \frac{c^2 + c + 1}{c+1} = \frac{(c-1)(c^2 + c + 1)(c+1)}{c^2 + c + 1} = c^2 - 1;$
- 3) $(c^2 - 1) + 5 = c^2 + 4.$

Таким образом, мы преобразовали данное выражение в двучлен $c^2 + 4$. Но этот двучлен принимает только положительные значения. Значит, и равное ему исходное выражение при всех допустимых значениях переменной c может принимать только положительные значения.

A

Упростите выражение (91—94):

91. а) $\frac{xy}{x-y} \cdot \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right);$ г) $\left(\frac{u}{u-v} - \frac{u}{u+v} \right) \cdot \frac{u^2 + uv}{2v};$
 б) $\frac{mn^2}{n^2 - m^2} \cdot \left(\frac{2}{m} - \frac{2}{n} \right);$ д) $\left(\frac{c-d}{d} + \frac{2c}{c-d} \right) : \frac{c^2 + d^2}{c-d};$
 в) $\left(a - \frac{6a-4}{a+2} \right) \cdot \frac{a+2}{a^2 - 2a};$ е) $\left(\frac{a+b}{a} - \frac{a+b}{b} \right) : \frac{a+b}{a^2 b^2}.$

$$92. \quad \text{а) } \left(\frac{b}{a} - \frac{q}{b}\right) : (a+b); \quad \text{в) } \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) : (x-y);$$

$$\text{б) } (x^2 - y^2) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right); \quad \text{г) } (a+b)^2 : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab}\right).$$

$$93. \quad \text{а) } \frac{a}{1-b} + \frac{a^2 - ab}{b^2 - 1} \cdot \frac{b+1}{a}; \quad \text{в) } n - \frac{n^2 - na}{n+a} \cdot \frac{n}{n-a};$$

$$\text{б) } \frac{m^2 - 9}{m} : \frac{(m-3)^2}{m} + \frac{6}{3-m}; \quad \text{г) } \frac{v+3}{1-v} + \frac{v+3}{v-1} \cdot (v+1).$$

$$94. \quad \text{а) } \left(1 - \frac{u}{u+v}\right) \cdot \left(1 + \frac{v}{u-v}\right); \quad \text{в) } \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right);$$

$$\text{б) } \left(\frac{1}{x+z} - \frac{1}{x-z}\right) : \left(\frac{1}{x+z} + \frac{1}{x-z}\right); \quad \text{г) } \left(\frac{1}{y} - y\right) \cdot \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1}\right).$$

95. Выполните возведение в квадрат:

$$\text{а) } \left(a + \frac{1}{a}\right)^2; \quad \text{в) } \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2;$$

$$\text{б) } \left(n - \frac{1}{n}\right)^2; \quad \text{г) } \left(\frac{1}{2x} - x\right)^2.$$

Упростите выражение (96—97):

$$96. \quad \text{а) } \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 - 2; \quad \text{в) } \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right);$$

$$\text{б) } \left(m - \frac{2}{m}\right)^2 - \left(m + \frac{2}{m}\right)^2; \quad \text{г) } \left(a + \frac{a+1}{a}\right)^2 - \left(a - \frac{a+1}{a}\right)^2.$$

$$97. \quad \text{а) } \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{3}}; \quad \text{в) } \frac{\frac{1}{y} - x}{\frac{1}{1} + x}; \quad \text{д) } \frac{\frac{1}{a} - b}{\frac{1}{b} - a};$$

$$\text{б) } \frac{3 + \frac{p}{q}}{3 - \frac{p}{q}}; \quad \text{г) } \frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{y}{x} + \frac{x}{y}}; \quad \text{е) } \frac{\frac{u}{1} - 3}{\frac{1}{v} - \frac{3}{uv}}.$$

Образец.

$$\frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + 1} = \frac{\left(\frac{a}{b} + 1\right)ab}{\left(\frac{b}{a} + 1\right)ab} = \frac{a^2 + ab}{b^2 + ab} = \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b}.$$

98. Выразите из формулы каждую переменную через остальные переменные:

$$\text{а) } \frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}; \quad \text{б) } \frac{1}{D} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}.$$

Упростите выражение (99—100):

99. а) $\left(\frac{x}{x+1} + \frac{x^2+1}{1-x^2} - \frac{x}{x-1}\right) : \frac{x+x^2}{(1-x)^2};$

б) $\frac{(a-5)^2}{a^2+5a} : \left(\frac{5}{a+5} - \frac{a^2+25}{a^2-25} - \frac{5}{5-a}\right);$

в) $\left(\frac{1+x}{x^2-xy} - \frac{1-y}{y^2-xy}\right) : \frac{x^2+y^2+2xy}{x^2y-xy^2} - \frac{x}{x^2-y^2};$

г) $\frac{4}{b^2-4} + \frac{4b}{4-4b+b^2} \cdot \left(\frac{2}{2b+b^2} - \frac{b}{4+2b}\right).$

100. а) $\left(m+3+\frac{9}{m-3}\right) : \left(\frac{m}{m-3} + \frac{3m}{(3-m)^2}\right);$ в) $\left(\frac{x^3}{y^3} + 1\right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right);$

б) $\left(\frac{n}{1+2n+n^2} - \frac{n}{n+1}\right) : \left(\frac{1}{n+1} + n-1\right);$ г) $\left(1 + \frac{v}{u} + \frac{v^2}{u^2}\right) : \left(\frac{1}{v} - \frac{v^2}{u^3}\right).$

101. Докажите, что значение выражения не зависит от значений переменных:

а) $\frac{16b^2-a^2}{4b} \cdot \left(\frac{a+4b}{a^2-4ab} - \frac{a-4b}{a^2+4ab}\right);$

б) $\frac{3y}{9y^2-x^2} : \left(\frac{x-3y}{x^2+3xy} + \frac{x+3y}{3xy-x^2}\right).$

102. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значения выражения:

а) $\left(\frac{b^2}{a^3-ab^2} - \frac{b}{a^2-ab}\right) \cdot \left(\frac{a}{b^2+ab} - \frac{1}{a+b}\right)$ отрицательны;

б) $\frac{x^3-y^3}{2x+2y} \cdot \frac{(x+y)^2}{x^2+xy+y^2} : \left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}\right)$ неотрицательны.

103. Упростите выражение:

а) $\left(1-z-\frac{2z}{z-1}\right) : \left(\frac{1}{z} + z\right) \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3}\right);$

б) $\left(a-5+\frac{a^2+7}{a+5}\right) \cdot \left(\frac{a}{a-3} - \frac{a}{a+3}\right) : \frac{6a}{25-a^2};$

$$\text{в)} \frac{a^3 - b^3}{2a + 2b} \cdot \left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} \right) : \frac{a^2 + ab + b^2}{(a+b)^2};$$

$$\text{г)} \frac{1}{x+y} + \frac{x^2 + y^2 - xy}{y^2 - x^2} \cdot \frac{xy - y^2}{x^3 + y^3} - \frac{1}{(x+y)^2}.$$

104. а) Дано: $x + \frac{1}{x} = y$. Выразите $x^2 + \frac{1}{x^2}$ через y .

б) Дано: $x - \frac{1}{x} = y$. Выразите $x^2 + \frac{1}{x^2}$ через y .

Образец. Дано: $x + \frac{2}{x} = y$. Выразим $x^2 + \frac{4}{x^2}$ через y :

$$\left(x + \frac{2}{x} \right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = x^2 + 4 + \frac{4}{x^2}.$$

$$\text{Отсюда } x^2 + \frac{4}{x^2} = \left(x + \frac{2}{x} \right)^2 - 4 = y^2 - 4.$$

105. (Задача-исследование.)

1) Проверьте равенства:

$$\text{а)} \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right);$$

$$\text{б)} \frac{1}{4 \cdot 6} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right);$$

$$\text{в)} \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right);$$

$$\text{г)} \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right).$$

Составьте еще несколько таких же равенств. Запишите соответствующее буквенное равенство и докажите его.

2) Примените доказанное равенство для упрощения выражений:

$$\text{а)} \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{23 \cdot 25};$$

$$\text{б)} \frac{1}{a(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+4)} + \dots + \frac{1}{(a+98)(a+100)}.$$

Упростите эти выражения другим способом, последовательно складывая дроби. Совпали ли ваши результаты?

В 7 классе в курсе алгебры и при изучении физики вам уже встречались степени с отрицательными показателями, например такие выражения, как 10^{-5} , 3^{-6} , $(0,5)^{-8}$. И вы знаете, что выражение 10^{-5} означает дробь $\frac{1}{10^5}$. Точно так же $3^{-6} = \frac{1}{3^6}$, $(0,5)^{-8} = \frac{1}{(0,5)^8}$.

В общем случае принимается следующее

Определение

Для любого числа a , не равного нулю, и целого отрицательного числа $-n$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Например, по определению

$$(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}, \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{125}} = 125.$$

Обратите внимание: равенство $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ означает, что числа a^{-n} и a^n — взаимно обратные; их произведение равно 1. В частности, a^{-1} есть число, обратное числу a .

Таким образом, вы знаете, что означает степень, показатель которой — произвольное натуральное или целое отрицательное число. Однако, чтобы понятие степени имело смысл при любом целом показателе, нам еще нужно договориться, что означает степень с показателем, равным нулю. Для этого случая принимается следующее

Определение

Для любого числа a , не равного нулю, $a^0 = 1$.

В соответствии с этим определением

$$7^0 = 1, \quad (-12)^0 = 1, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1.$$

Заметим, что такие выражения, как 0^{-5} , 0^0 , смысла не имеют.

Степени с целыми показателями используются для записи больших и малых чисел в так называемом *стандартном виде*.

Стандартным видом числа называют его запись в виде произведения $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$ и n — целое число.

113. Запишите число в виде суммы разрядных слагаемых:

- а) 17,214; в) 0,3214; д) 0,03718;
б) 426,503; г) 0,15268; е) 0,002051.

Образец. $523,48 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}$.

114. Число представлено в виде суммы разрядных слагаемых. Запишите это число в десятичной форме:

- а) $2 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$;
б) $7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}$;
в) $5 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4}$;
г) $4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$.

115. Представьте члены последовательности в виде степеней с одним и тем же натуральным основанием. Запишите три следующих члена последовательности. Какое число будет стоять в этой последовательности на 100-м месте? На месте с номером n ?

- а) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$; в) $\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \dots$;
б) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots$; г) $3; 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \dots$.

116. Заполните таблицу:

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
2^x													
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$													

117. Представьте дробь в виде произведения:

- а) $\frac{a}{b^2}$; в) $\frac{1}{xz^3}$; д) $\frac{m^{-2}}{na^4}$; ж) $\frac{5}{y^n}$;
б) $\frac{x}{y}$; г) $\frac{2}{3c^2}$; е) $\frac{pq^2}{m+n}$; з) $\frac{a^k}{n^i}$.

118. Докажите, что:

- а) $\frac{1}{2^{-3}} = 2^3$; б) $\frac{1}{a^{-4}} = a^4$; в) $\frac{a}{b^{-2}} = ab^2$.

119. Запишите выражение, равное данному и не содержащее отрицательных показателей:

- а) $\frac{2}{3^{-17}}$; в) $\frac{m}{np^{-2}}$; д) $\frac{xy}{z^{-1}}$;
б) $\frac{a^{-2}}{b^{-3}}$; г) $\frac{ab}{(a+b)^{-2}}$; е) $\frac{z}{x^ny^{-k}}$.

120. Найдите значение выражения:

а) $\frac{2^{-3} \cdot 3}{4^{-1}}$; б) $\frac{5^2 \cdot 10^{-2}}{2^{-3}}$; в) $\frac{8^{-1}}{6^2 \cdot 4^{-3}}$; г) $\frac{8^{-2} \cdot 9^{-1}}{12^{-2}}$.

121. Запишите с помощью отрицательного показателя степени число, обратное данному:

Число	253	0,7	$\frac{4}{5}$	10^6	$2,1^{12}$
Обратное число					

122. Запишите без отрицательного показателя степени число, равное:

а) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; в) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$; г) $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{-1}$.

Представьте величины в десятичной записи (123—124):

123. а) Длина экватора Земли равна $4 \cdot 10^4$ км.
 б) Территория России составляет $1,27 \cdot 10^7$ км².
 в) По данным ООН, численность населения Европы в 2006 г. составила примерно $7,28 \cdot 10^8$ человек, а Азии — $3,9 \cdot 10^9$ человек.

124. а) Оптический микроскоп дает возможность различать объекты размерами до $2,5 \cdot 10^{-3}$ см.
 б) Диаметр молекулы воды равен $2,8 \cdot 10^{-7}$ мм.
 в) Радиус атома водорода равен $4,6 \cdot 10^{-8}$ мм.

Запишите в стандартном виде число (125—126):

125. а) 98 000; б) 156 000; в) 4 020 000; г) 23 000 000 000; д) 14,8; е) 506,37.

Образец. $54\,300 = 5,4300 \cdot 10\,000 = 5,43 \cdot 10^4$.

126. а) 0,0081; б) 0,00153; в) 0,0000033; г) 0,000000415; д) 0,000000028; е) 0,000403.

Образец. $0,045 = 4,5 : 100 = 4,5 \cdot 0,01 = 4,5 \cdot 10^{-2}$.

127. 1) Если число записано в стандартном виде $a \cdot 10^n$, то показатель степени n называют *порядком* числа.

Как вы понимаете выражение «одно число на порядок больше другого»? Приведите примеры.

2) Определите порядок числа:

- а) 25 670; б) 3 400 000; в) $560 \cdot 10^7$; г) $751 \cdot 10^6$.

128. Дополните запись, воспользовавшись образцом:

- а) 38 тыс. км = ... км; г) 19,8 тыс. т = ... т;
 б) 2167 тыс. т = ... т; д) 50,2 млн человек = ... человек;
 в) 11 850 млн р. = ... р.; е) 0,7 млн га = ... га.

Образец. 683 млн книг = $683 \cdot 10^6$ книг = $6,83 \cdot 10^8$ книг.

129. а) За первые два месяца 2007 г. в мире было продано примерно $1,02 \cdot 10^7$ компьютеров. Выразите это число в миллионах штук.
 б) Территория Антарктиды составляет $1,398 \cdot 10^7$ км². Сколько это тысяч квадратных километров?
130. В таблице приведены расстояния от планет Солнечной системы до Солнца:

Планета	Расстояние, км
Венера	$1,082 \cdot 10^8$
Земля	$1,495 \cdot 10^8$
Марс	$2,280 \cdot 10^8$
Меркурий	$5,790 \cdot 10^7$
Нептун	$4,497 \cdot 10^9$
Плутон	$5,947 \cdot 10^9$
Сатурн	$1,427 \cdot 10^9$
Уран	$2,871 \cdot 10^9$
Юпитер	$7,781 \cdot 10^8$

- 1) Какая из планет ближе всех к Солнцу? Какая из них дальше всех от Солнца?
- 2) Составьте новую таблицу, поместив в левом столбце планеты в порядке удаления их от Солнца, а в правом — расстояния до Солнца (в млн км).
- 3) Покажите на схеме (рис. 1.5) примерное положение каждой планеты.



Рис. 1.5

131. В прошлом году в России было отправлено $9,2 \cdot 10^7$ телеграмм, из них 0,5% — международные. Сколько международных телеграмм было отправлено в прошлом году?
132. При решении задачи считайте, что численность населения России примерно равна 140 млн человек (в вычислениях используйте калькулятор).
- а) За год в России было выпито 12 млрд чашек чая «Новый». Сколько это в среднем на человека?
- б) В прошлом году в России было издано 1,3 млрд экземпляров книг. Сколько книг издано в среднем на одного человека?
- в) Территория России составляет $1,7 \cdot 10^7$ км². Определите плотность населения в России (среднее число жителей на 1 км²).

Б

133. При каких значениях m верно равенство:
- а) $5^m = 625$; б) $2^m = \frac{1}{32}$; в) $3^{-m} = 27$; г) $\frac{1}{10^m} = 10\,000$?
134. Докажите, что:
- а) $\left(\frac{8}{9}\right)^{-5} = \left(\frac{9}{8}\right)^5$; б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-10} = \left(\frac{4}{3}\right)^{10}$; в) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.
135. Вычислите, пользуясь доказанным в предыдущем упражнении свойством:
- а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$; в) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$; д) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$; ж) $0,1^{-3}$;
- б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$; г) $\left(\frac{7}{8}\right)^{-2}$; е) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$; з) $0,5^{-2}$.
136. Расположите в порядке возрастания числа:
- а) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; $\frac{2}{3}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^4$; $\left(\frac{3}{2}\right)^0$;
- б) $(2,5)^{-3}$; 2,5; $(2,5)^{-5}$; $2,5^0$.
137. Расположите в порядке убывания числа:
- а) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-5}$; $\left(\frac{4}{9}\right)^6$; $\frac{4}{9}$; $\left(\frac{4}{9}\right)^0$;
- б) $(0,8)^{-8}$; $(0,8)^0$; 0,8; $(0,8)^{-6}$.
138. Сравните числа a^{-2} и a^{-3} (рис. 1.6, а, б).



Рис. 1.6

139. Найдите значение каждого из выражений x , $(x + 1)^{-1}$ и $(2x)^{-1}$, если известно, что:

а) $x^{-1} = 10$; б) $x^{-1} = 0,1$; в) $x^{-1} = 1$.

При решении задач 140—144 используйте калькулятор.

140. Считая, что средний радиус Земли равен $6,37 \cdot 10^3$ км, найдите:
а) площадь поверхности Земли, выразив ее в млн км²;
б) объем земного шара, выразив его в млрд км³.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулами площади поверхности сферы $S = 4\pi R^2$ и объема шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R — радиус шара и $\pi \approx 3,14$.

141. Расстояния от Солнца до Земли принимают за 1 астрономическую единицу (а. е.). Воспользовавшись данными таблицы в упражнении 130, выразите в астрономических единицах расстояния от Солнца до Меркурия, от Солнца до Марса, от Солнца до Юпитера, от Солнца до Нептуна.

142. Расстояние от Земли до ближайшей после Солнца звезды α Центавра равно $4,1 \cdot 10^{13}$ км. За какое время доходит до Земли свет от Солнца и от звезды α Центавра? (Скорость света 300 000 км/с.)

143. В 2007 г. одна из телефонных компаний России обеспечила $1,68 \cdot 10^9$ междугородных телефонных переговоров, причем $1,88 \cdot 10^8$ из них были международными. Сколько процентов всего количества междугородных телефонных разговоров составили международные?

144. В 2005 г. численность населения Земли составила 6,5 млрд человек. Примерная численность населения через x лет после 2005 г. или за x лет до этого времени (при небольших значениях x) может быть рассчитана по формуле

$$P = 6,5 \cdot 10^9 \cdot 1,012^x.$$

Запишите выражение для вычисления численности населения Земли и определите примерную численность населения:

а) в 2012 г.; б) в 2000 г.

У к а з а н и е. б) Подумайте, какой знак должен иметь показатель степени x в этом случае.

1.7

Свойства степени с целым показателем

Известные свойства степени с натуральным показателем распространяются и на степень с любым целым показателем. А именно:

Для любого $a \neq 0$ и любых целых m и n

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Для любых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любого целого n

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Рассмотрим для примера одно из свойств — *основное свойство степени*, которое выражается равенством

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Для случая, когда оба показателя положительны, т. е. являются числами натуральными, мы это свойство уже доказали. Чтобы показать, что оно справедливо при любых целых значениях m и n , нужно рассмотреть другие возможные варианты: оба показателя отрицательны; один отрицателен, а другой положителен; один из показателей равен 0. Не проводя доказательство в общем виде, ограничимся проверкой этого свойства на конкретных примерах.

Пусть $m = -5$ и $n = -3$, тогда

$$a^{-5} \cdot a^{-3} = \frac{1}{a^5} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^5 \cdot a^3} = \frac{1}{a^{5+3}} = a^{-(5+3)} = a^{(-5)+(-3)}.$$

Пусть $m = -4$ и $n = 6$, тогда

$$a^{-4} \cdot a^6 = \frac{1}{a^4} \cdot a^6 = \frac{a^6}{a^4} = a^{6-4} = a^{-4+6}.$$

Пусть $m = -8$ и $n = 0$, тогда

$$a^{-8} \cdot a^0 = a^{-8} \cdot 1 = a^{-8} = a^{-8+0}.$$

Так как свойства степени с целым показателем те же, что и свойства степени с натуральным показателем, то и действия над степенями с целыми показателями выполняются по тем же правилам.

Приведем примеры.

■ Пример 1.

$$x^{-6} \cdot x^{10} \cdot x^{-3} = x^{-6+10-3} = x^1 = x$$

(при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются).

■ Пример 2.

$$\frac{a^6}{a^8} = a^{6-8} = a^{-2}$$

(при делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя степени делимого вычитается показатель степени делителя).

■ Пример 3.

$$(y^{-3})^{-1} \cdot y^{-3} = y^3 y^{-3} = y^{3-3} = y^0 = 1$$

(чтобы возвести степень в степень, мы перемножили показатели степеней, а затем воспользовались правилом умножения степеней с одинаковыми основаниями).

Вернемся еще раз к определениям степени с целым отрицательным и нулевым показателями. Свойства степеней с натуральными показателями оказались справедливыми и для степеней с любыми целыми показателями в силу того, что были приняты именно такие определения.

В самом деле, когда мы рассматривали свойства степеней с натуральными показателями, равенство $a^m : a^n = a^{m-n}$ было получено при условии, что $m > n$. Распространяя это свойство на случай, когда $m = n$, получим $a^m : a^n = a^{m-n} = a^0$. С другой стороны, если $m = n$, то $a^m : a^n = 1$. Отсюда и ясна целесообразность принятого нами определения степени с нулевым показателем: $a^0 = 1$ при любом $a \neq 0$.

Аналогичными рассуждениями можно показать также и целесообразность определения степени с целым отрицательным показателем.

А

145. Представьте выражение в виде степени:

а) $b^{-3} \cdot b^{-7}$; в) $\frac{m^8}{m^{12}}$; д) $(y^{-4})^2$; ж) $x^{-7} \cdot y^{-7}$;

б) $x^{12} \cdot x^{-3} \cdot x^{-10}$; г) $a^{-4} : a^{-3}$; е) $(c^3)^{-5}$; з) $\frac{n^{-4}}{m^{-4}}$.

Найдите значение выражения (146—147):

146. а) $\frac{5^{-4}}{5^{-6}}$; б) $3^{-12} \cdot 3^{10}$; в) $(10^{-4})^{-1}$; г) $(8^{-5})^0$.

147. а) $\left(\frac{3}{7}\right)^3 \cdot 7^3$; б) $\frac{6^2}{24^2}$; в) $3^{-4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; г) $\frac{10^{-6}}{5^{-6}}$.

Упростите выражение (148—150):

148. а) $3x^{-3} \cdot 5x^{-5}$; в) $\frac{4a^{-2}}{6a^{-3}}$; д) $(2b^{-4})^3$;

б) $2m^{-6} \cdot 0,5m^{10}$; г) $\frac{12c^5}{15c^{-5}}$; е) $\left(\frac{1}{10}z^3\right)^{-2}$.

149. а) $x^{-2}y \cdot xy^{-2}$; в) $abc^{-1} \cdot ab^{-1}c^{-1}$; д) $\frac{pq^{-2}}{p^3q^3}$;
 б) $bx^{-3} \cdot b^{-1}x^5$; г) $\frac{m^{-2}n^5}{m^{-4}n^{-1}}$; е) $(a^{-3}b^2)^{-5}$.
150. а) $\frac{x^{-10}x^5}{x^6}$; г) $\left(\frac{y^4}{y^{-1}y^{-2}}\right)^4$; ж) $\left(\frac{n^4}{n^{-7}}\right)^{-2} \cdot n^{-5}$;
 б) $a^8(a^{-4})^3$; д) $\frac{(c^7c^{-2})^{-3}}{c^{-8}}$; з) $(2b^{-3} \cdot 5b^2)^{-2}$;
 в) $(m^{-3}m^8)^{-2}$; е) $(p^{-4})^2 \cdot (p^{-3})^{-2}$; и) $\left(\frac{3}{x^{-3}} \cdot \frac{x^3}{6}\right)^{-1}$.

Найдите значение выражения (151—152):

151. а) $\frac{5^{-10}}{5^{-3} \cdot 5^{-5}}$; в) $10^{-12} \cdot (10^{-5})^{-2}$; д) $\frac{(7^{-2})^3}{7^{-4}}$;
 б) $\frac{12^{-3} \cdot 12^{-7}}{12^{-9}}$; г) $(3^{-20} \cdot 3^{21})^{-3}$; е) $\frac{2^{-15}}{(2^5)^{-4}}$.
152. а) $125 \cdot 5^{-4}$; б) $100^3 \cdot 10^{-8}$; в) $16^{-2} : 2^{-5}$; г) $(27^2 \cdot 3^{-8})^{-1}$.
153. Представьте выражение в виде степени с основанием a и найдите его значение при заданном значении a :
- а) $\frac{a^{-3} \cdot a^{-7}}{a^6}$, $a = 10$; в) $a^{-14}(a^{-2})^{-5}$, $a = \frac{2}{3}$;
 б) $\frac{a^{18}}{a^{-10} \cdot a^{31}}$, $a = \frac{1}{5}$; г) $\frac{1}{a^{-10}} \cdot \frac{1}{a^{12}}$, $a = -4$.
154. (Задание с выбором ответа.) Найдите значение выражения $\frac{x^5 \cdot x^{-10}}{x^{-3}}$ при $x = 5$.

А. 25. Б. $-\frac{1}{25}$. В. -25. Г. $\frac{1}{25}$.

155. Выполните вычисления и результат представьте в десятичной записи:

- а) $(1,8 \cdot 10^3) \cdot (2 \cdot 10^4)$; д) $\frac{6,6 \cdot 10^5}{1,1 \cdot 10^7}$;
 б) $(2,1 \cdot 10^{-5}) \cdot (6 \cdot 10^7)$; е) $\frac{5,6 \cdot 10^{-2}}{7 \cdot 10^3}$;
 в) $(3 \cdot 10^6) \cdot (6,4 \cdot 10^{-10})$; ж) $\frac{6 \cdot 10^{-8}}{1,2 \cdot 10^{-4}}$;
 г) $(5 \cdot 10^{-3}) \cdot (3,2 \cdot 10^{-1})$; з) $\frac{1,9 \cdot 10^{-5}}{3,8 \cdot 10^{-3}}$.

156. Представьте в виде степени с основанием 2:

а) $4^x \cdot 4^y$; $8^x : 8^y$; $\left(\left(\frac{1}{4}\right)^x\right)^y$; б) $4^{-n} \cdot 4^{2n}$; $\frac{16^{8n}}{16^{2n}}$; $((0,25)^{-3})^n$.

157. Найдите значение выражения:

а) $3^{10} \cdot 81^3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{10}$; в) $\frac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 32^{-2}}$;

б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-25} \cdot 25^{-6} \cdot 125^{-4}$; г) $\frac{20^{-4} \cdot 15^{-3}}{30^{-7}}$.

158. Известно, что $2^n = a$. Выразите через a :

а) 2^{n+1} ; б) 2^{n+2} ; в) 2^{2n+1} ; г) 2^{n-1} .

Сократите дробь (159—161):

159. а) $\frac{5^{n+1} \cdot 3^{n-1}}{15^n}$; в) $\frac{12^n}{2^{2n+1} \cdot 3^{n-1}}$;

б) $\frac{14^n}{2^{n-2} \cdot 7^{n+2}}$; г) $\frac{2^{2n-1} \cdot 5^{2n+1}}{100^n}$.

160. а) $\frac{a^{-1} + a^{-2} + a^{-3}}{a^3 + a^2 + a}$; б) $\frac{1 + d^3 + d^5}{d^{-6} + d^{-3} + d^{-1}}$.

161. а) $\frac{2^n + 2^{n+2}}{10 \cdot 2^n}$; б) $\frac{10^{n+2} - 10^{n-2}}{10^n}$; в) $\frac{3^{n+1} - 3^{n-1}}{3^{n-2}}$.

162. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $(x^{-2} - y^{-2}) : (x^{-1} + y^{-1})$; в) $(a + b)^{-2} \cdot (a^{-2} - b^{-2})$;

б) $(m + n)^{-1} \cdot (m^{-1} + n^{-1})$; г) $(xy^{-1} - x^{-1}y) : (x - y)$.

163. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $8,7 \cdot 10^{-7}$; $65 \cdot 10^{-5}$; $0,12 \cdot 10^{-6}$; $940 \cdot 10^{-12}$;

б) $4,5 \cdot 10^{-15}$; $0,015 \cdot 10^{-18}$; $434 \cdot 10^{-13}$; $61 \cdot 10^{-13}$.

164. В таблице даны некоторые значения выражения x^n . Заполните таблицу, вписывая в свободные клетки произведения или частные содержащихся в ней чисел (например, так, как это сделано на пересечении строки 4 и столбца 6). Сравните свои результаты с результатами соседа по парте. (У вас могли получиться разные выражения.)

$x \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8	-5
2	4	8	16	32	64	128	256	
3	9	27	81					
4	16	64			256 · 16			
6	36							

1.8 Решение уравнений и задач

■ **Пример 1.** Решим уравнение $\frac{3x}{2} + \frac{8-4x}{7} = 3$.

Чтобы избавиться от дробей, входящих в уравнение, воспользуемся уже известным приемом: умножим обе части уравнения на наименьший общий знаменатель дробей, т. е. на число 14. Получим

$$\begin{aligned}
 14 \cdot \left(\frac{3x}{2} + \frac{8-4x}{7} \right) &= 14 \cdot 3, \\
 \frac{14 \cdot 3x}{2} + \frac{14(8-4x)}{7} &= 42, \\
 7 \cdot 3x + 2(8-4x) &= 42, \\
 21x + 16 - 8x &= 42, \\
 13x &= 26, \\
 x &= 2.
 \end{aligned}$$

■ **Пример 2.** Решим уравнение

$$0,09y + 0,12(10 - y) = 9.$$

Это уравнение внешне не похоже на предыдущее, однако оно содержит десятичные дроби и его легче решить, если воспользоваться тем же приемом.

Умножим обе части уравнения на 100:

$$\begin{aligned}
 100 \cdot 0,09y + 100 \cdot 0,12(10 - y) &= 100 \cdot 9, \\
 9y + 12(10 - y) &= 900, \\
 9y + 4(10 - y) &= 300, \\
 3y + 40 - 4y &= 300, \\
 -y &= 260, \\
 y &= -260.
 \end{aligned}$$

■ Пример 3. Сколько граммов воды надо добавить к 50 г раствора, содержащего 8% соли, чтобы получить 5%-ный раствор?

Составим уравнение по условию данной задачи.

Пусть x г — количество воды, которое надо добавить. Так как исходное количество раствора — 50 г, то новое количество раствора — $(50 + x)$ г.

Количество соли в исходном растворе составляет 8% от 50 г, т. е. $0,08 \cdot 50$ г.

Количество соли в новом растворе составляет 5% от $(50 + x)$ г, т. е. $0,05 \cdot (50 + x)$ г.

Так как количество соли от добавления воды не изменилось, то оно одинаково в исходном и новом растворах. Поэтому можно записать равенство

$$0,08 \cdot 50 = 0,05 \cdot (50 + x).$$

Решим составленное уравнение. Умножим обе его части на 100:

$$100 \cdot 0,08 \cdot 50 = 100 \cdot 0,05 \cdot (50 + x),$$

$$8 \cdot 50 = 5 \cdot (50 + x),$$

$$8 \cdot 10 = 50 + x,$$

$$x = 30.$$

О т в е т. Надо добавить 30 г воды.

Задача, которую мы решили, — это так называемая задача на концентрацию. Концентрацией раствора называют отношение массы содержащегося в нем сухого вещества к массе раствора, выраженное в процентах. С процентами приходится иметь дело и при решении многих других задач, например задач на вычисление прибыли с банковских вкладов, дохода от инвестиций, на расчет объемов выполненных работ. Все такие задачи нетрудно решить, если вы умеете выражать проценты обыкновенной или десятичной дробью и решать главную задачу на проценты — находить процент от заданной величины.

А

Решите уравнение (165—168):

165. а) $\frac{x-2}{15} = \frac{1}{3};$

в) $\frac{x-8}{5} = \frac{x+4}{2};$

д) $\frac{x+5}{2} = \frac{9}{4};$

б) $\frac{3x-2}{2} = 5;$

г) $\frac{3x-1}{6} = \frac{2+x}{3};$

е) $\frac{2x-7}{2} = \frac{2x+7}{3}.$

166. а) $\frac{x+5}{2} - \frac{x}{3} = 8;$

в) $\frac{1-x}{7} = 1 - \frac{2-x}{3};$

б) $\frac{x}{5} - \frac{x-1}{3} = 3;$

г) $\frac{2x-1}{3} - 3 = \frac{x}{4}.$

167. а) $\frac{x}{3} - 2 = x$; в) $4 - x = \frac{x+5}{8}$;

б) $x - \frac{3-4x}{2} = 3$; г) $\frac{1-4x}{9} - 5 = 2x$.

168. а) $0,26x - 0,05(x - 3) = 0,06x$;

б) $0,12 + 0,76x = 0,66(x + 1)$;

в) $0,06(x - 3) + 0,005(x - 4) = -0,005$;

г) $0,005(x + 2) = 0,007x + 0,001(x - 5)$.

Составьте уравнение по условию задачи, обозначив буквой величину, о которой спрашивается, и решите задачу. Затем составьте какое-нибудь другое уравнение (169—173):

169. Отдел имеет премиальный фонд, и к концу квартала каждому сотруднику планировалось выдать премию в размере 500 р. Но 2 сотрудника ушли из отдела, поэтому каждый получил по 700 р. Сколько рублей было в премиальном фонде?

170. Сергей ходит от дома до стадиона пешком со скоростью 4 км/ч. Однажды он отправился из дома в обычное время, но поехал на велосипеде со скоростью 12 км/ч. На стадион он приехал на 15 мин раньше обычного. Чему равно расстояние от дома до стадиона?



171. Таня вышла из дома и направилась к бассейну со скоростью 50 м/мин. Через 4 мин из этого же дома вышел Андрей и пошел к бассейну со скоростью 60 м/мин вслед за Таней. Найдите расстояние от дома до бассейна, если они пришли туда одновременно.

172. Расстояние между пунктами А и В равно 30 км. Из А в направлении В выехал мотоциклист со скоростью 40 км/ч. Одновременно из В в том же направлении выехал велосипедист со скоростью 10 км/ч. На каком расстоянии от пункта В мотоциклист догонит велосипедиста?

173. Из А в В выехал автобус со скоростью 40 км/ч. Через 4 ч из В в А выехал автомобиль со скоростью 60 км/ч. Расстояние от А до В равно 250 км. На каком расстоянии от А автомобиль и автобус встретились?

174. Разберите, как по условию задачи составлено уравнение, и решите задачу:

Клиент открыл счет в банке на некоторую сумму денег. Годовой доход по этому вкладу составляет 11%. Если бы он добавил

800 р., то через год получил бы доход 220 р. Какая сумма была внесена им в банк?

1) x р. — сумма, которую клиент внес в банк.

2) $(x + 800)$ р. — такая сумма была бы на вкладе, если бы он добавил 800 р.

3) $0,11(x + 800)$ р. — доход в 11%, который мог бы получить клиент с этой суммы.

Так как доход равен 220 р., то имеем равенство

$$0,11(x + 800) = 220.$$

175. Получив премию, сотрудник фирмы решил положить ее на счет в банк. Он может открыть счет с годовым доходом 8%. Если бы банк выплачивал 11% годовых, то для получения такого же дохода потребовалось бы на 900 р. меньше. Определите, сколько рублей составляла премия.

5

Решите уравнение (176—177):

176. а) $\frac{3x+4}{5} + 2x = \frac{22-x}{5} + 16$; в) $2x + \frac{2x-1}{2} - 1 = \frac{5x-2}{3}$;
б) $\frac{3x-5}{2} - \frac{2x-3}{3} = 4 - x$; г) $\frac{x-6}{4} - \frac{2x-1}{6} = 2 + 2x$.
177. а) $\frac{x-1}{2} - \frac{2x+1}{3} + \frac{x+2}{3} = 1$; в) $x + \frac{x-10}{2} + \frac{x-9}{5} = \frac{2x-3}{5} - 1$;
б) $\frac{x-2}{3} + \frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{6} = 0$; г) $\frac{1-2x}{3} - \frac{5-3x}{6} + \frac{1-3x}{2} = x + 4$.

Решите задачу (178—185):

178. Туристы отправляются на лодке вверх по реке на рыбалку и должны вернуться на базу через 4 ч. Скорость лодки в стоячей воде 8 км/ч, скорость течения реки 2 км/ч. Они планируют провести на рыбалке 3 ч. На какое максимальное расстояние они могут отплыть от базы?
179. Два велосипедиста одновременно выехали с базы на велотрек, куда им надо прибыть к определенному времени. Первый ехал со скоростью 15 км/ч и успел приехать за 5 мин до назначенного времени. Второй ехал со скоростью 12 км/ч и опоздал на 4 мин. На каком расстоянии от велотрека находится база?
180. Коллектив предприятия получил землю для садовых участков. Эту землю решили распределить между сотрудниками поровну, и каждому полагалось по 7 соток. Но выделенную землю удалось увеличить на 20 соток, кроме того, 10 сотрудников

отказались от садовых участков, поэтому каждый получил по 10 соток. Сколько земли оказалось в распоряжении предприятия?

181. Лена набирала на компьютере рукопись книги. Ей надо было набирать по 10 страниц в день, чтобы успеть выполнить работу к сроку. Она же набирала ежедневно на 1 страницу больше, поэтому за 2 дня до срока ей осталось набрать 6 страниц. Сколько страниц было в рукописи?



182. Андрей, развивая выносливость в беге, сначала бежал 40 мин по проселочной дороге, а затем по лесной тропе. И хотя путь по тропе оказался на 2 км короче, он затратил на него на 5 мин больше, так как уменьшил скорость на 4 км/ч. Какое расстояние пробежал Андрей?

183. Сколько граммов воды надо добавить к 80 г раствора, содержащего 15% соли, чтобы получить 12%-ный раствор?

184. Сколько граммов 25%-ного сахарного сиропа надо добавить к 200 г воды, чтобы концентрация сахара в полученном растворе была 5%?

185. Сколько граммов воды надо выпарить из 80 г 6%-ного раствора соли, чтобы получить раствор, содержащий 10% соли?

186. Разберите, как составлено уравнение по условию задачи, и доведите решение до конца:

Сколько граммов 75%-ного раствора кислоты надо добавить к 30 г 15%-ного раствора этой же кислоты, чтобы получить 50%-ный раствор?

1) x г — количество 75%-ного раствора кислоты, которое надо добавить;

2) $(30 + x)$ г — масса получившегося 50%-ного раствора кислоты;

3) $0,75x$ г — количество кислоты в x г 75%-ного раствора;

4) $0,15 \cdot 30$ г — количество кислоты в 30 г 15%-ного раствора;

5) $0,5(30 + x)$ г — количество кислоты в 50%-ном растворе.

Имеем уравнение:

кол-во кислоты в 75%-ном растворе	+	кол-во кислоты в 15%-ном растворе	=	кол-во кислоты в 50%-ном растворе
$0,75x$	+	$0,15 \cdot 30$	=	$0,5(30 + x)$

Решите задачу (187—189):

187. Сколько граммов 30%-ного раствора соли надо добавить к 80 г 12%-ного раствора этой же соли, чтобы получить 20%-ный раствор соли?
188. Два слитка, один из которых содержит 35% серебра, а другой — 65%, сплавляют и получают слиток массой 20 г, содержащий 47% серебра. Чему равна масса каждого из этих слитков?
189. Инвестиционный фонд вложил деньги в два предприятия, приносящие годовой доход в 12% и 15%. В первое он внес на 300 тыс. р. больше, чем во второе, и получил в нем за год на 6 тыс. р. больше. Сколько рублей внес инвестиционный фонд в каждое из этих предприятий?

1.9

Сокращение дробей

(Для тех, кому интересно)

Математика, как вы уже много раз слышали, создавалась для решения практических задач. В то же время за многие века математика стала вполне самостоятельной наукой в том смысле, что внутри ее накопились задачи, представляющие интерес, прежде всего для ее собственного развития, для ученых-математиков. Такие задачи иногда совершенно не связаны с практикой, однако история математики знает примеры, когда создание математической теории, внешне очень далекой от практики, приводило впоследствии к решению важных проблем практики и других наук, оказывала влияние на мировоззрение человека.

Выбирая для решения ту или иную задачу, математики часто исходят прежде всего из того, насколько эта задача им интересна. Такие задачи в определенном смысле можно считать просто головоломками, однако их решение, сам процесс преодоления трудностей не только может доставлять удовольствие, но и является своего рода тренировкой интеллекта.

Здесь мы рассмотрим задачи, связанные с сокращением дробей. Такими задачами математики «развлекаются» не менее двух с половиной тысяч лет.

■ **Задача 1.** При каких целых n значение дроби $\frac{2n^2 + n - 9}{n + 3}$ является числом целым?

Данная дробь «неправильная» в том смысле, что степень многочлена в ее числителе выше степени многочлена в знаменателе. Поэтому сначала выделим целую часть дроби, а для этого разделим

уголком ее числитель на знаменатель так, как мы это делали для числовых дробей:

$$\begin{array}{r} 2n^2 + n - 9 \quad | \quad n + 3 \\ - 2n^2 + 6n \quad 2n - 5 \\ \hline -5n - 9 \\ - -5n - 15 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\frac{2n^2 + n - 9}{n + 3} = (2n - 5) + \frac{6}{n + 3}$$

$$\begin{array}{r} 173 \quad | \quad 14 \\ - 14 \quad 12 \\ \hline 33 \\ - 28 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\frac{173}{14} = 12 + \frac{5}{14} = 12 \frac{5}{14}$$

Теперь дробь $\frac{2n^2 + n - 9}{n + 3}$ записана в виде суммы многочлена $2n - 5$ и дроби $\frac{6}{n + 3}$. Значение многочлена $2n - 5$ при любом целом n есть число целое. Следовательно, надо выяснить, при каких целых n будет целым числом значение дроби $\frac{6}{n + 3}$. Для этого будем просто перебирать все делители числа 6 и вычислять соответствующие значения переменной n . При этом решение удобно оформить в виде таблицы:

$n + 3$	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
n	-2	-1	0	3	-4	-5	-6	-9

Ответ. Значение дроби $\frac{2n^2 + n - 9}{n + 3}$ является целым числом при $n = 3; 0; -1; -2; -4; -5; -6; -9$.

■ **Задача 2.** При каких натуральных значениях n дробь $\frac{3}{n + 1}$ можно сократить?

Так как число 3 простое, то дробь можно будет сократить лишь в том случае, если в знаменателе окажется число, кратное 3. А для того чтобы число $n + 1$ делилось на 3, необходимо, чтобы число n при делении на 3 давало остаток, равный 2, т. е. n может принимать значения 2, 5, 8, 11 и т. д. Все множество значений n можно описать формулой $n = 3k - 1$, где k — натуральное число.

Ответ. При $n = 3k - 1$, где k — натуральное число.

Для решения следующей задачи потребуются такая теорема: *общие делители чисел $a - b$ и b те же самые, что у чисел a и b .*

■ **Задача 3.** При каких натуральных значениях n дробь $\frac{3n + 1}{2n - 1}$ можно сократить?

Общие делители чисел $3n + 1$ и $2n - 1$ те же самые, что и у чисел $(3n + 1) - (2n - 1) = n + 2$ и $2n - 1$. А общие делители чисел $2n - 1$ и $n + 2$ такие же, как у чисел $(2n - 1) - (n + 2) = n - 3$ и $n + 2$. А у этих чисел общие делители такие же, как у чисел $(n + 2) - (n - 3) = 5$ и $n + 2$.

Таким образом, мы ищем натуральные числа, являющиеся общими делителями чисел 5 и $n + 2$. Так как число 5 простое, то их общим делителем, отличным от 1, может быть только 5. Следовательно, нужно найти натуральные значения n , при которых $n + 2$ делится на 5. А для этого нужно, чтобы при делении на 5 число n давало остаток 3. Это условие выполняется при $n = 5k + 3$, где $k = 0; 1; 2; 3; \dots$.

Ответ. При $n = 5k + 3$, где $k = 0; 1; 2; 3; \dots$.

■ Задача 4. При каких натуральных значениях n дробь $\frac{4n-3}{6}$ можно сократить?

При решении задач такого типа применяется следующий прием: так как речь идет о делении на 6, то число n записывают в виде $6k + r$, где r — остаток от деления n на 6, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Выполнив подстановку $n = 6k + r$, получим

$$\frac{4(6k+r)-3}{6} = \frac{24k+4r-3}{6} = 4k + \frac{4r-3}{6}.$$

Следовательно, данная дробь будет сократимой, если сократима дробь $\frac{4r-3}{6}$.

Казалось бы, мы пришли к тому же, с чего начали: полученная дробь имеет такой же вид, что и данная, только вместо переменной n в ней стоит r . Но это различие принципиально: переменная n пробегает бесконечное множество значений — множество целых чисел, тогда как r как остаток от деления на 6 принимает лишь 6 значений: 0; 1; 2; 3; 4; 5.

А эти значения легко перебрать, ведя для удобства запись в виде таблицы:

r	0	1	2	3	4	5
$4r-3$	-3	1	5	9	13	17
Общие делители $4r-3$ и 6	есть	нет	нет	есть	нет	нет

Из этой таблицы видно, что общие делители есть при $r = 0$ или при $r = 3$, т. е. при $n = 6k$ и при $n = 6k + 3$, где k — любое натуральное число или 0.

190. Выполнив деление уголком, представьте данную дробь в виде суммы многочлена и «правильной» дроби:

а) $\frac{3n^2 - 10n - 3}{n - 4}$; б) $\frac{n^3 + n^2 - n + 5}{n + 2}$.

191. При каких целых n значение дроби является числом целым:

а) $\frac{10}{n + 5}$; б) $\frac{15}{2n + 1}$; в) $\frac{20}{3n - 4}$?

192. Существуют ли такие значения n , при которых значение дроби $\frac{8}{2n + 1}$ является числом целым?

193. Найдите все целые значения n , при которых значение дроби есть число целое:

а) $\frac{2n^2 + 7n + 3}{2n - 1}$; б) $\frac{2n^3 + n^2 - 3n - 4}{n - 2}$.

194. При каких натуральных значениях n можно сократить дробь:

а) $\frac{5}{n + 3}$; б) $\frac{7}{n + 2}$; в) $\frac{n + 1}{10}$?

195. Докажите:

если каждое из чисел a и b делится на число c , то и их разность $a - b$ делится на c ;

если каждое из чисел $a - b$ и b делится на число c , то и число a делится на c .

Теперь у вас доказана теорема: числа $a - b$ и b имеют те же общие делители, что и числа a и b .

196. При каких натуральных значениях n можно сократить дробь:

а) $\frac{2n + 1}{n - 1}$; б) $\frac{4n + 3}{3n - 1}$?

197. При каких натуральных значениях n можно сократить дробь:

а) $\frac{3n + 1}{10}$; б) $\frac{5n + 3}{4}$; в) $\frac{4n + 2}{5}$?

Алгебраические дроби

198. Найдите значение дроби при заданных значениях переменных:

а) $\frac{cxy}{c(x-y)}$ при $c = 1,5$, $x = 10$ и $y = -2$;

б) $\frac{x(a-b)}{a^2b}$ при $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{3}{4}$ и $x = \frac{1}{2}$.

199. Найдите значение выражения, если $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $x = 10$, $y = 0$, $z = \frac{1}{2}$:

а) $\frac{a(bc^2 - xz)}{b}$; в) $\frac{(a-x)(b-y)(c-z)}{a^2 + b^2}$;

б) $\frac{ab - bc - ax + ay}{a + b + c}$; г) $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(a-b)(b-c)}$.

200. Найдите значение дроби при заданных значениях переменной:

а) $\frac{x^2 - 25}{2x}$ при $x = -5$, при $x = 5$;

б) $\frac{y(y+6)}{y-4}$ при $y = 0$, при $y = -6$.

201. Найдите значения переменной, при которых значение дроби равно нулю:

а) $\frac{5a-4}{a+1}$; б) $\frac{2m^2}{m-2}$; в) $\frac{(n-6)(2n+10)}{6n^2}$; г) $\frac{b(b+2)(3b-6)}{b-10}$.

202. Приведите дробь $\frac{a}{a^2 - b^2}$ к знаменателю:

а) $(a-b)(a+b)^2$; б) $(a-b)^2(a+b)$; в) $(a-b)^3(a+b)$.

203. Замените выражение равным выражением так, чтобы перед дробью не было знака «минус». Выполните задание разными способами:

а) $-\frac{(a-b)(a-c)}{b-c}$; б) $-\frac{(x+y)(y-z)}{2(x-z)(x-y)}$.

204. Сократите дробь:

а) $\frac{x^2 - y^2 + ax + ay}{a^2 + xy + ax - y^2}$; в) $\frac{y^4 - 2y^2 + 1}{y^3 - y^2 - y + 1}$; д) $\frac{x^4 - y^4}{x^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + y^4}$;

б) $\frac{m^3 + m^2 - m - 1}{m^3 - m^2 - m + 1}$; г) $\frac{p^3 + pq^2 - 2p^2q}{p^3 - pq^2}$; е) $\frac{x^4 - y^4}{x^3 + xy^2 - x^2y - y^3}$.

Упростите выражение (205—207):

$$205. \text{ а) } \frac{a^2+b^2}{a^3-b^3} - \frac{2}{3a-3b}; \quad \text{ б) } \frac{2m^2}{m^3+n^3} - \frac{m-n}{m^2-mn+n^2}.$$

$$206. \text{ а) } \frac{8}{(x^2-2)^3} + \frac{8}{(2-x^2)^2} - \frac{2}{2-x^2}; \quad \text{ в) } \frac{a^2-9}{a-1} \cdot \frac{a-a^4}{3+a} \cdot \frac{1}{(3a-a^3)^2};$$

$$\text{ б) } \frac{a-c}{a^2+ac+c^2} - \frac{2}{c-a} - \frac{3c^2}{a^3-c^3}; \quad \text{ г) } \frac{a^4-b^4}{a^2+ab+b^2} \cdot \frac{1}{(b-a)^3} \cdot \frac{a^2+b^2}{a^3-b^3}.$$

$$207. \text{ а) } \frac{3a+b}{a+b} + \frac{a^2-2ab+b^2}{a} \cdot \left(\frac{a}{(a-b)^2} + \frac{a}{b^2-a^2} \right);$$

$$\text{ б) } \frac{1-2b^2-2ab}{b^2-a^2} + \left(\frac{a^2+ab+b^2}{a^3+b^3} - \frac{b^3-a^3}{a^2-ab+b^2} \right) \cdot \frac{a^2-ab+b^2}{a^3-b^3}.$$

У к а з а н и е. Сначала раскройте скобки, применив распределительное свойство, тогда преобразования окажутся проще.

208. Докажите, что:

$$\text{ а) } \frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{a+3b}{ab+b^2} + \frac{a+b}{ab} = 0;$$

$$\text{ б) } \frac{b}{a^2-ab} - \frac{a}{ab-b^2} + \frac{a+b}{ab} = 0.$$

209. Докажите, что:

$$\text{ а) } 1 + \frac{1}{a} + \frac{1+a}{ab} + \frac{(1+a)(1+b)}{abc} + \frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{abcd} = \frac{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}{abcd};$$

$$\text{ б) } \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} = \frac{8}{1-a^8};$$

$$\text{ в) } \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

У к а з а н и е. Найдите сумму первых двух слагаемых, прибавьте к ней третье слагаемое и т. д.

210. Упростите выражение:

$$\text{ а) } \frac{u - \frac{u^2}{u+1}}{u - \frac{u}{u+1}}; \quad \text{ в) } \frac{\frac{a-b}{a+b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{a+b} + \frac{a-b}{a}}; \quad \text{ д) } 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{n-3}};$$

$$\text{ б) } \frac{x - \frac{6x-9}{x}}{\frac{3}{x} - 1}; \quad \text{ г) } \frac{\frac{x}{x-z} - \frac{y}{y-z}}{\frac{y}{x-z} - \frac{x}{y-z}}; \quad \text{ е) } \frac{n}{n - \frac{1}{1 - \frac{n}{1+n}}}.$$

У к а з а н и е. а) Можно воспользоваться основным свойством дроби: умножить числитель и знаменатель данной дроби на $u+1$.

211. Упростите выражение:

а) $\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) : \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)$;

б) $\left(\frac{u}{v-z} + \frac{v-z}{v} - \frac{uz}{v^2-vz}\right) : \left(\frac{u}{v-z} - \frac{v-z}{v} - \frac{uz}{v^2-vz}\right)$.

У к а з а н и е. Запишите частное в виде дроби и затем воспользуйтесь основным свойством дроби.

212. а) Дано: $x - \frac{x}{x+1} = y$. Выразите $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2}$ через y .

б) Дано: $x + \frac{x}{x-1} = y$. Выразите $x^2 + \frac{x^2}{(x-1)^2}$ через y .

Степень с дробным показателем

213. Сравните числа a^{-1} и b^{-1} , если известно, что:

а) $a > 0$, $b > 0$, $a > b$; б) $a < 0$, $b < 0$, $a > b$.

214. Сравните числа a^{-1} и a^{-2} , если известно, что:

а) $0 < a < 1$; б) $a > 1$; в) $-1 < a < 0$; г) $a < -1$.

Упростите выражение (215—216):

215. а) $-\frac{1}{2}a^2b^3 \cdot \frac{3}{2}a^{-2}b^{-3}$; в) $(2m^{-3}n)^{-2} \cdot 8m^{-5}n$;

б) $10x^{-1}y^{-10} \cdot 0,05x^3y^{-10}$; г) $3p^4q^{-3} \cdot (3pq^{-3})^{-1}$.

216. а) $\frac{2x^{-12}y^{12}}{5} \cdot \frac{10x^{13}}{y^{-12}}$; в) $\frac{11a^{-4}}{b^4} \cdot \frac{b^{12}}{22a^8}$;

б) $\frac{12m^6}{n^{-6}} \cdot \frac{3m^{-3}n^{-5}}{4}$; г) $\frac{8p^{-8}}{q^{-10}} \cdot \frac{q^{-8}}{16q^{-9}}$.

Уравнения и задачи

217. Решите уравнение:

а) $\frac{5x-2}{3} - \frac{4x-3}{5} = 6$; в) $0,03x - 1 = 0,02(2x + 5)$;

б) $\frac{2x-4}{3} + x = 7$; г) $0,7(x - 1) - 0,8(x + 3) = 0,1(x - 5)$.

218. Чтобы приехать на станцию вовремя, Иван должен ехать на велосипеде со скоростью 15 км/ч. Если же он пойдет пешком со скоростью 5 км/ч, то опоздает на 1 ч. Какое расстояние должен проехать Иван?

219. Моторная лодка прошла по течению реки от одной деревни до другой. На обратном пути она сделала остановку, не дойдя до места отправления 12 км. До остановки она двигалась столько же времени, сколько у нее занял путь по течению. Чему равно расстояние между деревнями, если известно, что собственная скорость лодки 12 км/ч, а скорость течения реки 3 км/ч?
220. Курьер доехал до места назначения на велосипеде со скоростью 18 км/ч, а обратно возвратился другой дорогой, которая была короче первой на 3 км. Обратно он ехал со скоростью 9 км/ч, и на весь путь у него ушло 3 ч. Найдите весь путь, который проделал курьер.
221. Из города в поселок можно добраться по шоссе на автомобиле или по реке на катере. Путь по шоссе на 8 км короче, чем по реке. Автомобиль доезжает до поселка за 20 мин, а катер проходит расстояние от города до поселка за 1 ч 20 мин. Скорость автомобиля на 39 км/ч больше скорости катера. Определите расстояние от города до поселка по шоссе и по реке.
222. Сколько граммов воды надо добавить к 180 г сиропа, концентрация сахара в котором 25%, чтобы получить сироп с концентрацией сахара 20%?
223. Клиент внес в банк 8000 р. Часть этих денег он положил на вклад, по которому начисляется 8% годовых, а остальные — на вклад, по которому начисляется в год 6%. Через год он получил с этих двух вкладов прибыль в 580 р. Сколько рублей он внес на каждый вклад?
224. Клиент имел в банке счет, по которому начислялось 6% годовых. После того как банк предложил новые виды вкладов, он снял с этого счета все деньги. Из них 2000 р. он положил на вклад, по которому начисляется 8% годовых, а остальные деньги — на вклад с 9% годовых. В результате через год его доход оказался на 130 р. больше, чем он был бы по прежнему вкладу. Сколько всего денег внес клиент на новые вклады?



Вопросы для повторения к главе 1

1. Укажите числа, которые не входят в множество допустимых значений переменной дроби: а) $\frac{2x-3}{x+8}$; б) $\frac{a-1}{a^2}$. Какие числа нельзя подставлять вместо букв в алгебраическую дробь?
2. Сформулируйте основное свойство дроби. Примените его для приведения дроби $\frac{a}{a+b}$ к знаменателю $ab + b^2$.
3. Объясните, как сократить дробь $\frac{m-mn}{m^2-mn}$.

4. Прочитайте словами свойства, которые в буквенном виде записываются так:

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{a}{-b} = -\frac{-a}{b}.$$

Примените их к дроби $\frac{a-2}{b-1}$.

5. Объясните, как сократить дробь $\frac{3y-3x}{x^2-y^2}$.
6. Сформулируйте правила сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.
7. Объясните на примере выражения $\frac{x+m}{xm} + \frac{y-m}{ym}$, как выполняют сложение дробей с разными знаменателями.
8. Сформулируйте и запишите в буквенном виде правило умножения дробей. Примените его к произведению

$$\frac{x-y}{2x} \cdot \frac{2x^2}{x^2-y^2}.$$

9. Сформулируйте и запишите в буквенном виде правило деления дробей. Примените его к частному

$$\frac{n}{m^2+mn} : \frac{n^2}{m^2-n^2}.$$

10. Дайте определение степени с целым отрицательным показателем. Приведите примеры.
11. Дайте определение степени с нулевым показателем. Приведите примеры.
12. Запишите с помощью букв свойства степени с целым показателем.



Задания для самопроверки к главе 1

(Обязательные результаты обучения)

1. Найдите значение дроби при указанных значениях переменных:
- а) $\frac{ab}{a-b}$ при $a = 0,5$, $b = 2$; б) $\frac{x^2-y^2}{x}$ при $x = -10$, $y = -1$.
2. Укажите допустимые значения переменной для дроби:
- а) $\frac{m}{2m-5}$; б) $\frac{x-3}{x^2}$; в) $\frac{n^2-1}{10}$.
3. Выразите из физической формулы $\alpha = (n-1)\Theta$:
- а) переменную Θ ; б) переменную n .

4. Сократите дробь:

а) $\frac{16x^3y}{20x^2y^2}$; в) $\frac{m^2-n^2}{mn+n^2}$; д) $\frac{z-1}{a-az}$.

б) $\frac{a^2-ab}{a^2}$; г) $\frac{c^2+c}{c^2-c}$;

5. Выполните действия:

а) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{x-1}$; б) $\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{2ab}{a+b}$.

6. Выполните действия:

а) $\frac{1}{2a} - \frac{1}{3a}$; в) $\frac{4x}{x^2-y^2} - \frac{4}{x+y}$;

б) $\frac{m}{m-n} + \frac{m}{m+n}$; г) $\frac{5a}{a-5} + \frac{25}{5-a}$.

7. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\frac{3b}{a-b} + 3$; б) $2c - \frac{bc-6}{b}$.

8. Выполните умножение:

а) $\frac{x^2y}{2z} \cdot \frac{z^2}{2xy}$; б) $\frac{4b}{a^2-b^2} \cdot \frac{a+b}{2b}$; в) $2ac \cdot \frac{3c}{4a^2}$.

9. Выполните деление:

а) $\frac{m+1}{m} : \frac{3m+3}{m}$; б) $\frac{x^2-xy}{y} : (x-y)$.

10. Упростите выражение:

а) $\frac{10}{a^2-4} - \frac{3}{a-2} + \frac{4}{a+2}$; в) $\frac{2c}{c-3} - \frac{c^2+c}{4} : \frac{c+1}{8}$.

б) $\left(\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b} \right) \cdot \frac{a-b}{ab}$;

11. Выразите из формулы $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$:

а) переменную a ; б) переменную c .

12. Вычислите: а) 8^{-2} ; б) $\left(\frac{2}{3} \right)^{-3}$.

13. Представьте выражение в виде степени: $a^{-2} \cdot a^6$; $\frac{x^3}{x^5}$; $(c^{10})^{-3}$.

14. Упростите выражение:

а) $\frac{a^{-12} \cdot a^6}{a^7}$; б) $\frac{(3x^{-2})^{-3}}{3^{-2} \cdot x^{-1}}$.

15. Запишите в стандартном виде число:

а) 1 280 000; б) 0,0000071.

16. Сравните:

а) $\frac{1,8 \cdot 10^9}{9 \cdot 10^{11}}$ и 0,005; б) $(1,4 \cdot 10^{-10})(2 \cdot 10^7)$ и 0,003.

17. Решите уравнение $\frac{x}{3} - \frac{2x-1}{4} = 1$

18. Турист вышел с турбазы и направился к железнодорожной станции со скоростью 4 км/ч. Через час с турбазы к станции пошел второй турист со скоростью 5 км/ч. На станцию они пришли одновременно. Чему равно расстояние от турбазы до станции?



Тест к главе 1

1. Найдите значение дроби $\frac{ab}{a-b}$ при $a = -1$, $b = 0,5$.

А. $-\frac{1}{3}$. Б. $\frac{1}{3}$. В. -1 . Г. 1 .

2. Для каждой дроби укажите множество допустимых значений переменной.

1) $\frac{x-3}{x-2}$; 2) $\frac{x+3}{x+2}$; 3) $\frac{x-2}{x+3}$; 4) $\frac{x+2}{x-3}$.

а) $x \neq -3$; б) $x \neq -2$; в) $x \neq 2$; г) $x \neq 3$.

Ответ. 1) _____; 2) _____; 3) _____; 4) _____

3. Сократите дробь $\frac{a^2b-ab}{a^2b+ab^2}$

А. $-\frac{1}{b}$. Б. $\frac{a-1}{a+b}$. В. $\frac{a-b}{a+b}$. Г. $-\frac{1}{b}$.

4. Сократите дробь $\frac{a^2-x^2}{ax-x^2}$.

Ответ. _____

5. Укажите выражение, равное дроби $\frac{a-b}{a-c}$.

А. $\frac{b-a}{a-c}$. Б. $\frac{a-b}{c-a}$. В. $-\frac{b-a}{c-a}$. Г. $\frac{b-a}{c-a}$.

6. Найдите сумму дробей $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3}$.

Ответ. _____

7. Представьте в виде дроби выражение $\frac{2m^2}{m+1} - 2m$.

А. $-\frac{2m^2}{m+1}$. Б. $\frac{2m^2}{1-m}$. В. $-\frac{2m}{m+1}$. Г. $\frac{2m^2-2m}{m+1}$.

8. Выполните деление: $\frac{x^2 - y^2}{2x^2} : \frac{xy - y^2}{x}$.

Ответ. _____

9. Упростите выражение $\left(\frac{a}{a-b} - 1\right) : \left(\frac{a}{a+b} - 1\right)$.

Ответ. _____

10. Какое из выражений равно степени 5^{-n} ?

А. $-\frac{1}{5^n}$ Б. $\frac{1}{5^n}$ В. -5^{-n} Г. $-\frac{1}{5^{-n}}$.

11. На координатной прямой точкой отмечено число a . Сравните числа a и a^{-1} .



А. $a < a^{-1}$. Б. $a > a^{-1}$. В. $a = a^{-1}$. Г. Невозможно сравнить.

12. Миллиардные доли единиц обозначаются приставкой «нано-». Например, 1 нанометр = 10^{-9} м. Выразите эту величину в мм.

А. 10^{-3} мм. Б. 10^{-7} мм. В. 10^{-6} мм. Г. 10^{-12} мм.

13. Укажите наименьшее из чисел.

А. $1,2 \cdot 10^{-8}$. Б. $5,6 \cdot 10^{-8}$. В. $1,2 \cdot 10^{-9}$. Г. $5,6 \cdot 10^{-9}$.

14. Сократите дробь $\frac{2^n + 2^{n-2}}{2^{n-4}}$.

А. 4. Б. 20. В. 24. Г. 80.

15. Решите уравнение $\frac{x-1}{2} - \frac{x}{5} = \frac{1}{2}$.

А. $x = 0,3$. Б. $x = \frac{2}{3}$. В. $x = 1\frac{5}{6}$. Г. $x = 3\frac{1}{3}$.

16. Все имеющиеся на учительском столе карандаши можно разложить поровну в 3 большие коробки или в 5 маленьких. В маленькую коробку помещается на 6 карандашей меньше, чем в большую. Сколько карандашей на учительском столе?

Решая эту задачу, три ученика составили разные уравнения, причем все они были правильными:

1) $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 6$; 2) $5x = 3(x + 6)$; 3) $3x = 5(x - 6)$.

Каждый из них обозначил буквой x одну из величин:

- а) x — число карандашей в маленькой коробке;
б) x — число карандашей в большой коробке;
в) x — число карандашей на учительском столе.

Укажите для каждого уравнения, какая из величин была обозначена буквой x .

Ответ. 1) _____; 2) _____; 3) _____

Квадратные корни

2.1

Задача о нахождении стороны квадрата

Если известна длина стороны квадрата, то можно найти его площадь. В то же время приходится решать и обратную задачу — по известной площади квадрата находить его сторону.

Например, если площадь квадрата 100 см^2 , его сторона равна 10 см . Мы выбрали число, квадрат которого равен заданному значению площади. Таких чисел, вообще говоря, два: это 10 и -10 . Но мы, естественно, взяли то из них, которое является положительным; ведь отрицательным числом длина выражаться не может!

Если сторона квадрата равна a , то его площадь S можно вычислить по формуле $S = a^2$. Но в математике есть также способ и для выражения стороны квадрата через его площадь. Чтобы записать соответствующую формулу, нам придется ввести новый символ: $\sqrt{S}$. Этим символом обозначена сторона квадрата, площадь которого равна S . Знак $\sqrt{}$ называют *знаком квадратного корня* или *радикалом* (от латинского слова *radix* — корень). Происхождение же символа $\sqrt{}$ связывают с рукописным написанием латинской буквы *r*, которое выглядело так: r . Читают выражение $\sqrt{S}$ так: *квадратный корень из S*.

С использованием введенного символа формула для нахождения стороны квадрата a , площадь которого равна S , запишется следующим образом: $a = \sqrt{S}$.

Пусть, например, $S = 64$. Тогда $a = \sqrt{64}$ и нужно найти положительное число, квадрат которого равен 64 . Так как $64 = 8^2$, то $\sqrt{64} = 8$. Мы заменили выражение $\sqrt{64}$ его значением — числом 8 , или, как говорят, *извлекли квадратный корень из 64*.

В приведенном примере нам нетрудно было найти значение корня. Однако если *подкоренное число* большое, то для извлечения корня приходится пользоваться вспомогательными приемами.

■ **Пример 1.** Найдем $\sqrt{2304}$.

Чтобы подобрать число, квадрат которого равен 2304, обратимся к таблице квадратов двузначных чисел, помещенной на форзаце. Из таблицы видно, что $2304 = 48^2$. Значит, $\sqrt{2304} = 48$.

■ **Пример 2.** Найдем $\sqrt{15876}$.

Так как под корнем пятизначное число, то таблица квадратов двузначных чисел нам уже не поможет. Поэтому воспользуемся другим приемом — разложим число 15 876 на множители.

Так как $15\ 876 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 = (2 \cdot 9 \cdot 7)^2$, то

$$\sqrt{15876} = 2 \cdot 9 \cdot 7 = 126.$$

При записи выражений, содержащих радикалы, так же как и других алгебраических выражений, нужно придерживаться некоторых правил. Так, числовой или буквенный множитель пишут перед радикалом, например $2\sqrt{16}$, $a\sqrt{b}$.

Знак корня, как и скобки, является группирующим символом. Если, например, нужно найти значение выражения $\sqrt{4^2 + 3^2}$, то сначала надо вычислить сумму $4^2 + 3^2$, а затем извлечь корень:

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

A

Вычислите (225—226):

225. а) $\sqrt{4}$; г) $\sqrt{100}$; ж) $\sqrt{0,09}$;

б) $\sqrt{36}$; д) $\sqrt{16}$; з) $\sqrt{0,49}$;

в) $\sqrt{1}$; е) $\sqrt{0,01}$; и) $\sqrt{0,0064}$.

226. а) $\sqrt{\frac{1}{81}}$; в) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; д) $\sqrt{\frac{400}{49}}$;

б) $\sqrt{\frac{1}{100}}$; г) $\sqrt{\frac{9}{64}}$; е) $\sqrt{\frac{16}{9}}$.

227. Вычислите, пользуясь таблицей квадратов двузначных чисел:

а) $\sqrt{169}$; в) $\sqrt{441}$; д) $\sqrt{1024}$; ж) $\sqrt{\frac{100}{361}}$; и) $\sqrt{1,44}$;

б) $\sqrt{289}$; г) $\sqrt{625}$; е) $\sqrt{2401}$; з) $\sqrt{\frac{169}{9}}$; к) $\sqrt{0,0121}$.

228. Найдите значение выражения $\sqrt{x}$ при заданных значениях переменной:
 а) $x = 1; 9; 64$; в) $x = 0,01; 0,04; 0,36$.
 б) $x = \frac{1}{25}; \frac{49}{81}; \frac{100}{121}$;
229. Верно ли, что:
 а) $\sqrt{2704} = 52$; в) $\sqrt{4,29} = 2,3$;
 б) $\sqrt{0,0324} = 0,18$; г) $\sqrt{0,961} = 0,31$?
230. Запишите равенство, связывающее данные числа, не используя знак $\sqrt{}$:
 а) $\sqrt{625} = 25$; в) $43 = \sqrt{1849}$;
 б) $34 = \sqrt{1156}$; г) $\sqrt{0,0441} = 0,21$.
231. Запишите соотношение между данными числами с помощью знака $\sqrt{}$:
 а) $11^2 = 121$; в) $27^2 = 729$;
 б) $41^2 = 1681$; г) $108^2 = 11\,664$.
232. Найдите t , если:
 а) $\sqrt{t} = 9$; б) $\sqrt{t} = 10$; в) $\sqrt{t} = 12$; г) $\sqrt{t} = 16$.
233. (Задание с выбором ответа.) Известно, что $\sqrt{x} = m$. Какое равенство верно?
 А. $x^2 = m^2$. Б. $x = \sqrt{m}$. В. $x^2 = m$. Г. $x = m^2$.
234. Вычислите: а) $\sqrt{17^2}$; б) $\sqrt{21^2}$; в) $\sqrt{23,8^2}$; г) $\sqrt{12,56^2}$.
235. Вычислите:
 а) $\sqrt{90\,000}$; в) $\sqrt{32\,400}$; д) $\sqrt{4\,000\,000}$;
 б) $\sqrt{22\,500}$; г) $\sqrt{2\,560\,000}$; е) $\sqrt{16\,000\,000}$.
236. Вычислите:
 а) $\sqrt{25} + \sqrt{16}$; в) $\sqrt{17 + 4 \cdot 8}$; д) $\sqrt{9^2 - 17}$;
 б) $\sqrt{81} - \sqrt{36}$; г) $\sqrt{5^2 + 11}$; е) $\sqrt{13^2 - 12^2}$.
237. Найдите значение выражения при $a = 100$ и $b = 81$:
 а) $a\sqrt{b}$; б) $b\sqrt{a}$; в) $\sqrt{ab}$; г) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.
238. Найдите значение каждого из выражений $a + \sqrt{b}$, $\sqrt{a} + b$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{a+b}$:
 а) при $a = 16$ и $b = 9$; б) при $a = 2,25$ и $b = 0,64$.
239. Найдите значение выражения при $a = 9$; 1 ; $\frac{1}{4}$:
 а) $a + \sqrt{a}$; б) $a - \sqrt{a}$; в) $a\sqrt{a}$; г) $\frac{a}{\sqrt{a}}$.

240. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$, $\sqrt{x^2 + y^2}$ и $\sqrt{(x + y)^2}$ при $x = 5$, $y = 12$;

б) $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$, $\sqrt{x^2 - y^2}$ и $\sqrt{(x - y)^2}$ при $x = 25$, $y = 24$.

241. Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

а) $\sqrt{4 - 3x}$ при $x = -7$; -4 ; 0 ; 1 ;

б) $\sqrt{\frac{x+y}{2}}$ при $x = 50$ и $y = 22$; при $x = 0$ и $y = 2$.

242. Площадь S поверхности куба с ребром a (рис. 2.1) вычисляется по формуле $S = 6a^2$. Выразите из этой формулы ребро куба a . Вычислите ребро куба, если известно, что:

а) $S = 150 \text{ см}^2$;

б) $S = 13,5 \text{ дм}^2$;

в) $S = 0,96 \text{ м}^2$.

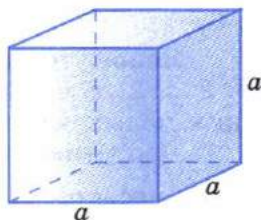


Рис. 2.1

243. Объем V прямоугольного параллелепипеда, в основании которого квадрат (рис. 2.2), вычисляется по формуле $V = a^2h$. Выразите из этой формулы сторону основания a и высоту параллелепипеда h .

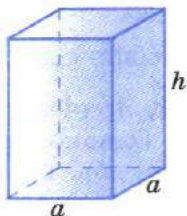


Рис. 2.2



244. Вычислите:

а) $\sqrt{18\,225}$; б) $\sqrt{12\,544}$; в) $\sqrt{11\,025}$; г) $\sqrt{69\,696}$.

245. Упростите:

а) $\sqrt{2^{1000}}$; б) $\sqrt{3^{-50}}$; в) $\sqrt{7^{500}}$; г) $\sqrt{5^{-100}}$.

Образец. $\sqrt{15^{40}} = \sqrt{(15^{20})^2} = 15^{20}$.

246. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\sqrt{81}}$; б) $\sqrt{\sqrt{625}}$; в) $\sqrt{11 + \sqrt{25}}$; г) $\sqrt{\sqrt{49} - \sqrt{36}}$.

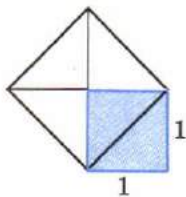


Рис. 2.3

Возьмем квадрат со стороной, равной 1, и на его диагонали построим еще один квадрат (рис. 2.3). Из рисунка видно, что площадь нового квадрата в два раза больше площади исходного, т. е. она равна 2 кв. ед. А чему равна длина стороны этого квадрата?

Обозначим длину стороны квадрата буквой a . Тогда $a^2 = 2$. Попробуем найти число, удовлетворяющее этому условию.

Ясно, что число a не может быть целым. В самом деле, $1^2 < 2$, а $2^2 > 2$, т. е. это число должно быть заключено между 1 и 2, а таких целых чисел нет.

Допустим, что a — дробное число. Тогда его можно записать в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, знаменатель которой не равен 1. Числа p и q не имеют общих делителей, отличных от 1, иначе дробь $\frac{p}{q}$ можно было бы сократить. Но тогда и числа p^2 и q^2 также не имеют общих делителей, а значит, дробь $\frac{p^2}{q^2}$ также является несократимой, причем ее знаменатель не равен 1.

Однако несократимая дробь со знаменателем, не равным 1, не может быть равна целому числу 2, и мы, как говорят математики, пришли к противоречию. Таким образом,

нет ни целого, ни дробного числа, квадрат которого равен 2.

Более двадцати веков тому назад к этому выводу пришли математики Древней Греции, что вызвало кризис в математической науке: сторона у квадрата есть, а длины у нее нет! Но математики нашли выход и из этой ситуации: раз имеющегося запаса чисел — целых и дробных — не хватает для выражения длин отрезков, значит, нужны какие-то новые числа.

Так появились новые числа, а назвали их *иррациональными*. Латинская приставка *ir-* означает отрицание: это числа, не являющиеся рациональными. И длина стороны квадрата, площадь которого равна 2, выражается иррациональным числом. Используя формулу $a = \sqrt{S}$, можно записать, что $a = \sqrt{2}$.

Число 2 не единственное рациональное число, которое нельзя представить ни в виде квадрата целого, ни в виде квадрата дробного числа. Чисел, обладающих таким же свойством, очень много да-

же среди натуральных. Все их можно получить, если из натурального ряда

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots$$

исключить квадраты целых чисел. Тогда останутся числа

$$2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, \dots,$$

при извлечении квадратных корней из которых получаются иррациональные числа:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \dots$$

Квадраты этих чисел соответственно равны 2, 3, 5, 6, ..., т. е.

$$(\sqrt{2})^2 = 2, (\sqrt{3})^2 = 3, (\sqrt{5})^2 = 5, (\sqrt{6})^2 = 6, \dots$$

И вообще если положительное число a не является квадратом натурального или дробного числа, то $\sqrt{a}$ — число иррациональное.

Число $\sqrt{2}$ — это *точное значение* длины стороны квадрата, площадь которого равна 2. В то же время на практике измерения проводятся приближенно с требуемой точностью и иррациональные квадратные корни заменяют их *десятичными приближениями*.

Так, из рисунка 2.4 видно, что сторона квадрата приблизительно равна 1,4. Выполним для проверки возведение в квадрат: $1,4^2 = 1,96$. Мы, естественно, получили результат, отличающийся от числа 2, хотя и близкий к нему.

Существуют разные способы приближенного вычисления квадратных корней. Рассмотрим один из них. В его основу положено следующее утверждение: *если числа a и b положительные и $a^2 < b^2$, то $a < b$* . С геометрической точки зрения это очевидно: квадрат с меньшей площадью имеет и меньшую сторону.

Возьмем, например, $\sqrt{42}$. Так как

$$6^2 < 42 < 7^2, \text{ то } 6 < \sqrt{42} < 7.$$

Можно сказать, что $\sqrt{42} \approx 6$ (с недостатком) или что $\sqrt{42} \approx 7$ (с избытком).

Чтобы получить более точные приближения, будем последовательно возводить в квадрат числа 6,1; 6,2; 6,3; ..., пока не получим число, большее 42:

$$6,1^2 = 37,21; \quad 6,2^2 = 38,44; \quad 6,3^2 = 39,69; \\ 6,4^2 = 40,96; \quad 6,5^2 = 42,25.$$

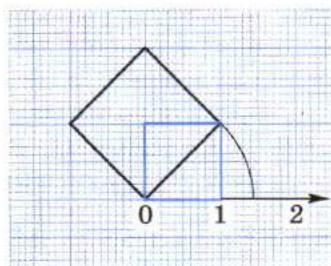


Рис. 2.4

Так как $6,4^2 < 42 < 6,5^2$, то $6,4 < \sqrt{42} < 6,5$.

Значит, можно считать, что $\sqrt{42} \approx 6,4$ (с недостатком) или что $\sqrt{42} \approx 6,5$ (с избытком).

Продолжая оценку числа $\sqrt{42}$, мы будем получать все более и более точные его приближения:

$$6,48 < \sqrt{42} < 6,49,$$

$$6,480 < \sqrt{42} < 6,481,$$

$$6,4807 < \sqrt{42} < 6,4808 \text{ и т. д.}$$

Этот процесс бесконечен: хотя приближения слева и справа все ближе и ближе «подкрадываются» к $\sqrt{42}$, никакое из них с этим числом не совпадет — в противном случае число $\sqrt{42}$ оказалось бы рациональным.

На практике для нахождения приближенного значения корня вы можете пользоваться калькулятором, на котором есть кнопка со знаком $\sqrt{}$. Если у вас восьмиразрядный калькулятор, то, вычисляя $\sqrt{42}$, вы получите один из результатов: 6,4807406 или 6,4807407. Какой именно — зависит от калькулятора.

Иррациональные числа появляются не только в связи с извлечением квадратных корней. Существует бесконечно много иррациональных чисел и другого происхождения. Например, вы встречались с формулами длины окружности и площади круга: $s = \pi d$, $S = \pi r^2$, в которых используется число π . Оно выражает отношение длины любой окружности к ее диаметру. Число π тоже иррациональное. Недаром поэтому, работая с этими формулами, вы всегда пользовались приближенными равенствами $\pi \approx 3$ или $\pi \approx 3,14$. Архимед, живший в III в. до н. э. — за полторы тысячи лет до того, как голландский математик Симон Стевин ввел современные обозначения для десятичных дробей, позволяющие записать, что $\pi \approx 3,14$, нашел хорошее приближение числа π с помощью обыкновенной дроби: $\pi \approx \frac{22}{7}$. Заметьте, что если записать десятичное приближение

дроби $\frac{22}{7}$ с двумя знаками после запятой, то как раз и получится число 3,14.

Иррациональные числа, так же как и рациональные, могут быть и отрицательными. Отрицательное число получается из соответствующего положительного числа приписыванием к нему знака «минус», например $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{42}$.

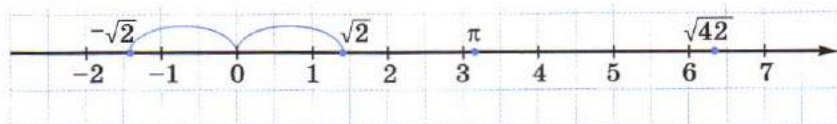


Рис. 2.5

Всякое иррациональное число, как и любое рациональное, можно изобразить точкой на координатной прямой. На рисунке 2.5 показано примерное расположение точек, соответствующих числам π , $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{42}$.

Рациональные и иррациональные числа вместе образуют так называемое *множество действительных чисел*. С действительными числами можно выполнять арифметические действия — сложение, вычитание, умножение и деление. При этом остаются верными все свойства арифметических действий — оба переместительных, оба сочетательных и распределительное.

А

247. Укажите, рациональным или иррациональным является число:
а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{25}$; в) $\sqrt{37}$; г) $2\sqrt{16}$; д) $\frac{1}{2}\sqrt{49}$.
248. а) Квадратом какого положительного числа является число:
4; 8; 25; 29; a ($a > 0$)?
б) Представьте в виде квадрата некоторого числа все натуральные числа от 11 до 20.
249. Между какими последовательными целыми числами заключено число:
а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt{15}$; в) $\sqrt{27}$; г) $\sqrt{150}$; д) $\sqrt{200}$; е) $\sqrt{480}$?
250. Найдите с помощью калькулятора десятичное приближение квадратного корня с двумя знаками после запятой:
а) $\sqrt{508}$; б) $\sqrt{617}$.
Возведите полученное число в квадрат. Получилось ли в результате число, близкое к стоящему под знаком корня?
251. Площадь квадрата равна 10 см^2 . Чему равна его сторона? Дайте точный ответ, записав его с помощью знака $\sqrt{}$, и приближенный, выразив результат десятичной дробью с двумя знаками после запятой. Начертите квадрат, площадь которого примерно равна 10 см^2 .

252. С помощью калькулятора найдите значения $\sqrt{n}$ для всех натуральных n от 1 до 20. Заполните таблицу, указывая приближенные значения $\sqrt{n}$ с тремя знаками после запятой.

n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
1	1	6		11		16	
2	1,414	7		12		17	
3		8		13		18	
4		9		14		19	
5		10		15		20	

253. Пользуясь таблицей (см. упражнение 252), сравните: $\sqrt{8}$ и $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$ и $\sqrt{17}$, $\sqrt{19}$ и $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$ и $\sqrt{7}$. Как меняются значения $\sqrt{n}$ с увеличением n ?
254. Что больше: $\sqrt{80}$ или $\sqrt{90}$; $\sqrt{168}$ или $\sqrt{104}$? Проверьте себя с помощью калькулятора.
255. Покажите на координатной прямой примерное расположение чисел $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., $\sqrt{20}$. (За единичный отрезок примите 5 клеток.)
256. Покажите на координатной прямой примерное расположение чисел $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{12}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{8}$, $-\sqrt{12}$.
257. На каждом рисунке (рис. 2.6) укажите отрезок между двумя соседними делениями, которому принадлежит число: $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$.

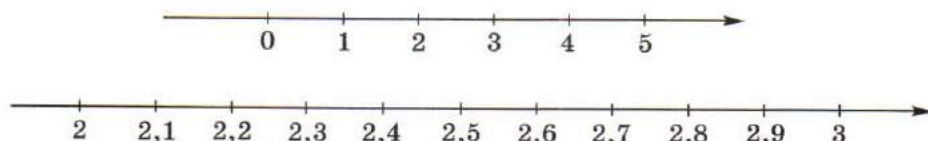


Рис. 2.6

258. а) Каждое из чисел $\sqrt{12}$, $\sqrt{19}$, $\sqrt{28}$ соотнесите с соответствующей ему точкой координатной прямой (рис. 2.7).

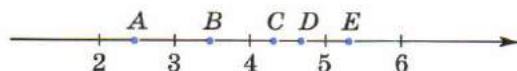


Рис. 2.7

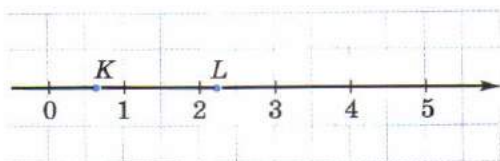


Рис. 2.8

б) На координатной прямой (рис. 2.8) точками K и L отмечены два из следующих чисел: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{0,4}$. Какое число соответствует точке K и какое — точке L ?

259. Сравните числа:

$$\sqrt{2} \text{ и } \sqrt{3}, -\sqrt{2} \text{ и } -\sqrt{3}, 1 - \sqrt{2} \text{ и } 1 - \sqrt{3}.$$

260. Положительным или отрицательным является число:

а) $1 - \sqrt{5}$; в) $\sqrt{12} - \sqrt{17}$; д) $\sqrt{7} - 3$;

б) $5 - \sqrt{10}$; г) $\sqrt{6} - \sqrt{5}$; е) $\sqrt{8} - 2$?

261. Не используя калькулятор, сравните:

а) 3 и $\sqrt{11}$; в) 11 и $\sqrt{110}$; д) 22 и $\sqrt{484}$;

б) 5 и $\sqrt{20}$; г) 17 и $\sqrt{299}$; е) 35 и $\sqrt{1215}$.

Образец. Сравним 4 и $\sqrt{15}$.

Способ 1. Представим число 4 в виде корня: $4 = \sqrt{16}$.

Так как $\sqrt{16} > \sqrt{15}$, то $4 > \sqrt{15}$.

Способ 2. Сравним квадраты чисел 4 и $\sqrt{15}$:

$$4^2 = 16 \text{ и } (\sqrt{15})^2 = 15.$$

Так как $4^2 > (\sqrt{15})^2$, то $4 > \sqrt{15}$.

262. Найдите площадь фигуры (рис. 2.9, а—г).

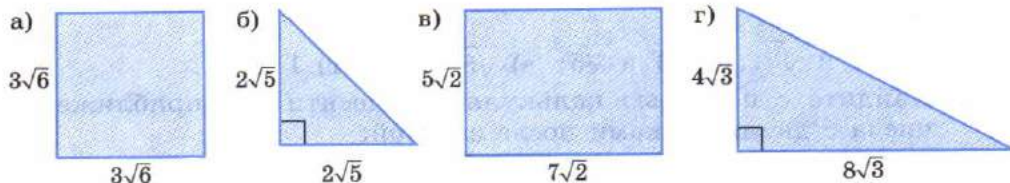


Рис. 2.9

263. Упростите:

- а) $(\sqrt{18})^2$; в) $3\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$;
б) $(\sqrt{23})^2$; г) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{2}$.

264. а) Площадь S круга с радиусом r (рис. 2.10) вычисляется по формуле $S = \pi r^2$. Выразите из этой формулы радиус r .

б) Запишите формулу для вычисления площади круга S по его диаметру d . Выразите из этой формулы диаметр d .

265. а) Площадь S равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом a (рис. 2.11) вычисляется по формуле $S = \frac{a^2}{2}$. Выразите из

этой формулы катет a . Какой должна быть длина катета, чтобы площадь треугольника была равна 10 см^2 ? (Ответ дайте приближенно с одним знаком после запятой.)

б) Сколько секунд будет падать сосулька с крыши 22-этажного дома, примерная высота которого 68 м ? (Для вычислений воспользуйтесь формулой $h = \frac{gt^2}{2}$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, g — ускорение свободного падения, примерно равное $9,8 \text{ м/с}^2$.)

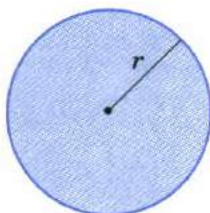


Рис. 2.10

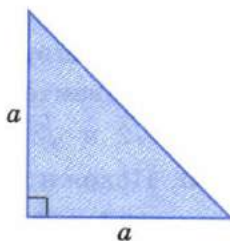


Рис. 2.11

Б

266. Не используя калькулятор, найдите ближайшее к указанному числу натуральное число:

- а) $\sqrt{50}$; б) $\sqrt{22}$; в) $\sqrt{9,2}$; г) $\sqrt{33,7}$; д) $\sqrt{80,02}$.

267. Найдите два натуральных числа, между которыми заключено указанное число, и определите, к какому из них оно ближе:

- а) $\sqrt{73,25}$; б) $\sqrt{20,42}$.

268. Укажите какое-нибудь рациональное число, заключенное между числами:

- а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$; г) 1 и $\sqrt{2}$.

269. Найдите с помощью калькулятора десятичное приближение числа с двумя знаками после запятой:

- а) $\sqrt{\sqrt{2}}$; в) $0,5\sqrt{\sqrt{8}}$; д) $\sqrt{3+\sqrt{3}}$;
б) $\sqrt{\sqrt{10}}$; г) $\sqrt{0,9\sqrt{2}}$; е) $\sqrt{\sqrt{15}-3}$.

270. а) Объем V конуса (рис. 2.12) вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Выразите из этой формулы высоту H и радиус основания R .
 б) Объем V шарового сектора (рис. 2.13) вычисляется по формуле $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$. Выразите из этой формулы высоту сегмента h и радиус шара R .

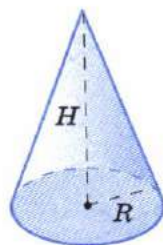


Рис. 2.12

271. (Задача-исследование.) Когда вы находите перебором все делители некоторого натурального числа, удобно выписывать пары: делитель и соответствующее частное, которое также является делителем.

1) Пользуясь этим приемом, найдите все делители числа: 18; 36; 50.

2) Приведите пример натурального числа a , делителем которого является число $\sqrt{a}$.

3) Докажите, что если один из пары делителей натурального числа a меньше $\sqrt{a}$, то другой больше $\sqrt{a}$.

4) Перебором каких натуральных чисел можно ограничиться для нахождения всех делителей числа a ? До какого числа следует осуществить перебор для нахождения всех делителей числа: 144; 238?

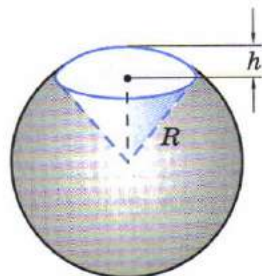
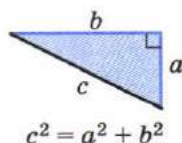


Рис. 2.13

2.3 Теорема Пифагора

Теорема Пифагора — одно из самых знаменитых положений геометрии. Хотя она и названа именем великого древнегреческого математика и философа, жившего более 25 веков тому назад, история ее началась задолго до самого Пифагора. Известно, что эта теорема в той или иной форме использовалась всеми древними народами.

Речь в теореме Пифагора идет о соотношении между сторонами прямоугольного треугольника. В современной формулировке она звучит так:



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Рис. 2.14

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (рис. 2.14).

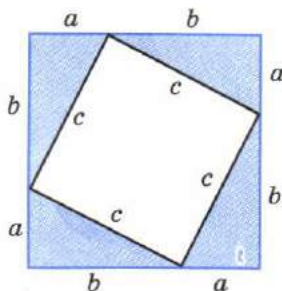


Рис. 2.15

Убедиться в справедливости этого утверждения можно с помощью рисунка 2.15.

Четыре равных прямоугольных треугольника с катетами a и b и гипотенузой c расположены так, что их стороны образуют два квадрата: большой со стороной $a + b$ и малый со стороной c . Из рисунка ясно, что

$$c^2 = (a + b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

Так как

$$(a + b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2,$$

то

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

■ **Пример 1.** Найдём гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны 3 и 4.

Из формулы $c^2 = a^2 + b^2$ выразим гипотенузу c :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Подставив значения a и b , получим

$$c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

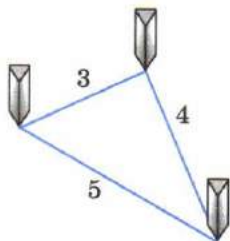


Рис. 2.16

Таким образом, если катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4, то его гипотенуза равна 5. Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 использовался для построения прямого угла еще в Древнем Египте (рис. 2.16), поэтому его называют *египетским треугольником*.

■ **Пример 2.** Найдём гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны 2 и 4.

Подставив в формулу $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ значения a и b , будем иметь $c = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$.

В первом примере, задавшись целыми значениями длин катетов a и b , мы получили, что длина гипотенузы также выражается целым числом. Однако чаще, выбрав целые значения катетов a и b , мы получаем, как это было в примере 2, что длина гипотенузы выражается иррациональным числом.

Целые числа 3, 4 и 5, удовлетворяющие соотношению $a^2 + b^2 = c^2$, образуют так называемую «пифагорову тройку». Вот еще примеры троек чисел, обладающих этим свойством: 5, 12 и 13; 6, 8 и 10. «Пифагоровых троек» бесконечно много, но найти их не так просто.

Теорему Пифагора можно использовать для построения отрезков с длинами, равными $\sqrt{n}$, где n — любое натуральное число.

На рисунке 2.17, а построен равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными 1. Длина его гипотенузы OA равна $\sqrt{2}$. Действительно, $OA = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

На рисунке 2.17, б соответствующая точка нанесена на координатную прямую.

Теперь легко отметить точку с координатой $\sqrt{3}$: отрезок OB (рис. 2.17, б) является гипотенузой прямоугольного треугольника, катеты которого равны $\sqrt{2}$ и 1. Поэтому

$$OB = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}.$$

На рисунке 2.17, в точка с координатой $\sqrt{3}$ нанесена на координатную прямую.

Далее, отрезок OC — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами $\sqrt{3}$ и 1 (рис. 2.17, в). Поэтому

$$OC = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2.$$

Затем строим точку с координатой $\sqrt{5}$ (рис. 2.17, г):

$$OD = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}.$$

Следующим шагом будет построение точки с координатой $\sqrt{6}$, а затем с координатой $\sqrt{7}$, и т. д.

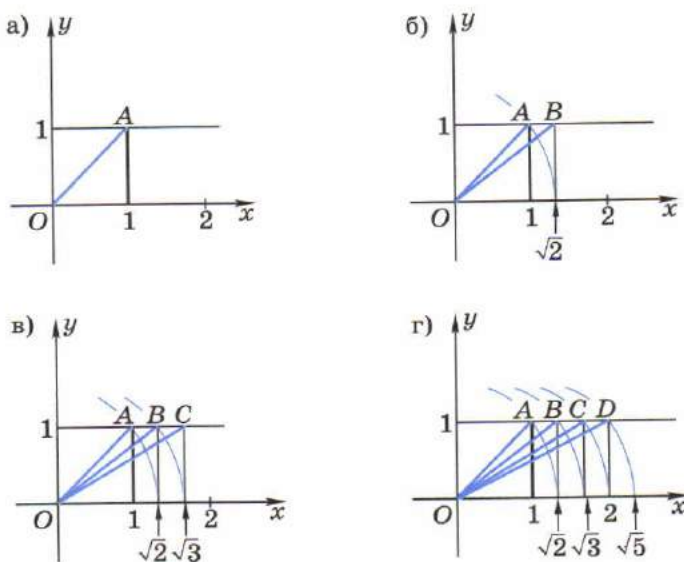


Рис. 2.17

272. Найдите сторону прямоугольного треугольника, обозначенную буквой (рис. 2.18, а, б). Если результат выражается иррациональным числом, то дайте два ответа: точное значение и приближенное, округлив его до сотых.

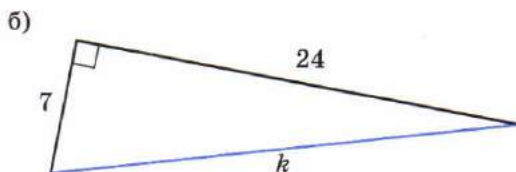
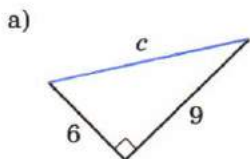


Рис. 2.18

273. Велосипедист проехал из M в N по улицам (рис. 2.19). Какое расстояние он проехал? Если бы можно было проехать напрямик, то на сколько короче оказался бы его путь?
274. На какой высоте находится воздушный змей (рис. 2.20)?
275. Найдите длину отрезка AD (рис. 2.21).

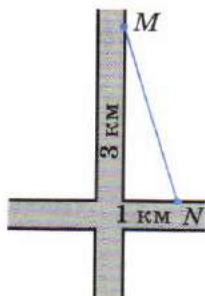


Рис. 2.19

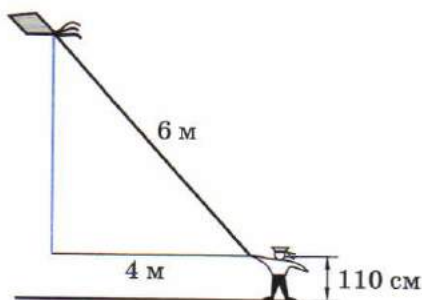


Рис. 2.20

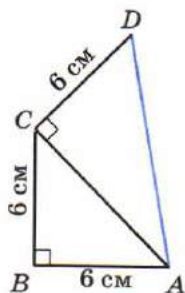


Рис. 2.21

Сделайте рисунок и решите задачу (276—280). Если в ответе получается иррациональное число, то дайте его десятичное приближение с одним знаком после запятой:

276. Основание лестницы находится в 2 м от стены, длина лестницы 5 м. На каком расстоянии от земли находится верхний конец лестницы?
277. Сквер в форме прямоугольника имеет длину 15 м и ширину 9 м. Какова длина прямой дорожки, пересекающей сквер по его диагонали?

278. Какова наибольшая длина трости, которую можно положить на дно чемодана размером 80×60 см?
279. Диагональ телевизионного экрана 50 см, длины его сторон относятся как 3 : 4. Чему равны длины сторон экрана?
280. Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна:
а) 25 см^2 ; б) 30 см^2 .

Б

281. Группа туристов прошла от своего лагеря 1,6 км строго на запад, затем 3,2 км на север, а затем несколько километров на восток и остановилась на ночлег. Точка ночлега находилась в 6,4 км от их лагеря. Сколько километров туристы шли в восточном направлении?
282. Квадрат, площадь которого равна 36 см^2 , вписан в круг (рис. 2.22). Найдите радиус круга.
283. На координатной плоскости отмечены точки A и B . Найдите расстояние между этими точками, если известны их координаты (сделайте рисунок):
а) $A(1; 8)$, $B(7; 0)$;
б) $A(1; 3)$, $B(13; 8)$;
в) $A(80; 54)$, $B(83; 50)$.

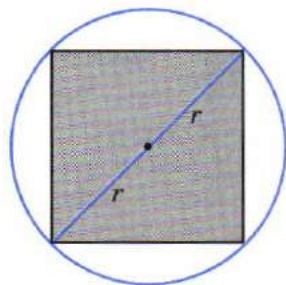


Рис. 2.22

284. Можно ли трость длиной 100 см поместить в коробку, длина которой 80 см, ширина 30 см и высота 50 см?
285. Прямоугольный параллелепипед имеет измерения a , b и c (рис. 2.23).
а) Выразите диагональ d прямоугольного параллелепипеда через его измерения.
б) Используя полученную формулу, вычислите d , если $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 12$ см.
в) Выразите из полученной формулы ребро c . Найдите c , если $d = 17$ см, $a = 9$ см, $b = 12$ см.

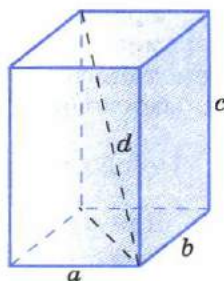


Рис. 2.23

286. а) Убедитесь, что $\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4$. Покажите геометрически, что если a и b — положительные числа, то $\sqrt{a^2 + b^2} < a + b$.
- б) Покажите геометрически, что если a , b и c — положительные числа, то $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} < a + b + c$.

287. (Задача-исследование.) На рисунке 2.24 шесть отрезков имеют длину, равную 1.

1) Найдите длины отрезков AB , AD , AE , AF , AG .

2) Постройте такую же фигуру в тетради и достройте ее так, что бы получить отрезок длиной $\sqrt{8}$.

3) Отрезки длиной $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$

можно получить, продолжив построение этой фигуры.

Но для этих длин можно применить и более простой прием. Догадайтесь какой и постройте отрезки с указанными длинами.

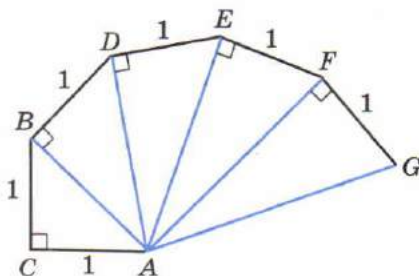


Рис. 2.24

2.4

Квадратный корень (алгебраический подход)

Пусть площадь квадрата равна 36 см^2 . Чему равна его сторона? Если длину стороны этого квадрата (в сантиметрах) обозначить через x , то можно записать уравнение $x^2 = 36$. В соответствии со смыслом задачи ответом может служить только положительный корень уравнения, т. е. число 6. Однако уравнению $x^2 = 36$ вместе с числом 6 удовлетворяет и число -6 . В самом деле, $(-6)^2 = 36$. Оба корня уравнения $x^2 = 36$, т. е. числа 6 и -6 , квадраты которых равны 36, называют *квадратными корнями из 36*.

Уравнение, которое мы рассмотрели, имеет вид $x^2 = a$, где x — переменная, a — некоторое число. Всякое число, являющееся корнем такого уравнения, называют *квадратным корнем из числа a* . Иными словами,

число b называют квадратным корнем из числа a , если $b^2 = a$.

Для a , равного 36, мы указали два квадратных корня — числа 6 и -6 . А как обстоит дело в общем случае: для любого ли числа a можно найти квадратный корень и сколько квадратных корней существует из произвольно взятого числа a ? Чтобы выяснить это, рассмотрим случаи, когда $a > 0$, $a = 0$ и $a < 0$.

Пусть $a > 0$. Будем рассуждать с опорой на график. Построим в координатной плоскости график зависимости $y = x^2$ — знакомую вам параболу, и в этой же системе координат проведем горизонтальную прямую $y = a$ (рис. 2.25). Вы видите, что прямая пересекает параболу в двух точках, симметричных относительно оси y . (Рисунок отражает важное свойство параболы: ее ветви неограниченно «ухо-

дят» вверх, и любая горизонтальная прямая, расположенная выше оси x , пересекает параболу в двух точках.) Ордината каждой точки пересечения параболы и прямой равна a . Обозначим абсциссы этих точек через x_1 и x_2 . Так как точки принадлежат параболу $y = x^2$, то верны равенства $x_1^2 = a$ и $x_2^2 = a$. Но в соответствии с определением квадратного корня это как раз и означает, что числа x_1 и x_2 являются квадратными корнями из числа a .

Таким образом, если a — положительное число, то существуют два квадратных корня из a . Эти квадратные корни — числа противоположные, т. е. они равны по модулю, и один из них положителен, а другой отрицателен. Мы уже имеем для них обозначения: $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$.

Пусть $a = 0$. Вы знаете, что есть только одно число, квадрат которого равен 0, — это само число 0. Таким образом, *квадратный корень из нуля единственный, и он равен 0*.

Рассмотрим случай, когда $a < 0$. Как известно, квадрат любого числа неотрицателен (т. е. он либо положителен, либо равен 0). Иными словами, нет такого числа, квадрат которого был бы равен отрицательному числу. Таким образом, *квадратный корень из отрицательного числа не существует*.

Итак, извлечь квадратный корень из числа a можно при условии, что $a \geq 0$. Если $a > 0$, то квадратных корней два; один из них положителен, а другой отрицателен. Если $a = 0$, то квадратный корень единственный, и он равен 0.

Неотрицательный квадратный корень из числа a (т. е. положительный или равный 0) называют *арифметическим квадратным корнем* из числа a .

Именно арифметический квадратный корень из числа a обозначают символом $\sqrt{a}$. Для краткости прилагательное «арифметический» часто опускают и называют выражение $\sqrt{a}$ просто квадратным корнем. При этом, однако, надо помнить, что $\sqrt{a}$ — число неотрицательное. Поэтому

равенство $\sqrt{a} = b$ означает одновременное выполнение двух условий: $b^2 = a$ и $b \geq 0$.

Результаты, которые мы получили, исследуя вопрос о квадратных корнях из произвольного числа a , можно сформулировать иначе, рассматривая их по отношению к уравнению $x^2 = a$.

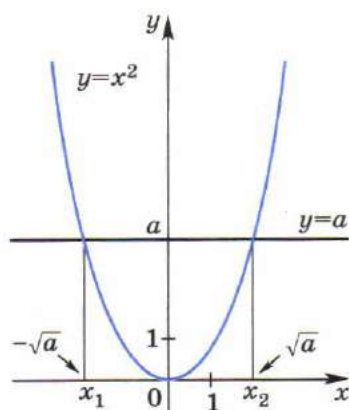


Рис. 2.25

Если $a > 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет два корня: $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$;
если $a = 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет единственный корень — число 0;
если $a < 0$, то уравнение $x^2 = a$ корней не имеет.

Нельзя не обратить внимания и на совпадение в терминах — квадратный корень (иначе — радикал) и корень уравнения. Это совпадение не случайно. Уравнения вида $x^2 = a$ исторически были первыми «сложными» уравнениями, и их решения были названы корнями, возможно по метафоре, что из стороны квадрата как из корня вырастает сам квадрат. Этот термин стал употребляться в дальнейшем и для произвольных уравнений. Название «радикал» тоже связано с термином «корень»: как уже говорилось выше, латыни корень — *radix* (он же «редис» — корнеплод). Заметьте также, что слово «радикальный» в русском языке является синонимом слова «коренной».

А

288. Точка D на рисунке 2.26 имеет координаты $(\sqrt{5}; 5)$. Запишите координаты точек графика, отмеченных на рисунке.

289. Найдите квадратные корни из заданных чисел и в каждом случае назовите арифметический корень:

а) 16; 100; 10; 18; 83;

б) 0,01; 0,25; 5,6; 6,4;

в) $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$; $2\frac{1}{4}$; $2\frac{7}{9}$.

290. Какие из следующих выражений не имеют смысла: $\sqrt{27}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{0}$, $\sqrt{-8}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{1,6}$?

291. При каких значениях a имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{a}$; в) $\sqrt{3a}$;

б) $\sqrt{-a}$; г) $\sqrt{-3a}$?

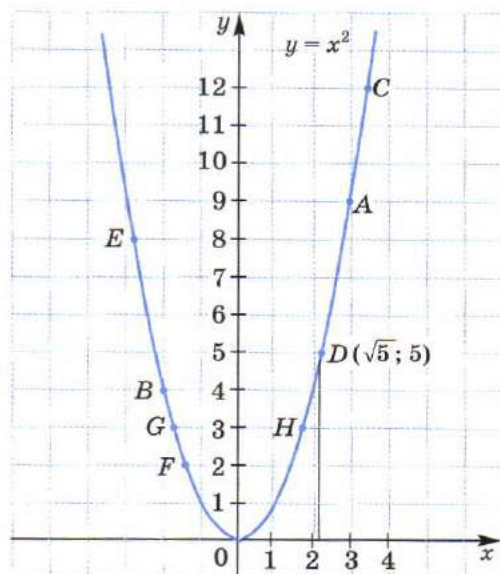


Рис. 2.26

Решите уравнение (292—294):

292. а) $x^2 = 25$; в) $y^2 = 36$; д) $z^2 = 1$; ж) $t^2 = \frac{1}{4}$;

б) $x^2 = 16$; г) $z^2 = 0,81$; е) $y^2 = 0$; з) $x^2 = \frac{9}{16}$.

293. а) $x^2 = 3$; в) $x^2 = 11$; д) $x^2 = 8$;

б) $x^2 = 7$; г) $x^2 = 12$; е) $x^2 = 72$.

294. а) $x^2 - 25 = 0$; в) $4y^2 = 9$; д) $2x^2 - 4 = 0$;

б) $x^2 + 4 = 0$; г) $25x^2 = 1$; е) $2x^2 + 6 = 0$.

295. Составьте какое-нибудь уравнение, имеющее корни:

а) 3 и -3; б) 0,2 и -0,2; в) $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$.

296. Даны уравнения:

$x^2 = 3$, $x^2 = -144$, $x^2 = \frac{4}{9}$, $x^2 = 144$, $x^2 = 0$, $x^2 = -3$.

Выберите из них те, которые:

- а) имеют два корня;
- б) имеют два рациональных корня;
- в) имеют два иррациональных корня;
- г) имеют один корень;
- д) не имеют корней.

297. Найдите x , если:

а) $\frac{x}{18} = \frac{2}{x}$; б) $\frac{5}{x} = \frac{x}{2}$; в) $\frac{x}{50} = \frac{0,5}{x}$; г) $\frac{0,3}{x} = \frac{x}{10}$.

298. Решите уравнение:

а) $(x+1)^2 = 16$; г) $(2x-1)^2 = 4$;

б) $(x-1)^2 = 0$; д) $(3x+6)^2 = 100$;

в) $(x-5)^2 = 1$; е) $(3-2x)^2 = 25$.

Образец. $(x+3)^2 = 9$;

$x+3 = 3$ или $x+3 = -3$;

$x = 0$, $x = -6$.

Ответ. 0; -6.

299. а) Составьте формулу для вычисления площади S закрашенной фигуры (рис. 2.27). Выразите из этой формулы радиус круга.

б) Составьте формулу для вычисления площади S закрашенной фигуры (рис. 2.28). Выразите из этой формулы радиус большого круга и радиус маленького круга.

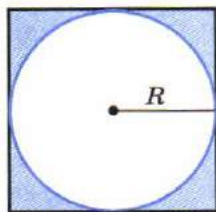


Рис. 2.27

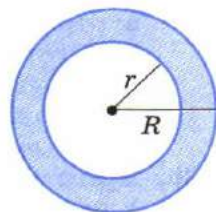


Рис. 2.28

300. Из формулы:

а) $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ выразите l ; в) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ выразите l ;

б) $\omega = \sqrt{\frac{t}{n}}$ выразите t ; г) $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ выразите L .



301. Найдите приближенно с одним знаком после запятой корни уравнения:

а) $x^2 = 82$; в) $x^2 - 5,7 = 0$; д) $300 = 2x^2$;

б) $x^2 = 363$; г) $x^2 - 12,2 = 0$; е) $4x^2 = 500$.

302. Найдите корни уравнения и сделайте проверку, подставив их в уравнение:

а) $(x - 4)^2 = 2$; б) $(x + 1)^2 = 3$; в) $(2 - x)^2 = 5$.

303. Решите уравнение:

а) $x^2 = 2$; г) $1 - x^2 = 2$;

б) $(x - 1)^2 = 2$; д) $1 + x^2 = 2$.

в) $x^2 - 1 = 2$;

304. Решите уравнение:

а) $2(x - 2)^2 = 8$; в) $3(x - 5)^2 = 6$; д) $\frac{2}{5}(x - 10)^2 = \frac{4}{5}$;

б) $\frac{1}{3}(1 - x)^2 = \frac{1}{3}$; г) $10(x - 3)^2 = 10$; е) $\frac{(x - 1)^2}{3} = \frac{16}{3}$.

305. Известно, что $a^2 + b^2 = 41$ и $ab = 20$. Найдём $a + b$. Чтобы решить задачу, умножим обе части второго равенства на 2, получим $2ab = 40$. Сложив это равенство с первым, получим

$$a^2 + b^2 + 2ab = 40 + 41,$$

$$(a + b)^2 = 81,$$

$$a + b = 9 \text{ или } a + b = -9.$$

Пользуясь рассмотренным приемом, найдите:

а) положительное значение суммы $a + b$, если $a^2 + b^2 = 82$ и $ab = 9$;

б) значения разности $a - b$, если $a^2 + b^2 = 106$ и $ab = 45$;

в) отрицательное значение разности $a - b$, если $a^2 + b^2 = 72$ и $ab = 18$;

г) значения суммы $a + b$, если $(a - b)^2 = 5$ и $ab = 1$;

д) положительное значение разности $a - b$, если $a + b = 8$ и $a^2 + b^2 = 40$.

306. Представьте в виде квадрата некоторого числа: а) $\sqrt{10}$; б) $2\sqrt{2}$.

307. Упростите:

а) $(\sqrt{\sqrt{8}})^2$; б) $(\sqrt{2\sqrt{3}})^2$; в) $(\sqrt{\sqrt{5}})^4$; г) $(\sqrt{3\sqrt{2}})^4$.

2.5 График зависимости $y = \sqrt{x}$

Построим в координатной плоскости график зависимости, которая задается равенством $y = \sqrt{x}$. Для этого сначала составим таблицу соответственных значений x и y . В качестве значений x , естественно, будем брать только положительные числа и 0, так как при отрицательных x выражение $\sqrt{x}$ смысла не имеет.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице, и проведем через них от начала координат плавную линию. Построенная линия — график зависимости $y = \sqrt{x}$ (рис. 2.29).

Этот график — ветвь такой же параболы, как и парабола $y = x^2$, но только расположенной горизонтально. Это является следствием того, что графики зависимостей $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$, где $x \geq 0$, симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 2.30).

Доказательство симметрии этих графиков основано на симметрии относительно прямой $y = x$ точек $(a; b)$ и $(b; a)$, координаты которых различаются только порядком. Возьмем какую-нибудь точку, принадлежащую параболе $y = x^2$, где $x \geq 0$, например точку $M(a; b)$. Симметричной ей относительно прямой $y = x$ будет точка $N(b; a)$. Так как точка $M(a; b)$ принадлежит правой ветви параболы $y = x^2$, то a и b — числа неотрицательные и $b = a^2$. Но тогда по определению арифметического квадратного кор-

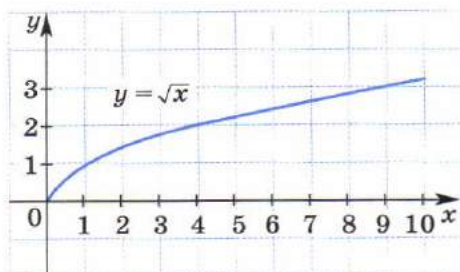


Рис. 2.29

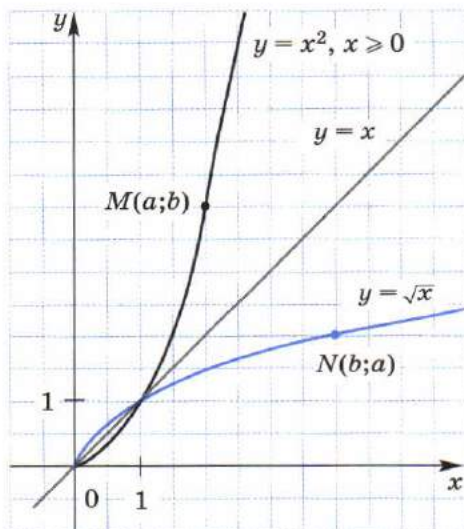


Рис. 2.30

ня $a = \sqrt{b}$, и значит, координаты точки $N(b; a)$ удовлетворяют равенству $y = \sqrt{x}$, т. е. эта точка принадлежит графику зависимости $y = \sqrt{x}$.

Таким образом, каждой точке параболы $y = x^2$, где $x \geq 0$, соответствует симметричная ей относительно прямой $y = x$ точка графика зависимости $y = \sqrt{x}$. Верно и обратное: каждой точке графика зависимости $y = \sqrt{x}$ соответствует симметричная ей относительно прямой $y = x$ точка параболы $y = x^2$, где $x \geq 0$. И мы приходим к выводу о том, что графики зависимостей $y = x^2$, где $x \geq 0$, и $y = \sqrt{x}$ симметричны относительно прямой $y = x$.

Отметим некоторые свойства графика зависимости $y = \sqrt{x}$.

1. График целиком расположен в первой координатной четверти, причем начало координат принадлежит графику.
2. Ось y является касательной к графику в точке $O(0; 0)$.
3. При движении по оси x слева направо график поднимается вверх, причем этот «подъем» хотя и замедляется, но неограничен, т. е. график пересекает любую горизонтальную прямую, расположенную выше оси x .



- 308.** Пользуясь графиком зависимости $y = \sqrt{x}$, найдите:
- а) значение выражения $\sqrt{x}$ при x , равном 2,5; 4,5; 8,5.
 - б) значение x , при котором $\sqrt{x} = 1,5$; 2,5.
- 309.** Определите, пересекаются ли график зависимости $y = \sqrt{x}$ и заданная прямая. Если да, то вычислите координаты точки пересечения:
- а) $x = 16$, $x = 10$, $x = -4$, $x = a$ ($a > 0$), $x = a$ ($a < 0$);
 - б) $y = 10$, $y = \sqrt{2}$, $y = -5$, $y = c$ ($c > 0$), $y = c$ ($c < 0$).
- 310.** Принадлежит ли графику зависимости $y = \sqrt{x}$ точка:
- а) (225; 15); в) (-16; 4); д) (27; $\sqrt{27}$);
 - б) (144; -12); г) (0,01; 0,1); е) ($\sqrt{15}$; 15)?
- 311.** Определите, как расположена относительно графика зависимости $y = \sqrt{x}$ заданная точка — принадлежит графику, расположена выше графика или ниже графика: $A(121; 11)$, $B(64; 10)$, $C(24; \sqrt{24})$, $D(38; 6)$, $E(0,2; 0,04)$, $F(0,04; 0,2)$.
- 312.** Какое приращение получает переменная y , где $y = \sqrt{x}$, при изменении x :
- а) от 0 до 10; б) от 10 до 20; в) от 20 до 30; г) от 100 до 110?
- Дайте приближенный ответ, используя калькулятор.

При выполнении упражнений 313 и 314 воспользуйтесь рисунком 2.30.

313. Сравните числа:

а) a и $\sqrt{a}$, если $0 < a < 1$; если $a > 1$;

б) a^2 и $\sqrt{a}$, если $0 < a < 1$; если $a > 1$.

314. Расположите в порядке возрастания числа:

а) 0,5, $\sqrt{0,5}$ и $0,5^2$; б) 12,5, $\sqrt{12,5}$ и $12,5^2$.



315. а) Постройте график зависимости $y = -\sqrt{x}$, заполнив предварительно следующую таблицу:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$-\sqrt{x}$											

б) При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{-x}$? Постройте график зависимости $y = \sqrt{-x}$.

316. (Задание с выбором ответа.) Даны точки $A(12; 4)$, $B(8; 2)$, $C(17; 5)$. Какой из отрезков не пересекает график зависимости $y = \sqrt{x}$?

А. АВ. Б. ВС. В. АС. Г. Все три отрезка.

317. Постройте в координатной плоскости график зависимости $y^2 = x$.

2.6

Свойства квадратных корней

В этом пункте рассматриваются свойства *арифметических квадратных корней*. Однако для краткости вместо «арифметический квадратный корень» мы будем говорить «квадратный корень» или просто «корень».

Прежде всего остановимся на свойстве, которое, по сути, вам уже знакомо. Вы знаете, что, например, $(\sqrt{2})^2 = 2$, $(\sqrt{3})^2 = 3$, $(\sqrt{5})^2 = 5$. Такое же равенство можно записать для любого неотрицательного числа a . А именно:

При любом $a \geq 0$ $(\sqrt{a})^2 = a$.

Это равенство непосредственно следует из определения квадратного корня.

Рассмотрим теперь свойства, которые позволяют преобразовать корень из произведения и частного двух неотрицательных чисел. Начнем с примера.

Пусть нужно найти значение выражения $\sqrt{11^2 \cdot 15^2}$. Мы это делали так:

$$\sqrt{11^2 \cdot 15^2} = \sqrt{(11 \cdot 15)^2} = 11 \cdot 15 = 165.$$

Однако легко заметить, что если извлечь корень из каждого множителя отдельно и результаты перемножить, то получится то же число:

$$\sqrt{11^2 \cdot 15^2} = \sqrt{11^2} \cdot \sqrt{15^2} = 11 \cdot 15 = 165.$$

Этот результат не случаен. Справедливо следующее свойство:

Корень из произведения неотрицательных чисел равен произведению корней из этих чисел.

На символическом языке это свойство записывается так:

Для любых $a \geq 0$ и $b \geq 0$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Доказательство. Чтобы доказать равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, нужно убедиться, что выполняются два условия:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0 \text{ и } (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = ab.$$

Первое очевидно: так как $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ — неотрицательные числа, то их произведение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ также неотрицательно.

Чтобы убедиться в выполнении второго условия, возведем произведение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ в квадрат:

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Таким образом, теорема доказана. Заметим, что это свойство корней распространяется на случай произведения любого числа множителей.

Аналогичную теорему можно доказать и для частного:

Корень из частного от деления неотрицательного числа на положительное равен частному корней из этих чисел.

На символическом языке это свойство записывается так:

Для любых $a \geq 0$ и $b > 0$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Приведем примеры применения рассмотренных свойств.

■ Пример 1. $\sqrt{81 \cdot 25 \cdot 64} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{64} = 9 \cdot 5 \cdot 8 = 360.$

■ Пример 2. $\sqrt{\frac{49}{121}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{121}} = \frac{7}{11}.$

Если равенства $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ прочесть справа налево, то мы получим *правила умножения и деления корней*:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, где $a \geq 0$ и $b \geq 0$;

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, где $a \geq 0$ и $b > 0$.

■ Пример 3. $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6.$

■ Пример 4. $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5.$

Воспользуемся свойством корня из произведения для преобразования выражения $\sqrt{48}$:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = 4\sqrt{3}.$$

В таких случаях говорят, что *множитель вынесли из-под знака корня*.

Нетрудно выполнить и обратное преобразование — *внести множитель под знак корня*. Для этого нужно будет воспользоваться правилом умножения корней:

$$4\sqrt{3} = \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{48}.$$

Подчеркнем, что под корень можно вносить только положительный множитель. А если перед корнем стоит отрицательное число, то минус там и должен остаться. Например:

$$-4\sqrt{3} = -\sqrt{4^2} \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{4^2 \cdot 3} = -\sqrt{48}.$$

А

318. Упростите:

а) $2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}$;

в) $3\sqrt{7} \cdot 10\sqrt{7}$;

д) $(3\sqrt{8})^2$;

б) $3\sqrt{15} \cdot 6\sqrt{15}$;

г) $(2\sqrt{11})^2$;

е) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$.

319. Докажите, что:

а) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$;

г) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Образец. Докажем, что $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Вспользуемся определением арифметического корня. Так как $3\sqrt{2} \geq 0$ и $(3\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$, то по определению $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Вычислите (320—323):

320. а) $\sqrt{15 \cdot 121}$; в) $\sqrt{1,44 \cdot 36}$; д) $\sqrt{0,09 \cdot 196}$;

б) $\sqrt{16 \cdot 900}$; г) $\sqrt{0,81 \cdot 0,49}$; е) $\sqrt{1,69 \cdot 0,25}$.

321. а) $\sqrt{\frac{25}{81}}$; в) $\sqrt{\frac{0,49}{4}}$; д) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; ж) $\sqrt{2\frac{14}{25}}$;

б) $\sqrt{\frac{121}{36}}$; г) $\sqrt{\frac{1,44}{25}}$; е) $\sqrt{1\frac{13}{36}}$; з) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$.

322. а) $\sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{9}{25}}$; б) $\sqrt{\frac{64}{9} \cdot \frac{4}{49}}$; в) $\sqrt{\frac{0,25 \cdot 49}{9}}$; г) $\sqrt{\frac{169 \cdot 81}{400}}$.

323. а) $\sqrt{4 \cdot 9 \cdot 0,36}$; в) $\sqrt{2,25 \cdot 0,04 \cdot 900}$; д) $\sqrt{2\frac{1}{4} \cdot 1\frac{9}{16} \cdot \frac{1}{100}}$;

б) $\sqrt{0,64 \cdot 0,04 \cdot 1,21}$; г) $\sqrt{9,61 \cdot 0,01 \cdot 400}$; е) $\sqrt{2\frac{14}{121} \cdot 1\frac{7}{9} \cdot \frac{1}{9}}$.

324. а) Докажите, что $\sqrt{5^8} = 5^4$; $\sqrt{3^{20}} = 3^{10}$.

б) Докажите свойство: $\sqrt{a^{2n}} = a^n$, где $a \geq 0$.

325. Пользуясь свойством, доказанным в упражнении 324, упростите выражение:

а) $\sqrt{2^{22}}$; б) $\sqrt{3^{14}}$; в) $\sqrt{2^{100} \cdot 3^{50}}$; г) $\sqrt{5^{28} \cdot 2^{20}}$.

Вычислите (326—327):

326. а) $\sqrt{24^2 \cdot 3^2}$; в) $\sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^6}$; д) $\sqrt{\frac{3^2 \cdot 2^8}{5^2}}$;

б) $\sqrt{13^2 \cdot 2^6}$; г) $\sqrt{3^4 \cdot 5^4 \cdot 2^8}$; е) $\sqrt{\frac{3^4}{2^6 \cdot 5^6}}$.

327. а) $\sqrt{125 \cdot 5}$; в) $\sqrt{48 \cdot 27}$; д) $\sqrt{50 \cdot 72}$;

б) $\sqrt{8 \cdot 98}$; г) $\sqrt{810 \cdot 10}$; е) $\sqrt{30 \cdot 480}$.

Образец. $\sqrt{135 \cdot 15} = \sqrt{5 \cdot 27 \cdot 5 \cdot 3} = \sqrt{5^2 \cdot 3^4} = 45$.

328. Возведите число 34 в квадрат. Пользуясь полученным результатом, вычислите: $\sqrt{1156}$, $\sqrt{115\,600}$, $\sqrt{11,56}$, $\sqrt{0,1156}$.

329. Известно, что $\sqrt{45} \approx 6,708$. Найдите приближенное значение выражения: $\sqrt{4500}$, $\sqrt{450\,000}$, $\sqrt{0,45}$, $\sqrt{0,0045}$.

330. (Задание с выбором ответа.) Выберите выражение, равное произведению $\sqrt{x} \cdot \sqrt{n}$ (x и n — положительные числа).

А. $x\sqrt{n}$. Б. $n\sqrt{x}$. В. $\sqrt{xn}$. Г. xn .

331. Вычислите:

а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$; д) $\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$; и) $(2\sqrt{3})^2 \cdot 5$;

б) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$; е) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}}$; к) $\frac{(3\sqrt{2})^2}{36}$;

в) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2}$; ж) $\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{40}}$; л) $(\sqrt{3})^3 \cdot \sqrt{48}$;

г) $\sqrt{242} \cdot \sqrt{8}$; з) $\frac{\sqrt{300}}{\sqrt{27}}$; м) $\frac{25\sqrt{3}}{(5\sqrt{3})^3}$.

332. Упростите:

а) $2\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}$; г) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{12}$; ж) $\frac{\sqrt{333}}{\sqrt{111}}$;

б) $4\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{3}$; д) $\frac{\sqrt{15} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{10}}{3}$; з) $\frac{3\sqrt{51}}{2\sqrt{17}}$;

в) $\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$; е) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}}$; и) $\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{10}}$.

333. Найдите с помощью калькулятора приближенное значение выражения с тремя знаками после запятой:

а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$; б) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{8}$; в) $\frac{\sqrt{505}}{\sqrt{101}}$; г) $\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}$.

У к а з а н и е. Сначала представьте выражение в виде $\sqrt{a}$.

334. Сравните значения выражений:

а) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ и $\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}$; в) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{12}}$ и $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}}$;

б) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}$ и $\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}$; г) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$.

335. Являются ли данные числа взаимно обратными:

а) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\frac{5}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sqrt{7}$ и $\frac{\sqrt{7}}{7}$; г) $\frac{6}{\sqrt{7}}$ и $\frac{\sqrt{6}}{7}$?

У к а з а н и е. Проверьте, равно ли произведение данных чисел единице.

Вынесите множитель из-под знака корня (336—337):

336. а) $\sqrt{50}$; в) $\sqrt{27}$; д) $\sqrt{48}$; ж) $\sqrt{300}$;

б) $\sqrt{45}$; г) $\sqrt{98}$; е) $\sqrt{20}$; з) $\sqrt{450}$.

337. а) $2\sqrt{8}$; в) $\frac{1}{2}\sqrt{72}$; д) $0,4\sqrt{75}$; ж) $\frac{\sqrt{125}}{10}$;

б) $4\sqrt{18}$; г) $\frac{1}{3}\sqrt{54}$; е) $1,5\sqrt{32}$; з) $\frac{\sqrt{96}}{8}$.

338. (Задание с выбором ответа.) Упростите выражение $\frac{\sqrt{48}}{2}$.

А. $\sqrt{24}$. Б. $2\sqrt{6}$. В. $2\sqrt{3}$. Г. $8\sqrt{3}$.

Внесите множитель под знак корня (339—340):

339. а) $3\sqrt{2}$; в) $2\sqrt{3}$; д) $\frac{1}{2}\sqrt{12}$; ж) $4\sqrt{\frac{1}{32}}$;

б) $2\sqrt{5}$; г) $7\sqrt{2}$; е) $\frac{1}{3}\sqrt{27}$; з) $5\sqrt{0,4}$.

340. а) $-5\sqrt{6}$; б) $-10\sqrt{7}$; в) $-4\sqrt{5}$; г) $-6\sqrt{2}$.

341. (Задание с выбором ответа.) Выберите выражение, равное $-2\sqrt{3}$.

А. $\sqrt{6}$. Б. $-\sqrt{6}$. В. $\sqrt{12}$. Г. $-\sqrt{12}$.

342. Сравните значения выражений:

а) $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{8}$; в) $2\sqrt{6}$ и $3\sqrt{3}$; д) $5\sqrt{\frac{3}{5}}$ и $3\sqrt{\frac{5}{3}}$;

б) $\sqrt{45}$ и $3\sqrt{5}$; г) $2\sqrt{\frac{1}{8}}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; е) $\frac{1}{3}\sqrt{20}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{8}$.

343. Расположите в порядке возрастания:

а) $3\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$ и 4; в) $4\sqrt{3}$; $2\sqrt{10}$ и $5\sqrt{2}$;

б) 5; $2\sqrt{7}$ и $3\sqrt{3}$; г) $3\sqrt{6}$; $6\sqrt{2}$ и $2\sqrt{13}$.

344. Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

а) $0,2ab$ при $a = \sqrt{15}$, $b = 2\sqrt{5}$; г) $-\frac{3x^2}{2}$ при $x = 2\sqrt{3}$;

б) $-\frac{1}{3}xy$ при $x = \sqrt{6}$, $y = \sqrt{3}$; д) $0,5x^3$ при $x = 3\sqrt{2}$;

в) $\frac{a^2}{4}$ при $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$; е) $8y^3$ при $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

345. Сократите дробь:

а) $\frac{\sqrt{4x}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{8a}}{6}$; в) $\frac{27}{\sqrt{81m}}$; г) $\frac{20}{\sqrt{50y}}$.



Найдите значение выражения (346—347):

346. а) $\sqrt{2,5 \cdot 10^5}$; в) $\sqrt{4,9 \cdot 10^{-3}}$;

б) $\sqrt{1,6 \cdot 10^7}$; г) $\sqrt{8,1 \cdot 10^{-5}}$.

347. а) $\sqrt{30 \cdot 66 \cdot 220}$; б) $\sqrt{54 \cdot 48 \cdot 50}$; в) $\sqrt{3^3 \cdot 12^5}$.

348. Упростите выражение:

а) $4\sqrt{5} \cdot \sqrt{45} \cdot \sqrt{50}$; в) $2\sqrt{15} \cdot 3\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{30}$;

б) $3\sqrt{27} \cdot \sqrt{48} \cdot \sqrt{75}$; г) $5\sqrt{18} \cdot 4\sqrt{40} \cdot 2\sqrt{35}$.

349. Упростите выражение:

а) $(2a\sqrt{3a})^2$; в) $2x \cdot (\sqrt{8x})^2$; д) $3m(\sqrt{2m})^3$;

б) $(5b\sqrt{6b})^2$; г) $(y\sqrt{2y})^3$; е) $\frac{(\sqrt{6n})^3}{(\sqrt{2n})^2}$.

350. Расположите в порядке возрастания:

а) $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{\frac{3}{5}}$, $2\sqrt{0,2}$, 1 , $-2\sqrt{\frac{1}{2}}$, $-\sqrt{0,6}$;

б) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\frac{1}{4}$; г) $\frac{5}{12}$, $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

351. (Задание с выбором ответа.) Какая точка принадлежит графику зависимости $y = \sqrt{x}$?

А. $(15; 3\sqrt{5})$. Б. $(3\sqrt{5}; 15)$. В. $(12; 2\sqrt{3})$. Г. $(2\sqrt{3}; 12)$.

Вам уже приходилось применять свойства арифметических квадратных корней для преобразования выражений, содержащих радикалы. Разберем более сложные примеры.

■ **Пример 1.** Рассмотрим сумму $\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{8}$.

В каждом слагаемом можно вынести множитель из-под знака корня:

$$\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{8} = \sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{4 \cdot 2} = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}.$$

Теперь слагаемые содержат корни с одинаковыми подкоренными выражениями. Такие выражения, как $3\sqrt{2}$, $-4\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, называют *подобными радикалами*, и к ним применимо правило приведения подобных слагаемых. Поэтому сумму можно упростить, сложив коэффициенты и приписав общий множитель $\sqrt{2}$. Так как $3 - 4 + 2 = 1$, то $3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

■ **Пример 2.** Упростим выражение

$$(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

Данное выражение является произведением суммы двух выражений на их разность. Поэтому для его преобразования можно применить известную формулу $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$:

$$(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 3 - 2 = 10.$$

■ **Пример 3.** Рассмотрим дробь $\frac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$. Ее можно преобразовать в равную дробь, не содержащую корня в знаменателе. Для этого достаточно числитель и знаменатель дроби умножить на $\sqrt{2}$. Получим

$$\frac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}}{4(\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{14}}{8}.$$

Говорят, что мы *освободились от иррациональности в знаменателе дроби*. В результате мы получили более простое выражение; оно удобнее, например, для вычисления приближенного значения данной дроби.

■ **Пример 4.** Упростим выражение $\sqrt{x^2}$.

Этот пример не такой простой, как может показаться на первый взгляд. Результат зависит от знака x .

Подставим вместо x какое-нибудь положительное число, например число 8. Тогда $\sqrt{x^2} = \sqrt{8^2} = 8$, т. е. в данном случае $\sqrt{x^2} = x$. Возь-

мем теперь отрицательное значение x , например -8 . Тогда $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} = 8$, т. е. в этом случае $\sqrt{x^2} = -x$. Очевидно, что при любом x выполняется равенство

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

В самом деле:

если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и $|x|^2 = x^2$;

если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$.

Так как $|x|$ — число неотрицательное и $|x|^2 = x^2$, то по определению квадратного корня $\sqrt{x^2} = |x|$.

А

352. Назовите подобные радикалы:

- | | |
|---|---|
| а) $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$; | г) $\sqrt{15}$, $-3\sqrt{5}$, $-2\sqrt{15}$, $5\sqrt{3}$; |
| б) $\sqrt{5}$, $6\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$; | д) $2\sqrt{x}$, $3\sqrt{5}$, $\sqrt{x}$; |
| в) $-2\sqrt{7}$, $7\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{7}$; | е) $3\sqrt{a}$, $8\sqrt{b}$, $3\sqrt{c}$, $8\sqrt{a}$. |

353. Приведите подобные слагаемые:

- | | |
|---|--|
| а) $5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - \sqrt{5}$; | г) $3\sqrt{a} - 2\sqrt{a}$; |
| б) $\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + \sqrt{7}$; | д) $\sqrt{c} + 8\sqrt{c} - 5\sqrt{c}$; |
| в) $\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$; | е) $5\sqrt{x} + \sqrt{x} + 3\sqrt{y} + \sqrt{y}$. |

354. Упростите выражение:

- | | | |
|-------------------------------|---|--|
| а) $3\sqrt{3} + \sqrt{12}$; | г) $4\sqrt{2} - \sqrt{50}$; | ж) $\sqrt{8} + 2\sqrt{18} - \sqrt{72}$; |
| б) $\sqrt{45} - 2\sqrt{5}$; | д) $\sqrt{2} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$; | з) $2\sqrt{20} - \sqrt{45} - 2\sqrt{12}$; |
| в) $\sqrt{48} - 10\sqrt{3}$; | е) $2\sqrt{3} - \sqrt{27} + 2\sqrt{48}$; | и) $2\sqrt{28} - 0,5\sqrt{24} + 2\sqrt{7}$. |

355. Рациональным или иррациональным является значение выражения:

- | | |
|--|---|
| а) $10\sqrt{3} + 4 - \sqrt{300}$; | в) $3\sqrt{28} + 2\sqrt{7} - 2\sqrt{5}$; |
| б) $\sqrt{162} - 10\sqrt{2} + \sqrt{27}$; | г) $\sqrt{48} - 5 - 4\sqrt{3}$? |

Преобразуйте выражение, используя формулы сокращенного умножения (356—357):

- | | |
|---|---|
| 356. а) $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$; | г) $(4 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})$; |
| б) $(\sqrt{6} - 1)(\sqrt{6} + 1)$; | д) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$; |
| в) $(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})$; | е) $(\sqrt{10} + \sqrt{11})(\sqrt{11} - \sqrt{10})$. |

357. а) $(1 - \sqrt{5})^2$; в) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$; д) $(5 - \sqrt{5})^2 + 5\sqrt{5}$;
 б) $(\sqrt{10} - 2)^2$; г) $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2$; е) $(\sqrt{11} + \sqrt{6})^2 - 17$.

358. Найдите значение выражения $x^2 - 4$ при:

- а) $x = \sqrt{3}$; в) $x = \sqrt{3} + 1$;
 б) $x = \sqrt{3} - 1$; г) $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

359. Найдите значение выражения $1 - a^2$ при:

- а) $a = \sqrt{5}$; в) $a = 1 - \sqrt{5}$;
 б) $a = \sqrt{5} - 1$; г) $a = 1 + \sqrt{5}$.

360. Найдите значения выражений $\frac{xy}{x+y}$ и $\frac{x-y}{xy}$ при:

- а) $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{8}$; в) $x = \sqrt{6} - \sqrt{3}, y = \sqrt{6} + \sqrt{3}$;
 б) $x = 2 - \sqrt{3}, y = 2 + \sqrt{3}$; г) $x = \sqrt{5} + \sqrt{2}, y = \sqrt{5} - \sqrt{2}$.

361. Периметр квадрата (в см) равен $4\sqrt{2} + 16$. Найдите площадь квадрата.

362. Найдите площадь прямоугольника, если:

- а) его периметр равен 6 см, а одна из сторон $\sqrt{2}$ см;
 б) его периметр равен 14 см, а одна из сторон $3 + \sqrt{2}$ см.

363. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

- а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; д) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$; ж) $\frac{7}{3\sqrt{7}}$;
 б) $\frac{16}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{7}{\sqrt{7}}$; е) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$; з) $\frac{4}{3\sqrt{6}}$.

364. Из приведенных ниже выражений выберите выражения, равные $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{3}{\sqrt{6}}.$$

365. (Задание с выбором ответа.) Какое из следующих выражений не равно дроби $\frac{3}{\sqrt{12}}$?

- А. $\frac{3}{2\sqrt{3}}$. Б. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. В. $\frac{\sqrt{12}}{4}$. Г. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

366. Упростите выражение:

- а) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$; б) $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$; в) $\sqrt{(1 - \sqrt{5})^2}$; г) $\sqrt{(\sqrt{10} - 3)^2}$.

367. Упростите выражение (буквами обозначены положительные числа):

а) $\sqrt{49a^2}$; в) $\sqrt{8x^2}$; д) $\sqrt{\frac{y^2}{2}}$;

б) $\sqrt{3n^2}$; г) $\sqrt{\frac{m^2}{4}}$; е) $\sqrt{12a^3}$.



Упростите выражение (368—369):

368. а) $(\sqrt{28} - 3\sqrt{5}) - (\sqrt{7} + \sqrt{20})$;

б) $(3\sqrt{32} - 2\sqrt{18}) + (\sqrt{50} - 2\sqrt{8})$;

в) $(\sqrt{27} - 3\sqrt{45} - \sqrt{20}) - (3\sqrt{12} - 2\sqrt{80})$;

г) $(3\sqrt{60} - 2\sqrt{54}) + (4\sqrt{15} + 6\sqrt{6} - \sqrt{600})$.

369. а) $\sqrt{9x} - \sqrt{4x} - \sqrt{16y} + \sqrt{9y}$;

б) $\sqrt{0,25m} - \sqrt{0,25n} + \sqrt{0,16n} - \sqrt{0,16m}$.

370. Сократите дроби:

а) $\frac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{12} + \sqrt{20}}{3\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + \sqrt{45}}$; б) $\frac{\sqrt{28} - 2\sqrt{18} - 2\sqrt{12}}{6\sqrt{32} + 4\sqrt{48} - 8\sqrt{7}}$.

Упростите выражение (371—372):

371. а) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$; в) $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{6})^2$;

б) $(\sqrt{32} - 3\sqrt{12})(2\sqrt{8} + \sqrt{108})$; г) $(2 - \sqrt{6})^2 - (5 + \sqrt{2})^2$.

372. а) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$; в) $\frac{\sqrt{\sqrt{30} - \sqrt{5}}}{5} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{30} + \sqrt{5}}}{5}$;

б) $\sqrt{4 - \sqrt{7}} \cdot \sqrt{4 + \sqrt{7}}$; г) $\frac{\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{15}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{15} - \sqrt{3}}}{3}$.

373. Докажите, что:

а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{6}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{6}} = 3$;

б) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = 2$;

в) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = 1$.

374. Упростите:

а) $(\sqrt{10 - \sqrt{19}} + \sqrt{10 + \sqrt{19}})^2$; б) $(\sqrt{2\sqrt{5} + 4} - \sqrt{2\sqrt{5} - 4})^2$.

375. (Задание с выбором ответа.)

а) Выберите выражение, равное $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$.

А. $\sqrt{7} - 3$. Б. $\sqrt{7} - \sqrt{3}$. В. $3 - \sqrt{7}$.

б) Выберите выражение, равное $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$.

А. $\sqrt{6} - 2$. Б. $\sqrt{2} - \sqrt{6}$. В. $\sqrt{6} - \sqrt{2}$.

376. Верно ли равенство:

а) $\sqrt{7 - \sqrt{40}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$; в) $1 - 2\sqrt{7} = \sqrt{29 - 4\sqrt{7}}$;

б) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$?

377. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

378. Найдите значение выражения:

а) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ при $x = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}$;

б) $(m - 1)(m - 2)(m - 3)(m - 4)$ при $m = \frac{10 + \sqrt{2}}{4}$.

379. Запишите выражение, на которое можно умножить данный двучлен, чтобы в произведении не содержалось знака корня. Проверьте, выполнив умножение:

а) $(2 + \sqrt{3}) \cdot \dots$; в) $(\sqrt{7} - \sqrt{5}) \cdot \dots$;

б) $(2\sqrt{5} - 1) \cdot \dots$; г) $(x + a\sqrt{y}) \cdot \dots$.

380. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$; в) $\frac{7 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$; д) $\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{10} - 3}$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{11} + \sqrt{5}}{\sqrt{11} - \sqrt{5}}$; е) $\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}$.

Образец. $\frac{2}{2 + \sqrt{6}} = \frac{2(2 - \sqrt{6})}{(2 + \sqrt{6})(2 - \sqrt{6})} = \frac{2(2 - \sqrt{6})}{-2} = \sqrt{6} - 2$.

381. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{1+\sqrt{5}-\sqrt{6}}$; б) $\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

382. Упростите выражение (буквами обозначены положительные числа):

а) $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{ab}}{a}$; б) $\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{y}} - \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\sqrt{y}}{y}$.

383. 1) Докажите, что верно равенство:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1.$$

У к а з а н и е. Освободитесь от иррациональности в знаменателе каждой дроби.

2) Упростите выражение:

а) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$; б) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$.

384. Упростите выражение:

а) $\sqrt{81a^2}$, если $a < 0$; в) $\sqrt{0,16a^2c^2}$, если $a < 0$, $c < 0$;
б) $\sqrt{24x^2}$, если $x > 0$; г) $\sqrt{8m^2n^2}$, если $m < 0$, $n > 0$.

385. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{2x^3}$; б) $\sqrt{\frac{x^5}{6}}$; в) $\sqrt{\frac{x^3}{y^3}}$; г) $\sqrt{(x+y)^3}$.

386. Упростите выражение, если n — целое число:

а) $\sqrt{5^{2n}}$; б) $\sqrt{y^{4n}}$; в) $\sqrt{x^{2n}}$.

387. Постройте график зависимости:

а) $y = \sqrt{x^2}$; б) $y = (\sqrt{x})^2$.

388. (Задача-исследование.)

1) Заметьте закономерность и запишите следующие три числа в последовательности: $2\frac{2}{3}$, $3\frac{3}{8}$, $4\frac{4}{15}$, $5\frac{5}{24}$, ...

2) Проверьте равенства: $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$, $\sqrt{4\frac{4}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}}$.

Составьте несколько аналогичных равенств.

3) Запишите соответствующее равенство в буквенном виде и докажите его.

Если объем куба равен 8 см^3 , то ребро куба равно 2 см, так как $2^3 = 8$. Говорят, что число 2 — это кубический корень из 8.

Определение

Число b называют кубическим корнем из числа a , если $b^3 = a$.

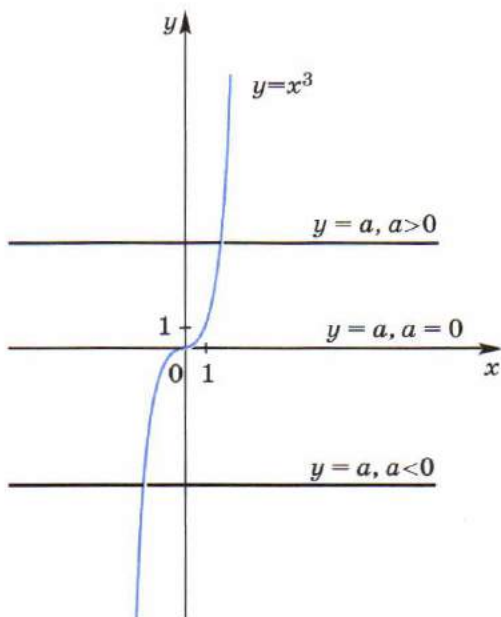
Кубический корень из числа a обозначают $\sqrt[3]{a}$.

Например:

$$\sqrt[3]{0,001} = 0,1, \text{ так как } (0,1)^3 = 0,001;$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \text{ так как } (-2)^3 = -8.$$

Чтобы выяснить вопрос о том, для любого ли числа существует кубический корень, обратимся, как и в случае с квадратным корнем, к графику. Только теперь возьмем *кубическую параболу* — множество точек плоскости, координаты которых связаны зависимостью $y = x^3$.



Построим график зависимости $y = x^3$ и проведем горизонтальную прямую $y = a$, где a — произвольное число (рис. 2.31). Из графических соображений ясно, что при любом a эта прямая пересекает график $y = x^3$, причем только в одной точке. Ордината точки пересечения равна a , а ее абсцисса — число, куб которого равен a , т. е. $\sqrt[3]{a}$.

Если $a > 0$, то $\sqrt[3]{a} > 0$;

если $a = 0$, то $\sqrt[3]{a} = 0$;

если $a < 0$, то $\sqrt[3]{a} < 0$.

Из определения кубического корня следует, что при любом a

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a.$$

Например,

$$(\sqrt[3]{28})^3 = 28; (\sqrt[3]{-8})^3 = -8.$$

Рис. 2.31

В заключение заметим, что квадратный и кубический корни являются частными случаями более общего понятия — корня n -й степени (n — натуральное число, большее 1).

Вы легко можете догадаться, как определяется корень n -й степени: число b называется корнем n -й степени из числа a , если $b^n = a$.

Свойства корня n -й степени различаются в зависимости от того, четным или нечетным числом является показатель корня n . Все корни четной степени по своим свойствам похожи на квадратный корень, а нечетной степени — на кубический корень.

Квадратный корень называют еще корнем второй степени, а кубический — корнем третьей степени.

Для записи корня n -й степени используют знак $\sqrt[n]{}$, где n — показатель корня, причем в случае четного n этот знак применяется для обозначения неотрицательного корня. При $n = 2$ показатель не пишется.

Приближенные значения корней вычисляют с помощью калькулятора. Но если для извлечения квадратного корня достаточно ввести подкоренное число и нажать кнопку $\sqrt{}$, которая имеется на многих калькуляторах, то, чтобы вычислить, например, корень 3-й или 4-й степени, придется выполнить более сложную последовательность действий. Причем алгоритм извлечения корня может варьироваться в зависимости от того, калькулятор какой марки вы используете.

На некоторых калькуляторах имеется символ $\sqrt[n]{}$, и тогда им можно воспользоваться для извлечения корня любой степени.

Но есть и другая возможность. Дело в том, что в математике $\sqrt[n]{a}$ для положительных a записывают в виде степени $a^{\frac{1}{n}}$ (например, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$). И поэтому для извлечения корня можно использовать кнопку с символом степени y^x .

Последовательность действий, которую при этом придется выполнить, зависит от модели калькулятора. Так, значение выражения $\sqrt[3]{9}$ на некоторых калькуляторах вычисляется следующим образом:

$$\boxed{9} \boxed{y^x} \boxed{3} \boxed{\frac{1}{x}} \boxed{=}$$

После нажатия указанных кнопок на экране высветится число 2.0800838. Взяв, например, два знака после запятой, получим, что $\sqrt[3]{9} \approx 2,08$.

389. Заполните таблицу кубов натуральных чисел от 1 до 10:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^3										

С помощью таблицы найдите значение выражения:

- а) $\sqrt[3]{8}$; в) $\sqrt[3]{-64}$; д) $\sqrt[3]{\frac{1}{729}}$; ж) $\sqrt[3]{-\frac{1}{512}}$;
 б) $\sqrt[3]{125}$; г) $\sqrt[3]{-216}$; е) $\sqrt[3]{\frac{1}{1000}}$; з) $\sqrt[3]{343\,000}$.

390. Укажите два последовательных целых числа, между которыми заключено число:

- а) $\sqrt[3]{40}$; б) $\sqrt[3]{80}$; в) $\sqrt[3]{200}$; г) $\sqrt[3]{300}$.

391. Найдите с помощью калькулятора приближенное значение с одним знаком после запятой следующего числа:

- а) $\sqrt[3]{2}$; в) $\sqrt[3]{36}$; д) $\sqrt[3]{65,5}$;
 б) $\sqrt[3]{10}$; г) $\sqrt[3]{0,1}$; е) $\sqrt[3]{0,05}$.

392. Какие из чисел 15, -18, 56, -110 можно подставить вместо a в выражения $\sqrt{a}$ и $\sqrt[3]{a}$ так, чтобы они имели смысл? Подставьте в каждое из выражений допустимые значения a . Между какими соседними целыми числами заключено значение полученного выражения?

393. 1) Заполните таблицу, указывая приближенные значения $\sqrt[3]{x}$ с одним знаком после запятой (используйте калькулятор):

x	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sqrt[3]{x}$											

2) Пользуясь полученными результатами, заполните таблицу для отрицательных значений x :

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
$\sqrt[3]{x}$										

3) Отметьте в координатной плоскости точки с координатами $(x; \sqrt[3]{x})$ и, соединив их плавной линией, постройте график зависимости $y = \sqrt[3]{x}$.

394. В одной системе координат постройте графики зависимостей $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$. Как расположены относительно прямой $y = x$ графики этих зависимостей?

395. а) Объем цилиндра, у которого диаметр основания равен высоте (рис. 2.32), вычисляется по формуле $V = 2\pi r^3$, где r — радиус основания. Выразите из этой формулы радиус основания r .

б) Запишите формулу для вычисления объема прямоугольного параллелепипеда, в основании которого квадрат со стороной a и высота которого в два раза больше стороны основания (рис. 2.33). Выразите из этой формулы сторону основания a .

396. Объем шара вычисляется по формуле $V = \frac{\pi D^3}{6}$,

где D — диаметр шара. Выразите из этой формулы диаметр шара D . Найдите приближенное значение диаметра с точностью до целых, если $V = 34 \text{ дм}^3$, $\pi \approx 3,14$.

397. Вычислите: а) $\sqrt[4]{81}$; б) $\sqrt[5]{32}$; в) $\sqrt[6]{1\,000\,000}$; г) $\sqrt[5]{1}$.

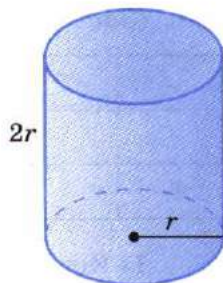


Рис. 2.32

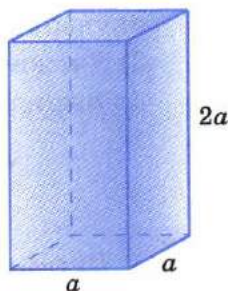


Рис. 2.33

Б

398. Объем правильного тетраэдра (треугольной пирамиды, все ребра которой равны) вычисляется по формуле $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$, где a — длина ребра тетраэдра. Выразите из этой формулы длину ребра a .

399. Нужно изготовить воздушный шар объемом 8 м^3 . Сколько метров ткани шириной 2 м потребуется для изготовления этого шара? (При расчетах считайте $\pi \approx 3$; формула площади поверхности шара $S = 4\pi R^2$, где R — радиус шара.) Сделайте грубую прикидку, выразив результат в целых метрах.

400. Как с помощью калькулятора найти приближенное значение $\sqrt[5]{45}$? Найдите с помощью калькулятора приближенное значение с тремя знаками после запятой: а) $\sqrt[5]{124}$; б) $\sqrt[6]{50}$; в) $\sqrt[4]{30}$.

401. (Задача-исследование.) Заполните таблицу:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	3
$\sqrt{x}$								
$\sqrt[3]{x}$								

1) Используя данные таблицы, сравните $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$ при: $x = 0$; $x = 1$; $x > 1$; $0 < x < 1$.

2) Постройте в одной и той же системе координат на промежутке $[0; 3]$ графики зависимостей $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$ (за единственный отрезок примите 10 клеток).

3) Укажите промежутков, на котором $\sqrt[3]{x} > \sqrt{x}$; $\sqrt[3]{x} < \sqrt{x}$.

4) Выпишите в порядке возрастания числа:

$$\sqrt{7,4}; \sqrt{10}; \sqrt{0,96}; \sqrt{0,51}; \sqrt[3]{7,4}; \sqrt[3]{5,1}; \sqrt[3]{0,96}; 1.$$

2.9

Двойные радикалы

(Для тех, кому интересно)

Двойным радикалом называют выражение вида $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$, где a , b , c — целые числа. Отметим, что это не «настоящий» математический термин, а рабочее название, употребляющееся в разговорном математическом языке. При этом считается, конечно, что из числа c корень не извлекается, или, говоря более точно, число c не является квадратом натурального числа.

Двойной радикал обычно пытаются записать более просто, например в том же виде, что и подкоренное выражение, т. е. в виде $x + y\sqrt{c}$, где x и y — целые числа. Так, нетрудно убедиться, что

$$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}.$$

В самом деле, $(3 - \sqrt{2})^2 = 9 - 6\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 11 - 6\sqrt{2}$ и $3 - \sqrt{2} > 0$.

Однако вы здесь имели, по существу, готовый ответ, и совершенно не ясно, как он получен. А найти решение можно следующим образом. Наша задача — записать выражение $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$, если это возможно, в виде $x + y\sqrt{2}$, где x и y — целые числа. Поэтому мы запишем равенство

$$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = x + y\sqrt{2}$$

и попытаемся подобрать такие целые числа x и y , чтобы оно было верным.

Это равенство можно преобразовать так:

$$11 - 6\sqrt{2} = (x + y\sqrt{2})^2, \quad 11 - 6\sqrt{2} = x^2 + 2xy\sqrt{2} + 2y^2,$$

$$11 - 6\sqrt{2} = (x^2 + 2y^2) + 2xy\sqrt{2}.$$

Далее будем искать такие целые числа x и y , чтобы выполнялись равенства

$$x^2 + 2y^2 = 11 \text{ и } 2xy = -6.$$

Из второго равенства получаем, что $xy = -3$. Очевидно, что есть два варианта:

$$x = 3, y = -1 \text{ или } x = -3, y = 1.$$

Обе пары удовлетворяют и первому равенству, поэтому выражение $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$ равно либо $3 - \sqrt{2}$, либо $-3 + \sqrt{2}$.

Однако $\sqrt{2} < 3$, так что $-3 + \sqrt{2} < 0$, и поэтому

$$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}.$$

Иногда двойной радикал $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$ нельзя представить в виде $x + y\sqrt{c}$, где x, y — целые числа, но тем не менее от «внешнего» знака корня избавиться все же удастся.

Попытаемся, например, представить выражение $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ в виде суммы $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, где x и y — натуральные числа:

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Тогда

$$5 + 2\sqrt{6} = x + y + 2\sqrt{xy}.$$

Будем искать такие числа x и y , чтобы были равны по отдельности и целые, и иррациональные слагаемые, записанные в левой и в правой частях равенства

$$x + y = 5, \quad xy = 6.$$

Легко догадаться, что есть две пары чисел, удовлетворяющие полученным условиям: $x = 2, y = 3$ и $x = 3, y = 2$. Однако ответ у задачи только один:

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Упростите выражение (402—404):

402. а) $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$.

403. а) $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$; в) $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$;

б) $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$; г) $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$.

404. а) $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$; б) $2\sqrt{\sqrt{14} + 6\sqrt{5}}$.

405. Докажите формулу

$$\sqrt{a + b\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2c}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2c}}{2}}, \text{ где } b > 0.$$

406. Формула, рассмотренная в предыдущем задании, представляет интерес, если выражение $a^2 - b^2c$ является квадратом натурального числа. Примените эту формулу для упрощения выражения:

а) $\sqrt{12 + 2\sqrt{11}}$; б) $\sqrt{57 + 12\sqrt{15}}$.

407. Запишите самостоятельно формулу преобразования двойного радикала вида $\sqrt{a - b\sqrt{c}}$, где $b > 0$. Она получается из рассмотренной выше формулы заменой в правой части равенства всего лишь одного знака «+» на знак «-». Примените эту формулу для упрощения выражения $\sqrt{57 - 12\sqrt{15}}$.

ДЗ

Дополнительные задания к главе 2

Вычисления по формулам

408. Высота h , проведенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, вычисляется по формуле $h = \sqrt{ab}$ (рис. 2.34). Выразите из этой формулы a и b .

409. Из формулы выразите каждую переменную, стоящую под знаком радикала:

а) $v = k\sqrt{\frac{F}{l}}$; б) $t = \sqrt{\frac{2S}{a}}$; в) $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$.

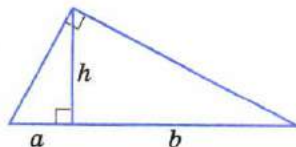


Рис. 2.34

410. Известны формулы для вычисления площади S треугольника.

Равностороннего: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — сторона.

Равнобедренного: $S = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, где a — основание, b — боковая сторона.

Любого: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a , b и c — стороны,

$p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр.

Найдите приближенное значение площади каждого треугольника, изображенного на рисунке 2.35, используя соответствующую формулу. (Ответ дайте с одним знаком после запятой.)

411. Из клинописных табличек, найденных при раскопках, известен способ извлечения квадратных корней, которым пользовались древние вавилоняне еще за две тысячи лет до н. э. На современном математическом языке он может быть описан с помощью такого приближенного равенства:

$$\sqrt{c} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

Например, $\sqrt{28} = \sqrt{25 + 3} \approx 5 + \frac{3}{2 \cdot 5} = 5,3$.

(С помощью калькулятора мы получили бы, что $\sqrt{28} \approx 5,29$.)

Пользуясь указанной приближенной формулой, найдите $\sqrt{39}$, $\sqrt{85}$. Сравните ответ с числом, полученным с помощью калькулятора.

*Преобразование выражений,
содержащих квадратные корни*

412. Найдите значение выражения при $a = 0,01$ и $b = 0,25$:

а) $a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$; в) $(10\sqrt{a})^2 - (4\sqrt{b})^2$;

б) $\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$; г) $\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{b-a}{b}}$.

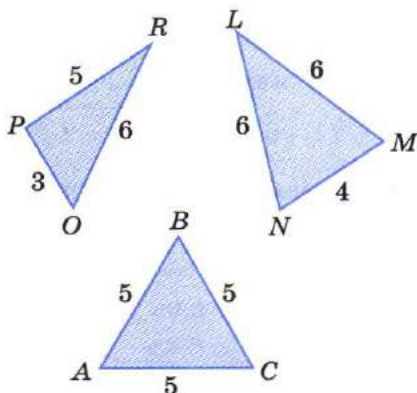


Рис. 2.35

413. Найдите значение выражения при $a = \sqrt{30}$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = \sqrt{2,5}$:

а) $\frac{ac}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{ab}{\sqrt{5}}$; в) $\frac{a}{bc}$; г) $\frac{bc}{\sqrt{10}}$.

414. Докажите, что:

а) $2\sqrt{300} + \sqrt{45} - 5\sqrt{48} = 3\sqrt{5}$; в) $\sqrt{84} - (3\sqrt{7} + 2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{7} = -21$;

б) $3\sqrt{54} + \sqrt{96} - 2\sqrt{150} = 3\sqrt{6}$; г) $\sqrt{72} - (2\sqrt{6} - 4\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = 12$.

415. Верно ли, что:

а) $(3\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 6\sqrt{6} = 21$; в) $4\sqrt{3} - (2\sqrt{3} + 1)^2 = -13$;

б) $(2\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 + \sqrt{160} = 22$; г) $55 - (5\sqrt{2} - \sqrt{5})^2 = 10\sqrt{10}$?

416. Докажите, что верно равенство:

а) $\sqrt{6} + \sqrt{5} = \sqrt{11 + 2\sqrt{30}}$; б) $\sqrt{15 - 10\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{10}}{\sqrt{2}}$.

417. Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{\sqrt{3}}{5 + 3\sqrt{3}}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 6}$; в) $\frac{\sqrt{7} + 2}{\sqrt{7} - 2}$; г) $\frac{\sqrt{10} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{10} + 3\sqrt{2}}$.

418. Упростите выражение:

а) $\frac{\sqrt{3}}{3 - \sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{3 + \sqrt{6}}$; в) $\left(\frac{\sqrt{5} - 5\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \sqrt{10} \right) \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right)$;

б) $\sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}}{2 + \sqrt{7}} \left(\frac{2 + \sqrt{7}}{2 - \sqrt{7}} - 2 - \sqrt{7} \right)$; г) $\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{5}}{3\sqrt{3} + \sqrt{5}} - \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{5}}{3\sqrt{3} - \sqrt{5}}$.

Сократите дробь (419—420):

419. а) $\frac{2\sqrt{ab}}{b\sqrt{a} + a\sqrt{b}}$; в) $\frac{x - 1}{1 + 2\sqrt{x} + x}$; д) $\frac{1 - (\sqrt{a})^3}{1 - \sqrt{a}}$;

б) $\frac{b\sqrt{a} - a\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$; г) $\frac{4 - 4\sqrt{a} + a}{4 - a}$; е) $\frac{9 - 3\sqrt{x} + x}{27 + (\sqrt{x})^3}$.

420. а) $\frac{2 - 3\sqrt{a} + a}{6 - 3\sqrt{a}}$; б) $\frac{3 - 2\sqrt{x} - x}{9 + 3\sqrt{x}}$.

Указание. а) Введите замену $y = \sqrt{a}$ и выполните разложение на множители.

421. Упростите выражение при $a < 0$, $b > 0$:

а) $2a^2\sqrt{a^2b^6} + b\sqrt{a^6b^4}$; б) $a\sqrt{a^4b^3} - 3b\sqrt{a^6b}$.

422. Постройте график зависимости:

а) $y = x(\sqrt{x})^2$; б) $y = x\sqrt{x^2}$.



Вопросы для повторения к главе 2

1. Запишите формулу для нахождения стороны a квадрата по его площади S . Найдите a , если $S = 25$; 36 ; $0,01$.
2. Существует ли рациональное число, квадрат которого равен 2? К какому классу чисел относится число $\sqrt{2}$? Закончите равенство $(\sqrt{2})^2 = \dots$.
3. Приведите примеры натуральных чисел, которые нельзя представить в виде квадрата рационального числа. Запишите число, квадрат которого равен 8; 10; 101. Запишите число, противоположное каждому из них.
4. Покажите, как с помощью теоремы Пифагора построить отрезок, длина которого равна $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$.
5. Дайте определение квадратного корня. Приведите примеры. Сколько существует квадратных корней из положительного числа a ? Как они обозначаются? Существует ли квадратный корень из отрицательного числа? Какой квадратный корень называют арифметическим?
6. Сколько корней имеет уравнение $x^2 = a$, если: $a > 0$; $a = 0$; $a < 0$? Решите уравнение: $x^2 = 16$; $x^2 = 10$; $x^2 = 0$; $x^2 = -9$.
7. Запишите с помощью букв теорему о корне из произведения. Примените ее к выражению $\sqrt{225 \cdot 144}$.
8. Запишите с помощью букв теорему о корне из частного. Примените ее к выражению $\sqrt{\frac{196}{25}}$.
9. Объясните: а) как вынести множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt{128}$; б) как внести множитель под знак корня в выражении $5\sqrt{3}$.



Задания для самопроверки к главе 2

(Обязательные результаты обучения)

1. Найдите значение выражения: а) $\sqrt{81}$; б) $\sqrt{\frac{9}{16}}$; в) $\sqrt{0,64}$.
2. Найдите значение выражения:
а) $\sqrt{\frac{x-y}{2}}$ при $x = 126$, $y = 54$; в) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{3}$ при $x = 0,25$, $y = 0,01$.
б) $\frac{\sqrt{x+y}}{5}$ при $x = 27$, $y = 22$;

3. Площадь квадрата, диагональ которого равна b , можно вычислить по формуле $S = \frac{b^2}{2}$. Выразите из этой формулы диагональ квадрата b .
4. Между какими последовательными целыми числами заключено число: $\sqrt{18}$, $\sqrt{89}$, $\sqrt{160}$?
5. Сравните числа: а) $\sqrt{26}$ и $\sqrt{62}$; б) $\sqrt{234}$ и 16; в) $-\sqrt{5}$ и $-\sqrt{6}$.
6. Покажите на координатной прямой примерное положение чисел $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{52}$, $-\sqrt{52}$.
7. Пользуясь калькулятором, укажите две последовательные десятичные дроби с двумя знаками после запятой, между которыми заключено число $\sqrt{32}$.
8. Чему равно расстояние между домами A и B , расположенными на двух взаимно перпендикулярных улицах, если дом A расположен в 2 км от перекрестка, а дом B — в 1,5 км от этого же перекрестка?
9. а) Найдите квадратные корни из числа: 64; $\frac{4}{9}$; 0,49; 3; 2,7.
б) Найдите арифметический квадратный корень из числа: 100; $\frac{1}{4}$; 0,09; 5.
10. Решите уравнение:
а) $x^2 = 64$; в) $x^2 + 25 = 0$; д) $(x - 1)^2 = 9$;
б) $x^2 - 144 = 0$; г) $x^2 - 5 = 0$; е) $(x + 5)^2 = 0$.
11. Вычислите, не пользуясь калькулятором:
а) $\sqrt{0,25 \cdot 0,36}$; б) $\sqrt{\frac{256}{81}}$; в) $\sqrt{3^2 \cdot 5^4 \cdot 2^6}$.
12. Упростите выражение:
а) $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{20}$; в) $\frac{(2\sqrt{5})^2}{10}$; г) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{50}}$; д) $\frac{2\sqrt{10} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{80}}$.
13. Вынесите множитель из-под знака корня в выражении $0,5\sqrt{32}$.
14. Внесите множитель под знак корня в выражении: $4\sqrt{2}$, $-2\sqrt{3}$.
15. Сравните числа $5\sqrt{3}$ и $3\sqrt{6}$.
16. Упростите выражение:
а) $3\sqrt{20} - 3\sqrt{45} + 4\sqrt{5}$; б) $(1 + \sqrt{3})^2$; в) $(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)$.
17. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{6}{\sqrt{3}}$.
18. Найдите значение выражения $2y^2 - 3$ при $y = 1 - \sqrt{2}$.
19. Найдите значение выражения $2y^3$ при $y = 2\sqrt{3}$.



1. Найдите значение выражения $2\sqrt{n+1}$ при $n = -\frac{3}{4}$.
Ответ. _____
2. Известно, что $\sqrt{a} = b$. Какое из следующих равенств верно?
А. $a^2 = b$. Б. $a^2 = b^2$. В. $a = b^2$. Г. $a = \sqrt{b}$.
3. Расстояние h , которое пролетает тело при свободном падении, вычисляется по формуле $h = \frac{gt^2}{2}$, где g — ускорение свободного падения, t — время падения. Выразите из этой формулы время t .
А. $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Б. $t = \sqrt{\frac{g}{2h}}$. В. $t = \sqrt{2hg}$. Г. $t = \sqrt{\frac{gh}{2}}$.
4. Какое из чисел $\sqrt{121}$, $\sqrt{0,4}$, $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ является иррациональным?
А. $\sqrt{121}$. Б. $\sqrt{0,4}$. В. $\sqrt{2\frac{1}{4}}$. Г. Все эти числа.
5. Одна из точек на координатной прямой соответствует числу $\sqrt{86}$. Какая это точка?



- А. К. Б. L. В. M. Г. N.
6. Какое из чисел заключено между числами $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$?
А. 6. Б. 4. В. 3. Г. 2.
7. При каком значении m выражение $\sqrt{1-m}$ не имеет смысла?
А. $m = -2$. Б. $m = 0$. В. $m = 1$. Г. $m = 2$.
8. Соотнесите уравнение с числом его корней:
1) $x^2 = 120$; 2) $x^2 = 0$; 3) $x^2 = -100$.
а) Нет корней; б) 2 корня; в) 1 корень.

Ответ. 1) _____ ; 2) _____ ; 3) _____

9. Решите уравнение $x^2 - \frac{3}{4} = 0$.

Ответ. _____

10. Какая точка принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$?
 А. $M(225; -15)$. Б. $N(64; 10)$. В. $P(196; 14)$. Г. $Q(12; 144)$.
11. Расположите в порядке возрастания числа $0,3$; $\sqrt{0,3}$; $1,5$; $\sqrt{1,5}$.
 Ответ. _____
12. Найдите значение выражения $\sqrt{15 \cdot 240}$.
 Ответ. _____
13. Зная, что $33^2 = 1089$, определите, какое из следующих равенств неверно.
 А. $\sqrt{1089} = 33$. В. $\sqrt{10,89} = 3,3$.
 Б. $\sqrt{108\,900} = 330$. Г. $\sqrt{1,089} = 0,33$.
14. Найдите значение выражения $\frac{2\sqrt{21} \cdot 6\sqrt{35}}{7\sqrt{60}}$.
 Ответ. _____
15. Выберите выражение, равное $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$.
 А. $1 - \sqrt{3}$. Б. $\sqrt{3} - 1$. В. $(1 - \sqrt{3})^2$. Г. $(\sqrt{3} - 1)^2$.
16. Сократите дробь $\frac{2\sqrt{8} + 3\sqrt{20} - 6\sqrt{5}}{4\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{18}}$.
 Ответ. _____
17. Какое из следующих выражений не равно $\frac{2}{\sqrt{18}}$?
 А. $\sqrt{\frac{1}{9}}$. Б. $\sqrt{\frac{2}{9}}$. В. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Г. $\frac{2}{3\sqrt{2}}$.
18. Упростите выражение $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$.
 Ответ. _____
19. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$.
 Ответ. _____
20. Укажите два последовательных целых числа, между которыми заключено число $\sqrt[3]{-30}$.
 А. $-4 < \sqrt[3]{-30} < -3$. В. $3 < \sqrt[3]{-30} < 4$.
 Б. $-3 < \sqrt[3]{-30} < -4$. Г. $-64 < \sqrt[3]{-30} < -27$.

Квадратные уравнения

3.1

Какие уравнения называют квадратными

Решим задачу:

Катеты прямоугольного треугольника меньше его гипотенузы соответственно на 2 см и на 4 см. Чему равны длины сторон этого треугольника?

Пусть длина гипотенузы равна x см, тогда длины катетов равны $x - 2$ см и $x - 4$ см. В соответствии с теоремой Пифагора

$$(x - 2)^2 + (x - 4)^2 = x^2.$$

Выполнив преобразования, получим уравнение

$$x^2 - 4x + 4 + x^2 - 8x + 16 = x^2,$$

т. е.

$$x^2 - 12x + 20 = 0.$$

Левая часть этого уравнения — многочлен второй степени. Такие уравнения вам решать еще не приходилось. Чтобы найти его корни, мы воспользуемся специальным приемом — выделим в левой его части *полный квадрат*, т. е. многочлен, который можно «свернуть» в квадрат двучлена.

Если к выражению $x^2 - 12x$ прибавить число 36, то получится трехчлен $x^2 - 12x + 36$, равный $(x - 6)^2$. Поэтому прибавим к левой части уравнения число 36, а чтобы равенство не нарушилось, одновременно вычтем его. Будем иметь

$$x^2 - 12x + 36 - 36 + 20 = 0,$$

$$(x - 6)^2 - 16 = 0,$$

$$(x - 6)^2 = 16.$$

Отсюда

$$x - 6 = 4 \text{ или } x - 6 = -4, \text{ т. е.} \\ x = 10 \text{ или } x = 2.$$

Таким образом, уравнение $x^2 - 12x + 20 = 0$ имеет два корня: 10 и 2. Однако условию задачи удовлетворяет только число 10. Действительно, если $x = 10$, то $x - 2 = 8$ и $x - 4 = 6$; если $x = 2$, то $x - 2 = 0$ и $x - 4 = -2$, т. е. при $x = 2$ значения выражений $x - 2$ и $x - 4$ не могут служить длинами сторон треугольника.

Итак, длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 10 см, а длины катетов — 8 см и 6 см.

Уравнение $x^2 - 12x + 20 = 0$, которое мы составили по условию задачи, называют *квадратным*.

Определение

Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a , b и c — произвольные числа, причем $a \neq 0$.

Числа a , b и c — это *коэффициенты* квадратного уравнения. Число a называют первым или старшим коэффициентом, b — вторым коэффициентом, а c — свободным членом. Квадратное уравнение $x^2 - 12x + 20 = 0$ имеет коэффициенты $a = 1$, $b = -12$, $c = 20$.

Приведем еще примеры квадратных уравнений:

$$5x^2 - 6x + 10 = 0, \quad \sqrt{2}x^2 - 5x = 0,$$

$$-x^2 + x - 4,5 = 0, \quad \frac{1}{3}x^2 - 12 = 0.$$

(Назовите коэффициенты каждого из них.)

Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен 1, называют *приведенным*. Так, приведенными являются квадратные уравнения $x^2 - 12x + 20 = 0$, $x^2 - \frac{2}{3}x = 0$, $x^2 - \sqrt{50} = 0$.

Неприведенное квадратное уравнение всегда можно преобразовать в приведенное, имеющее те же корни. Для этого надо разделить обе его части на коэффициент при x^2 .

Например, уравнение $-2x^2 + 10x - 8 = 0$ можно заменить приведенным уравнением $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Чтобы решить уравнение $x^2 - 12x + 20 = 0$, составленное по условию задачи, мы воспользовались *приемом выделения квадрата двучлена*. Решим еще несколько квадратных уравнений этим же способом.

■ Пример 1. Решим уравнение $x^2 - 6x + 7 = 0$.

Так как $x^2 - 6x = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3$, то, чтобы получить в левой части уравнения квадрат двучлена, прибавим число 9 и вычтем его.

Получим

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + 7 = 0,$$

$$(x - 3)^2 - 2 = 0,$$

$$(x - 3)^2 = 2.$$

Отсюда

$$x - 3 = \sqrt{2} \text{ или } x - 3 = -\sqrt{2},$$

$$x = 3 + \sqrt{2} \text{ или } x = 3 - \sqrt{2}.$$

Итак, уравнение имеет два корня: $3 + \sqrt{2}$ и $3 - \sqrt{2}$.

■ **Пример 2.** Решим уравнение $x^2 - 10x + 25 = 0$.

Так как $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$, то уравнение можно записать в виде $(x - 5)^2 = 0$. Отсюда $x - 5 = 0$, т. е. $x = 5$. Значит, уравнение имеет один корень — число 5.

■ **Пример 3.** Решим уравнение $2x^2 + 6x + 5 = 0$.

Преобразуем сначала уравнение в приведенное. Для этого разделим обе его части на 2. Получим

$$x^2 + 3x + \frac{5}{2} = 0.$$

Теперь выделим в левой части уравнения квадрат двучлена:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + \frac{5}{2} = 0,$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0,$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}.$$

Левая часть уравнения при любом x неотрицательна, а в правой части записано отрицательное число. Значит, уравнение корней не имеет.

423. Укажите коэффициенты a , b и c квадратного уравнения:

а) $7x^2 - 8x + 4 = 0$;

в) $-x^2 + 3x = 0$;

б) $-2x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$;

г) $x^2 - 12 = 0$.

424. Составьте квадратные уравнения, если известны их коэффициенты:

а) $a = 3$, $b = 8$, $c = 2$ и $a = 8$, $b = 2$, $c = 3$;

б) $a = 1$, $b = 0,5$, $c = -1$ и $a = -1$, $b = 1$, $c = 0,5$;

в) $a = 5$, $b = 0$, $c = -3$ и $a = -3$, $b = 5$, $c = 0$.

Может ли коэффициент a в квадратном уравнении быть равным 0?

425. Покажите, что:

а) числа -7 и 5 являются корнями уравнения $x^2 + 2x - 35 = 0$;

б) число $\frac{2}{3}$ является корнем уравнения $3x^2 + x - 2 = 0$, а число -2 не является;

в) числа $1 - \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$ являются корнями уравнения $x^2 - 2x - 1 = 0$;

г) число $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ является корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, а число $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ нет.

426. Решите уравнения:

$$(x + 5)^2 = 4, \quad (x - 2)^2 = 3, \quad (x + 7)^2 = 0, \quad (x - 6)^2 = -9.$$

427. Подберите недостающий член квадратного трехчлена так, чтобы его можно было представить в виде квадрата двучлена:

а) $x^2 + 8x + \dots$; в) $z^2 + 3z + \dots$;

б) $x^2 - 18x + \dots$; г) $a^2 + a + \dots$.

428. Заполните пропуски в цепочке равенств:

а) $x^2 + 4x - 1 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + \dots - \dots - 1 = (x + \dots)^2 - \dots$;

б) $a^2 - 6a + 15 = a^2 - 2 \cdot 3 \cdot a + \dots - \dots + 15 = (a - \dots)^2 + \dots$;

в) $b^2 - 3b + 3 = b^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot b + \dots - \dots + 3 = (\dots - \dots)^2 + \dots$;

г) $p^2 - 7p - 10 = p^2 - 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot p + \dots - \dots - 10 = (\dots - \dots)^2 - \dots$.

429. Решите уравнение, выделив квадрат двучлена:

а) $x^2 + 12x + 20 = 0$; в) $z^2 - 6z + 9 = 0$;

б) $y^2 + 14y + 24 = 0$; г) $y^2 - 2y + 3 = 0$.



430. Составьте все возможные квадратные уравнения, коэффициентами которых являются числа:

а) 8; 2 и -3 ; б) 5; 1 и 0.

431. Решите уравнение:

а) $3x^2 - 4x - 4 = 0$; г) $x^2 - 2x + 2 = 0$;

б) $2x^2 + 3x + 6 = 0$; д) $2x^2 + 7x + 6 = 0$;

в) $9x^2 - 6x + 1 = 0$; е) $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

432. Составьте какое-нибудь квадратное уравнение, которое:

- а) не имеет корней;
- б) имеет два целых корня;
- в) имеет два иррациональных корня;
- г) имеет один корень.

433. Выделите в трехчлене квадрат двучлена:

- а) $x^2 - 2x + c$; б) $x^2 + bx + c$.

434. Покажите, что:

- а) числа m и n являются корнями уравнения

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0;$$

- б) числа $m + n$ и $m - n$ являются корнями уравнения

$$x^2 - 2mx + m^2 - n^2 = 0.$$

Составьте уравнения такого вида, подставив вместо m и n конкретные числа, и укажите корни составленного уравнения.

3.2

Формула корней квадратного уравнения

До сих пор мы решали квадратные уравнения выделением квадрата двучлена. Однако этот способ довольно трудоемок и в практическом отношении не очень удобен. Поэтому мы выведем *формулу корней квадратного уравнения*, решив его в общем виде.

Итак, рассмотрим уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Выделим в левой его части квадрат двучлена. Для этого:

преобразуем уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ в приведенное:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0;$$

представим второе слагаемое в виде удвоенного произведения, в котором один из множителей есть x :

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0;$$

прибавим к левой части уравнения выражение $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ и вычтем его:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0;$$

три первых слагаемых «свернем» в квадрат двучлена:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0;$$

остальные слагаемые перенесем в правую часть уравнения и запишем правую часть в виде дроби:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Дальше мы должны будем рассмотреть различные случаи, которые определяются тем, каков знак правой части уравнения. Так как знаменатель дроби $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ положителен, то ее знак зависит от знака числителя, т. е. от знака выражения $b^2 - 4ac$. Это выражение обозначают специальным символом — буквой D :

$$b^2 - 4ac = D.$$

Запишем уравнение, используя введенное обозначение:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}.$$

Понятно, что возможны три случая: $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$.

1. Пусть $D > 0$, а значит, $\frac{D}{4a^2} > 0$. Существуют два квадратных корня из этого числа: $\frac{\sqrt{D}}{2a}$ и $-\frac{\sqrt{D}}{2a}$.

Отсюда $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}$ или $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a}$,

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ или } x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ или } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Таким образом,

если $D > 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня.

Корни квадратного уравнения принято обозначать символами x_1 и x_2 .

2. Пусть $D = 0$. Тогда уравнение примет вид

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Отсюда

$$x + \frac{b}{2a} = 0, \quad x = -\frac{b}{2a}.$$

Значит,

если $D = 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень.

3. Пусть $D < 0$, тогда $\frac{D}{4a^2} < 0$. Но левая часть уравнения при любом x неотрицательна. Значит,

если $D < 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ корней не имеет.

Таким образом, существование корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и их число зависят от знака выражения $D = b^2 - 4ac$. Его называют *дискриминантом квадратного уравнения*. Термин «дискриминант» произошел от латинского слова *discriminare*, что в переводе означает «различать», «разделять». По дискриминанту квадратного уравнения можно узнать, имеет ли это уравнение корни или нет, а если имеет, то сколько — два корня или один.

Для корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с положительным дискриминантом принята такая краткая запись:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

Именно ее и называют *формулой корней квадратного уравнения*. Заметим, что этой формулой можно пользоваться и для отыскания корня квадратного уравнения, у которого $D = 0$.

При решении квадратного уравнения по формуле обычно сначала вычисляют дискриминант и сравнивают его с нулем. После этого в зависимости от результата либо находят корни по формуле, либо делают вывод об отсутствии корней.

Приведем примеры решения квадратных уравнений.

■ **Пример 1.** Решим уравнение $6x^2 - x - 2 = 0$.

Вычислим дискриминант:

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 1 + 48 = 49, \text{ т. е. } D > 0.$$

Воспользуемся формулой корней:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12}; \quad x = \frac{1 \pm 7}{12}; \\ x_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}; \quad x_2 = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}$.

■ **Пример 2.** Решим уравнение $-x^2 + 2x - 2 = 0$.

Сначала поменяем знаки всех членов уравнения на противоположные, умножив обе его части на -1 . Так целесообразно поступать всегда при решении уравнений с отрицательным первым коэффициентом. Получим уравнение

$$x^2 - 2x + 2 = 0.$$

Найдем дискриминант:

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4; D < 0.$$

Ответ. Уравнение корней не имеет.

■ Пример 3. Решим уравнение $x^2 + 0,2x + 0,01 = 0$.

Преобразуем уравнение так, чтобы его коэффициенты стали целыми числами. Для этого умножим обе его части на 100. Получим

$$100x^2 + 20x + 1 = 0.$$

Найдем дискриминант: $D = 20^2 - 4 \cdot 100 \cdot 1 = 0$.

По формуле корней получим $x = \frac{-20 \pm \sqrt{0}}{200}$, т. е. $x = -0,1$.

Ответ. $-0,1$.

Заметим, что последнее уравнение можно решить проще, если увидеть, что трехчлен в левой его части можно «свернуть» в квадрат двучлена. Тогда уравнение примет вид $(10x + 1)^2 = 0$. Значит, $10x + 1 = 0$, т. е. $x = -0,1$.

В заключение заметим, что решением квадратных уравнений ученые занимались еще в глубокой древности, более двух тысячелетий тому назад. Интересно, что математики Древней Греции рассматривали три вида квадратных уравнений, а не один, как мы это сделали сейчас. В современной записи они выглядели бы так:

$$ax^2 + bx = c, \quad ax^2 + c = bx, \quad ax^2 = bx + c.$$

Такие уравнения появлялись у них при решении задач, и каждое решалось особым способом — геометрически. А об общей формуле корней они даже и не задумывались — алгебры в то время еще не было.

Почему же у древнегреческих математиков было больше видов квадратных уравнений, чем у нас? Все дело в том, что они еще не знали отрицательных чисел, не умели переносить члены уравнения из одной части в другую — все это появилось в процессе развития алгебры лишь много веков спустя. Благодаря Франсуа Виету, создателю современной символики алгебры, три «древних» вида квадратных уравнений слились в один: $ax^2 + bx + c = 0$. Но еще за несколько веков до Ф. Виета ученый из Средней Азии аль-Хорезми научил математиков правилам переноса слагаемых из одной части уравнения в другую.

А

435. Вычислив дискриминант, определите, имеет ли уравнение корни и сколько:

а) $x^2 + 7x - 18 = 0$; б) $a^2 + a + 6 = 0$;

в) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; д) $9x^2 + 12x + 4 = 0$;
 г) $5y^2 - 3y + 2 = 0$; е) $z^2 - z - 3 = 0$.

Убедитесь, что уравнение имеет два корня, и найдите эти корни (436—437):

436. а) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; д) $2z^2 + 5z + 3 = 0$;
 б) $3y^2 + 7y - 6 = 0$; е) $2z^2 - 9z - 5 = 0$;
 в) $4z^2 - 11z - 3 = 0$; ж) $7y^2 + 9y + 2 = 0$;
 г) $3x^2 + 7x + 2 = 0$; з) $6x^2 - 13x - 5 = 0$.

437. а) $x^2 + 5x - 6 = 0$; д) $x^2 - 4x - 21 = 0$;
 б) $x^2 + 3x + 2 = 0$; е) $x^2 + 9x + 18 = 0$;
 в) $z^2 - 2z - 3 = 0$; ж) $a^2 - 7a + 6 = 0$;
 г) $t^2 + t - 6 = 0$; з) $b^2 - 4b - 60 = 0$.

Решите уравнение (438—441):

438. а) $2x^2 - 3x - 5 = 0$; д) $-2x^2 + 13x - 21 = 0$;
 б) $y^2 - 4y + 5 = 0$; е) $y^2 + 5y - 50 = 0$;
 в) $5z^2 - 2z - 3 = 0$; ж) $x^2 - 18x + 81 = 0$;
 г) $-x^2 - x + 20 = 0$; з) $-7x^2 + 5x + 2 = 0$.

439. а) $10x^2 + 30x + 20 = 0$; в) $1,5y^2 + 4y + 2,5 = 0$;
 б) $-2x^2 - 10x - 8 = 0$; г) $-0,8z^2 + 0,4z + 2,4 = 0$.

440. а) $3z^2 = 198 + 15z$; г) $0,3y^2 + 1,4 = -1,3y$;
 б) $11v = 3 + 10v^2$; д) $0,1 + 0,03x^2 = 0,17x$;
 в) $8z^2 = 22z + 6$; е) $75 - 35z = 10z^2$.

441. а) $x^2 - 2x - 1 = 0$; г) $2x^2 + 2x - 1 = 0$;
 б) $4x^2 - 8x - 1 = 0$; д) $x^2 - 6x + 6 = 0$;
 в) $x^2 - 2x - 4 = 0$; е) $x^2 - 12x + 18 = 0$.

442. Вычислите дискриминант уравнения и ответьте на следующие вопросы: 1) имеет ли уравнение корни; 2) если имеет, то сколько; 3) рациональными или иррациональными числами являются корни?

а) $4x^2 - 12x + 9 = 0$; д) $x^2 - 3x + 5 = 0$;
 б) $2x^2 + 3x - 9 = 0$; е) $3x^2 + 2x - 2 = 0$;
 в) $5x^2 - x + 2 = 0$; ж) $3x^2 - 11x + 10 = 0$;
 г) $x^2 + 7x - 1 = 0$; з) $25x^2 + 10x + 1 = 0$.

443. Подберите какое-нибудь значение c , при котором уравнение имеет корни, и значение c , при котором оно не имеет корней:

а) $x^2 - 3x + c = 0$; б) $5x^2 - 2x + c = 0$.

444. Найдите корни уравнения и укажите их приближенные значения с двумя знаками после запятой (воспользуйтесь калькулятором):

а) $x^2 - 6x = 1$;

г) $5x - 2 = 3x^2$;

б) $3x^2 = 7x + 3$;

д) $2x^2 + 4x + 1 = 0$;

в) $x^2 + 11x = x - 2$;

е) $4 - 4x = x^2$.

445. Решите уравнение:

а) $2z^3 - z^2 - 10z = 0$;

в) $3y^4 - 6y^3 + 3y^2 = 0$;

б) $10x^4 + 3x^3 - 18x^2 = 0$;

г) $4u^3 - 12u^2 + 9u = 0$.

446. Найдите корни уравнения:

а) $x^2(x - 3) - 10x(x - 3) - 24(x - 3) = 0$;

б) $3z^2(z - 1) + 10z(z - 1) + 8(1 - z) = 0$;

в) $y^2(y + 2) + 2y(y + 2) - 15(y + 2) = 0$;

г) $2u^2(u + 5) - 3u(u + 5) - 9(u + 5) = 0$.

447. Определите, сколько корней имеет уравнение:

а) $(4x^2 + x + 1)(x^2 - 9x + 4) = 0$;

б) $(x^2 - 4x + 5)(2x^2 - 3x + 2) = 0$;

в) $(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 + 3x - 1) = 0$;

г) $(36x^2 - 12x + 1)(5x^2 - 2x - 3) = 0$;

д) $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 2x - 3) = 0$.

448. (Задача-исследование.)

1) Выясните, имеет ли корни уравнение $193x^2 + 93x + 10 = 0$. Используя полученный результат, установите, имеют ли корни следующие уравнения:

$193x^2 - 93x + 10 = 0$, $10x^2 + 93x + 193 = 0$,

$10x^2 - 93x + 193 = 0$.

2) Запишите какое-нибудь квадратное уравнение, которое имеет тот же дискриминант, что и уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ (коэффициенты отличны от 0).

3.3

Вторая формула корней квадратного уравнения

Квадратные уравнения, у которых второй коэффициент — четное число, удобно решать по формуле корней, записанной в другом, более простом виде.

Рассмотрим квадратное уравнение, которое имеет вид

$$ax^2 + 2kx + c = 0, \text{ где } k — \text{ целое число.}$$

Найдем его дискриминант:

$$D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac).$$

Знак произведения $4(k^2 - ac)$ зависит от знака выражения $k^2 - ac$. Следовательно, вывод о числе корней уравнения можно сделать по знаку выражения $k^2 - ac$.

Будем называть выражение $k^2 - ac$ *сокращенным дискриминантом* и обозначим его знаком D_1 :

$$D_1 = k^2 - ac.$$

Если $D_1 > 0$, то по общей формуле корней квадратного уравнения будем иметь

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}.$$

Заменив k на $\frac{b}{2}$, получим следующую формулу:

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac.$$

Ее называют *формулой корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом*.

Понятно, что если $D_1 < 0$, то уравнение корней не имеет.

■ **Пример.** Решим уравнение $5x^2 - 8x + 3 = 0$:

$$D_1 = (-4)^2 - 5 \cdot 3 = 16 - 15 = 1; D_1 > 0;$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{1}}{5}; \quad x = \frac{4 \pm 1}{5}.$$

Ответ. 1; $\frac{3}{5}$.

При решении квадратного уравнения целесообразно выбирать ту формулу, которая в данном случае удобна. В то же время общая формула корней квадратного уравнения применима в любом случае.

А

449. Решите уравнение, используя формулу корней квадратного уравнения с четным коэффициентом при x :

а) $x^2 + 6x - 27 = 0$;

д) $2x^2 + 3x = 42 - 5x$;

б) $3x^2 + 10x - 8 = 0$;

е) $6x + 24 = 9x^2$;

в) $5x^2 = 6x + 8$;

ж) $16x^2 = 16x + 5$;

г) $3x^2 + 13x = 2x^2 - x - 49$;

з) $-5x^2 + 20 = 14x - 4$.

Решите уравнение (450—451):

450. а) $(x - 2)(x - 6) = 5$; д) $(3x - 2)(x + 6) = -9$;
б) $(y - 2)(y + 5) = -12$; е) $(u + 3)(u - 4) = -10$;
в) $(x - 3)^2 = 5 - x$; ж) $(x + 4)^2 = 7 - 2x$;
г) $6x - 20 = (x - 6)^2$; з) $(z + 6)^2 = 8(3z + 8)$.
451. а) $0,3x^2 + 1,6x - 1,2 = 0$; д) $0,1y^2 - 0,9y + 0,8 = 0$;
б) $x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{8}{3}$; е) $\frac{7}{20} - \frac{1}{5}x = x^2$;
в) $\frac{z^2 + z}{2} = 15$; ж) $5x^2 = \frac{1 - 5x}{10}$;
г) $x^2 + 1 = \frac{5x}{2}$; з) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x = 3$.

452. Найдите значения переменной a , при которых:

- а) значение выражения $5a^2 + 5a - 6$ равно 24;
б) значение выражения $a(a - 4)$ равно 60.



Решите уравнение (453—456):

453. а) $15x^2 - 34x + 15 = 0$; б) $29x^2 + 34x + 5 = 0$.
454. а) $(x - 5)(x + 2) = x(5 - x)$; в) $3(z - 2)^2 = 2z + 4$;
б) $(y + 2)^2 = y(3y + 2)$; г) $5 - 4x = 4(x - 1)^2$.
455. а) $(x - 4)^2 = \frac{40 - 6x}{3}$; б) $\frac{(x - 3)^2}{5} = (x - 1)^2$.
456. а) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 = 0$; в) $x^2 + 2\sqrt{6}x - 18 = 0$;
б) $x^2 + 2\sqrt{7}x + 7 = 0$; г) $x^2 - 2\sqrt{2}x - 6 = 0$.

Указание. Воспользуйтесь формулой корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом.

457. Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, называется биквадратным уравнением. Решите биквадратное уравнение:

- а) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; в) $x^4 + 15x^2 - 16 = 0$;
б) $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$; г) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$.

Образец. Решим уравнение $x^4 + 3x^2 - 28 = 0$.

Введем замену $x^2 = y$, получим квадратное уравнение относительно y : $y^2 + 3y - 28 = 0$.

Решив это уравнение, найдем корни: $y_1 = 4$, $y_2 = -7$.

Теперь решим уравнения $x^2 = 4$ и $x^2 = -7$:

1) $x^2 = 4$; $x_1 = 2$, $x_2 = -2$;

2) $x^2 = -7$; уравнение корней не имеет.

Ответ. 2; -2.

458. Сколько корней может иметь биквадратное уравнение? Объясните свой ответ.

459. Решите уравнение:

а) $x + \sqrt{x} - 6 = 0$; в) $x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$;

б) $x - \sqrt{x} + 3 = 0$; г) $x - 9\sqrt{x} + 20 = 0$.

Указание. а) Введите замену $\sqrt{x} = y$.

460. Решите уравнение (введите подходящую замену):

а) $(x^2 - x - 1)^2 - 10(x^2 - x - 1) + 9 = 0$;

б) $(x^2 - 4x + 3)^2 + 6(x^2 - 4x + 6) - 34 = 0$.

461. Найдите корни уравнения и покажите их примерное расположение на координатной прямой:

а) $(x^2 - 2x + 1)^2 - 11(x^2 - 2x + 1) + 30 = 0$;

б) $(x^2 + 4x)^2 - 4(x^2 + 4x) - 5 = 0$.

462. Корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$

можно найти по формуле $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Выведите эту формулу.

463. Решите уравнение, используя формулу, выведенную в предыдущем задании:

а) $x^2 - 16x + 15 = 0$; в) $x^2 + 5x - 3 = 0$;

б) $x^2 + 8x - 9 = 0$; г) $x^2 - 9x + 17 = 0$.

464. (Задача-исследование.)

1) а) Дано уравнение $2x^2 - 7x + 3 = 0$. Запишите новое уравнение, поменяв местами в данном уравнении коэффициенты a и c . Решите оба уравнения. Как связаны между собой их корни?

б) Докажите, что если числа m и n — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$ и $c \neq 0$), то корнями уравнения $cx^2 + bx + a = 0$ являются числа $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$.

Указание. Для доказательства воспользуйтесь подстановкой чисел $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$ в соответствующее уравнение.

в) Составьте квадратное уравнение, корни которого обратны корням уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$. Проверьте себя, решив эти уравнения.

2) а) Решите уравнения $2x^2 + 3x - 5 = 0$ и $2x^2 - 3x - 5 = 0$. Как связаны между собой их корни?

б) Докажите, что если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни m и n , то корни уравнения $ax^2 - bx + c = 0$ — числа $-m$ и $-n$.

в) Составьте квадратное уравнение, корни которого противоположны корням уравнения $2x^2 - x - 1 = 0$. Проверьте себя, решив оба уравнения.

3.4

Решение задач

■ Пример 1. Решим задачу:

Из прямоугольного листа жести надо изготовить противень, вырезав по углам квадраты и загнув края вверх. Лист имеет размер 39×24 см. Чему должна быть равна сторона вырезаемого квадрата, чтобы дно противня имело площадь 700 см^2 ?

Решение. Пусть x см — длина стороны квадрата, который надо вырезать. Тогда $39 - 2x$ см — длина дна противня, $24 - 2x$ см — ширина дна противня (рис. 3.1).

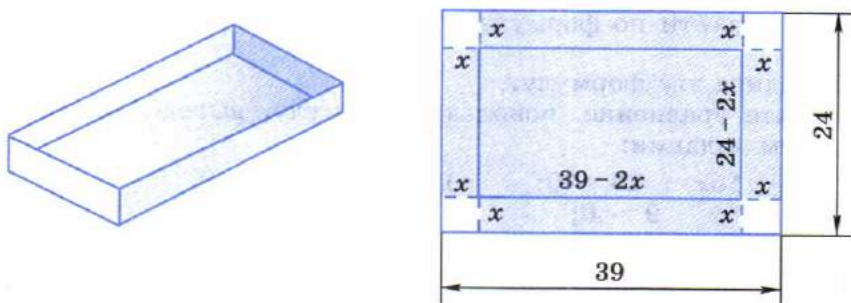


Рис. 3.1

Составим уравнение и решим его:

$$\begin{aligned} (39 - 2x)(24 - 2x) &= 700; \\ 936 - 126x + 4x^2 &= 700; \\ 4x^2 - 126x + 236 &= 0; \\ 2x^2 - 63x + 118 &= 0; \\ D &= 3969 - 4 \cdot 2 \cdot 118 = 3025; \\ x &= \frac{63 \pm 55}{4}; \\ x_1 &= 29,5, \quad x_2 = 2. \end{aligned}$$

От листа жести, одна из сторон которого 24 см, квадрат со стороной 29,5 см отрезать невозможно. Поэтому, хотя число 29,5 — корень уравнения, оно не является решением задачи.

Второй корень не противоречит условию задачи. В самом деле, если по углам листа вырезать квадраты со стороной 2 см, то разме-

ры дна будут $24 \text{ см} - 4 \text{ см} = 20 \text{ см}$, $39 \text{ см} - 4 \text{ см} = 35 \text{ см}$, а его площадь будет равна $20 \text{ см} \cdot 35 \text{ см} = 700 \text{ см}^2$.

Ответ. 2 см.

Проведенное рассуждение типично для решения текстовой задачи. В задаче описывается некоторая жизненная ситуация, и составленное уравнение представляет собой математическую модель этой ситуации. Но эта модель не полностью отражает имеющиеся реальные условия. Например, никак не учтено, что $0 < x < 12$. Поэтому, найдя корни уравнения, нам пришлось проверить их на соответствие условию задачи и отбросить тот, который ему не отвечает.

Конечно, при переводе текстовых задач на математический язык можно пытаться полностью учитывать все условия. Однако все учесть не всегда возможно. Кроме того, модель может получиться такой сложной, что с ней трудно будет работать. Поэтому лучше составить простую модель и затем исследовать полученные решения на их соответствие реальным данным задачи.

■ Пример 2. Длины сторон египетского треугольника выражаются последовательными натуральными числами 3, 4 и 5. Существует ли еще какой-нибудь прямоугольный треугольник, длины сторон которого также выражаются последовательными натуральными числами?

Решение. Пусть длины сторон прямоугольного треугольника выражаются числами n , $n + 1$, $n + 2$ (рис. 3.2).

По теореме Пифагора

$$\begin{aligned} n^2 + (n + 1)^2 &= (n + 2)^2; \\ n^2 + n^2 + 2n + 1 &= n^2 + 4n + 4; \\ n^2 - 2n - 3 &= 0; \\ n_1 &= 3, n_2 = -1. \end{aligned}$$

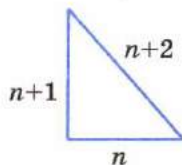


Рис. 3.2

Число -1 не удовлетворяет условию задачи, так как длина стороны не может выражаться отрицательным числом.

Если $n = 3$, то $n + 1 = 4$, $n + 2 = 5$. Таким образом, единственный прямоугольный треугольник с длинами сторон, выражающимися последовательными натуральными числами, — это египетский треугольник.

■ Пример 3. Сигнальная ракета выпущена под углом 45° к горизонту с начальной скоростью 30 м/с (рис. 3.3). В этом случае высота, на которой находится ракета в определенный момент времени, может быть приближенно вычислена по формуле $h = 2 + 21t - 5t^2$. Через сколько секунд ракета окажется на высоте 10 м ?

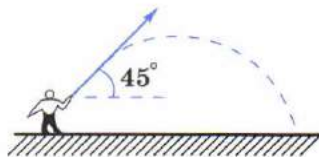


Рис. 3.3

Решение. Решим уравнение

$$\begin{aligned}10 &= 2 + 21t - 5t^2; \\5t^2 - 21t + 8 &= 0; \\D &= 441 - 160 = 281; \\t &= \frac{21 \pm \sqrt{281}}{10}; \\t_1 &\approx 0,4, \quad t_2 \approx 3,8.\end{aligned}$$

Оба полученных корня уравнения являются решениями задачи. Ракета окажется на высоте 10 м дважды: первый раз при подъеме, и это произойдет через 0,4 с, а второй раз при спуске, через 3,8 с после запуска.



465. а) Найдите два последовательных целых числа, произведение которых равно 210.
б) Найдите два последовательных натуральных нечетных числа, произведение которых равно 323.
466. а) Сумма квадратов двух последовательных отрицательных целых чисел равна 85. Найдите эти числа.
б) Сумма квадратов двух последовательных натуральных нечетных чисел равна 130. Найдите эти числа.
467. а) Одна из сторон стандартного листа бумаги для пишущих машинок на 9 см больше другой. Площадь листа равна 630 см^2 . Найдите размеры листа.
б) Под аттракционы отвели площадку прямоугольной формы, одна из сторон которой на 4 м больше другой. Ее площадь равна 165 м^2 . Найдите стороны площадки.
468. Садовый участок прямоугольной формы площадью 600 м^2 обнесен забором, длина которого 100 м. Чему равны стороны участка? Чему равны стороны участка такой же площади, если длина забора вокруг него составляет 140 м?
469. Кусок стекла имеет форму квадрата. Когда от него отрезали полосу шириной 20 см, его площадь стала равна 3500 см^2 . Найдите первоначальные размеры куска стекла.
470. Один катет прямоугольного треугольника на 7 см больше другого, а периметр треугольника равен 30 см. Найдите все стороны треугольника.
471. Две дороги пересекаются под прямым углом. От перекрестка одновременно отъехали два велосипедиста, один в южном направлении, а другой в восточном. Скорость второго была на 4 км/ч больше скорости первого. Через час расстояние между

ними оказалось равным 20 км. Определите скорость каждого велосипедиста.

472. Число диагоналей выпуклого n -угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$. Существует ли многоугольник, в котором 77 диагоналей? 25 диагоналей? Если существует, то укажите число его сторон.

473. Тысячи лет назад пифагорейцы исследовали фигурные числа, и в частности *треугольные числа*, которые изображаются в виде треугольников (рис. 3.4).

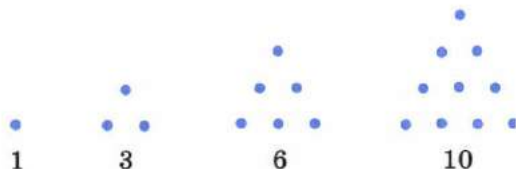


Рис. 3.4

- Треугольное число с номером n равно $\frac{n(n+1)}{2}$. Есть ли среди треугольных чисел число 30? число 120? Если есть, укажите его номер.
474. Если тело падает вниз и начальная скорость падения равна v м/с, то расстояние, которое оно пролетит за t с, вычисляется приближенно по формуле $h = vt + 5t^2$. Используя эту формулу, решите задачу:
- Камень брошен с 80-метровой башни со скоростью 7 м/с. Через сколько секунд он упадет на землю?
 - С самолета, летящего на высоте 700 м, на льдину сброшен груз с начальной скоростью 30 м/с. Через сколько секунд груз достигнет льдины?
475. Если тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v м/с, то высота, на которой оно окажется через t с, может быть приближенно найдена по формуле $h = vt - 5t^2$. Используя эту формулу, решите задачу:
- Футболист на тренировке подбрасывает ногой мяч вертикально вверх. Если он подбросил мяч, сообщив ему начальную скорость 15 м/с, то через сколько секунд мяч окажется в 10 м над землей?
 - Футболист, подбрасывая мяч ногой, сообщил ему начальную скорость 20 м/с. Влетит ли мяч выше березы, высота которой 15 м? Влетит ли он выше дома, высота которого 22 м?

476. Футболист на тренировке подбрасывает головой мяч вертикально вверх. Если он подбросит мяч, сообщив ему начальную ско-

рость 10 м/с, то через сколько секунд мяч окажется в 6 м над землей? (Рост футболиста считайте равным 200 см, ответ дайте приближенно с одним знаком после запятой.)

477. Из металлического листа, имеющего форму прямоугольника, длина которого в 1,5 раза больше ширины, сделан открытый сверху ящик. Для этого по углам листа вырезаны квадраты со стороной 3 дм и получившиеся боковые грани загнуты. Найдите размеры листа, если объем получившегося ящика оказался равным 216 дм^3 .
478. На участке прямоугольной формы со сторонами 7 м и 6 м хотят разместить прямоугольную клумбу площадью 12 м^2 так, чтобы вокруг клумбы образовалась дорожка одинаковой ширины. Какую ширину должна иметь дорожка?
479. В парке имеется детский бассейн прямоугольной формы со сторонами 6 м и 9 м. Он окружен прогулочной дорожкой одинаковой ширины. Площадь дорожки равна площади бассейна. Найдите ширину дорожки.
480. Витрина магазина имеет размер $3 \times 4 \text{ м}$. При окраске здания на стекло по периметру витрины наклеили защитную бумажную ленту, чтобы не закрасить стекло. Лента закрыла площадь, равную половине площади витрины. Найдите ширину бумажной ленты.
481. Существует ли прямоугольный треугольник, стороны которого выражаются последовательными четными числами? последовательными нечетными числами?
482. Сумму n последовательных натуральных чисел, начиная с 1, можно вычислить по формуле $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Определите, сколько натуральных чисел, начиная с 1, надо сложить, чтобы в сумме получилось 66. Какое наименьшее число последовательных натуральных чисел от 1 до n надо сложить, чтобы их сумма была больше 55?
483. К Новому году в семье Ивановых каждый приготовил подарок каждому из остальных членов семьи. Всего под елкой оказалось 30 подарков. Сколько человек в семье Ивановых?
484. На выпускном вечере каждый ученик класса подарил каждому из остальных свою фотографию. Когда все фотографии сложили на столе, их оказалось 272. Сколько учащихся в классе?
485. В турнире шахматистов каждый из участников сыграл с каждым по одной партии, всего было сыграно 120 партий. Сколько шахматистов участвовало в турнире?



486. На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Все они попарно соединены отрезками. Сколько всего отмечено точек, если проведено 105 отрезков?
487. Цена товара была дважды повышена на одно и то же число процентов. На сколько процентов повышалась цена товара каждый раз, если его первоначальная стоимость 200 р., а окончательная 338 р.?
488. Цена товара была дважды снижена на одно и то же число процентов. На сколько процентов снижалась цена товара каждый раз, если его первоначальная стоимость 400 р., а окончательная 256 р.?
489. (Задача-исследование.)

Вам, вероятно, приходилось слышать о *золотом сечении*. Так называют число, выражающее определенное отношение длин отрезков. Золотое сечение широко использовалось в древней архитектуре. Сооружения, построенные с использованием золотого сечения, поражают своей соразмерностью, законченностью, красотой.



Золотое сечение может быть описано следующим образом: точка делит отрезок на две части в отношении, равном золотому сечению, если отношение большей части к меньшей равно отношению длины всего отрезка к длине большей его части (рис. 3.5):



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Рис. 3.5

- 1) Найдите число, выражающее золотое сечение. Для этого примите длину меньшей части b за 1 и, подставив $b = 1$ в пропорцию, найдите из этой пропорции a . Положительное значение a и будет равно золотому сечению. (Запишите его точное значение и приближенное значение с тремя знаками после запятой.)
- 2) Постройте какой-нибудь прямоугольник, отношение сторон которого равно золотому сечению. «Отрежьте» от него квадрат. Убедитесь в том, что отношение сторон полученного прямоугольника также равно золотому сечению (в вычислениях используйте точное значение золотого сечения).

Любое квадратное уравнение можно решить, воспользовавшись формулой корней. Однако в ряде случаев корни квадратного уравнения удастся найти с помощью более простых приемов. Такими приемами прежде всего следует пользоваться при решении *неполных квадратных уравнений*.

Определение

Квадратное уравнение называется **неполным**, если хотя бы один из коэффициентов b и c равен нулю.

Например, $25x^2 - 4x = 0$, $7x^2 - 1 = 0$, $0,6x^2 = 0$ — неполные квадратные уравнения.

Рассмотрим примеры решения неполных квадратных уравнений.

■ **Пример 1.** Решим уравнение $10x^2 + 9x = 0$.

Левую часть уравнения можно разложить на множители. Тогда уравнение примет вид

$$x(10x + 9) = 0.$$

Равенство нулю произведения $x(10x + 9)$ означает, что

$$\begin{aligned} x &= 0 \text{ или } 10x + 9 = 0, \text{ т. е.} \\ x &= 0 \text{ или } x = -0,9. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение $10x^2 + 9x = 0$ имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = -0,9$.

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ решают путем разложения его левой части на множители. Оно всегда имеет два корня, причем один из корней равен нулю.

■ **Пример 2.** Решим уравнение $64x^2 - 49 = 0$.

Перенесем свободный член уравнения в правую часть. Получим

$$64x^2 = 49.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{49}{64}, \\ x &= \sqrt{\frac{49}{64}} \text{ или } x = -\sqrt{\frac{49}{64}}, \\ x &= \frac{7}{8} \text{ или } x = -\frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение имеет два противоположных корня:

$$x_1 = \frac{7}{8}, \quad x_2 = -\frac{7}{8}.$$

■ Пример 3. Решим уравнение $16x^2 + 1 = 0$.

Если выполнить те же преобразования, что и в предыдущем примере, то получим

$$x^2 = -\frac{1}{16}.$$

Но квадратный корень из отрицательного числа извлечь нельзя, поэтому уравнение корней не имеет.

Заметим, что прийти к выводу об отсутствии корней уравнения можно и без преобразований. В самом деле, выражение $16x^2$ при любом x неотрицательно (положительно или равно 0), значит, сумма $16x^2 + 1$ всегда положительна, т. е. в нуль она никогда не обращается.

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$ либо не имеет корней, либо имеет два корня, которые являются противоположными числами.

А

Решите уравнение (490—493):

490. а) $x^2 - 5x = 0$; в) $2z - 3z^2 = 0$; д) $-x - x^2 = 0$;
б) $y^2 + 3y = 0$; г) $5x + 2x^2 = 0$; е) $-2x^2 - 4x = 0$.
491. а) $4y^2 = y$; в) $3z - z^2 = 3z^2$; д) $2y - y^2 = 4y - 5y^2$;
б) $6x^2 = -x$; г) $x^2 + 1 = x + 1$; е) $z = 7z^2 - 6z$.
492. а) $x^2 - 16 = 0$; в) $y^2 + 100 = 0$; д) $16 - 4x^2 = 0$;
б) $z^2 - 25 = 0$; г) $3z^2 - 27 = 0$; е) $1 - 9z^2 = 0$.
493. а) $2y^2 - 16 = 0$; в) $24 = 2z^2$; д) $2x^2 - 1 = 0$;
б) $3x^2 = 18$; г) $7x^2 + 49 = 0$; е) $5 = 15x^2$.

494. Установите соответствие между уравнениями и утверждениями об их корнях:

- | | |
|----------------|------------------------------------|
| 1) $x^2 = 2$ | а) не имеет корней; |
| 2) $x^2 = 25$ | б) имеет два рациональных корня; |
| 3) $x^2 = -81$ | в) имеет два иррациональных корня. |

Решите уравнение (495—496):

495. а) $(x + 4)(x + 5) = 20$; д) $(x + 2)^2 = 4(x + 4)$;
б) $(x + 5)(x - 5) = 24$; е) $4(x - 1)^2 = (x + 2)^2$;
в) $5(7 - 2x) = 2x(x - 5)$; ж) $(3x - 1)^2 = 3(1 - 2x)$;
г) $x(3x - 4) = 2(5 - 2x)$; з) $(x + 3)^2 = 3(x + 1)^2$.

496. а) $0,02x^2 + 0,005x = 0$; г) $-0,001 = -0,004x^2$;

б) $\frac{x^2}{3} = \frac{x}{6}$;

д) $\frac{x-1}{5} = \frac{x^2-5}{25}$;

в) $\frac{1}{100} = \frac{x^2}{10}$;

е) $\frac{x^2}{3} = \frac{1}{27}$.

497. Найдите корни уравнения:

а) $x^3 - x = 0$;

г) $2x^2 + 4x^3 = 0$;

б) $x^3 + 4x^2 = 0$;

д) $-10x^2 + 2x^3 = 0$;

в) $9x^3 - x = 0$;

е) $2x + 18x^3 = 0$.

Решите задачу (498—502):

498. а) Произведение двух последовательных натуральных чисел больше меньшего из этих чисел на 25. Найдите эти числа.

б) Произведение двух последовательных натуральных чисел больше большего из этих чисел на 48. Найдите эти числа.

499. а) Катеты прямоугольного треугольника относятся как 6 : 8, а его гипотенуза равна 1 дм. Найдите периметр треугольника.

б) Отношение гипотенузы прямоугольного треугольника к одному из катетов равно $\frac{17}{8}$, а другой катет равен 30 см. Найдите площадь треугольника.

500. На перекрестке двух дорог встретились пешеход и велосипедист, а затем каждый продолжил свой путь: велосипедист — на север со скоростью 12 км/ч, а пешеход — на восток со скоростью 5 км/ч. Через какое время после их встречи пешеход и велосипедист окажутся на расстоянии 26 км друг от друга?

501. Секция паркета, площадь которого равна 400 см^2 , состоит из шести прямоугольных пластин одинаковой ширины (рис. 3.6). Стороны большой пластины относятся как 1 : 3. Определите размеры большой и малой пластин.

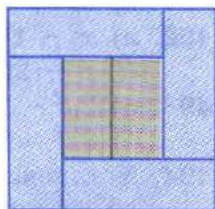


Рис. 3.6

502. При решении следующих задач воспользуйтесь формулой из задачи 475.

а) Мяч отскочил от пола вертикально вверх с начальной скоростью 10 м/с. Через сколько секунд он снова коснется пола?

б) Мальчик бросил мяч вертикально вверх с начальной скоростью 12 м/с. Через сколько секунд он поймал мяч?

Решите уравнение (503—505):

503. а) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(x+1)^2}{2} = 2$; в) $(x-2)^2 - \frac{(x-3)^2}{3} = 1$;
 б) $\frac{(x-3)^2}{3} + 3 = \frac{(x-2)^2}{2}$; г) $\frac{(x+4)^2}{2} - \frac{1}{3} = (x+2)^2$.
504. а) $(2x+1)^2 = 2x+1$; в) $(3x-1)^2 = 2(3x-1)$;
 б) $(y-2)^2 - 4 = 0$; г) $9 - (2x-3)^2 = 0$.
505. а) $(x^2-1)^3 + 2(x^2-1)^2 = 0$; в) $x^2(x^2-3)^2 - 4(x^2-3) = 0$;
 б) $x^2(x-1) - 3x(x-1) = 0$; г) $x^2(x-5)^2 - 5(x-5)^2 = 0$.
506. Составьте неполное квадратное уравнение, имеющее корни:
 а) 0 и 3; б) $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$; в) -8 и 8; г) 0 и $\sqrt{2}$.
507. Решите неполное квадратное уравнение:
 а) $ax^2 + ax = 0$; б) $ax^2 - x = 0$.
508. Имеет ли решение неполное квадратное уравнение $ax^2 + c = 0$, если:
 а) $a > 0, c > 0$; в) $a < 0, c > 0$;
 б) $a > 0, c < 0$; г) $a < 0, c < 0$?
509. Один из корней неполного квадратного уравнения $ax^2 + bx = 0$ равен 0. Определите знак другого корня, если:
 а) $a > 0, b > 0$; в) $a < 0, b > 0$;
 б) $a > 0, b < 0$; г) $a < 0, b < 0$.
- Каждый случай проиллюстрируйте конкретным примером.
510. При решении задачи из п. 3.4 было составлено уравнение: $(39-2x)(24-2x) = 700$, которое при решении свелось к полному квадратному уравнению с большими коэффициентами. Однако его можно свести и к неполному квадратному уравнению с помощью замены $y = 4 - 2x$. Действительно, эта замена приведет к тому, что «уничтожится» число 700 — правая часть уравнения:
- $$(39-2x)(24-2x) = (35 + (4-2x))(20 + (4-2x)) = (35+y)(20+y).$$
- Получаем
- $$\begin{aligned}(y+35)(y+20) &= 700, \\ y^2 + 55y + 700 &= 700, \\ y^2 + 55y &= 0.\end{aligned}$$
- Решите уравнение, используя замену, приводящую к неполному квадратному уравнению:
 а) $(9-3x)(46-3x) = 120$; б) $(5x-63)(5x-18) = 550$.

Решите задачу (511—512):

511. а) Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел на 19 больше удвоенного меньшего из них. Найдите эти числа.
б) Сумма квадратов двух последовательных положительных четных чисел на 72 больше удвоенной суммы этих чисел. Найдите эти числа.
512. Площадь кольца равна 36 см^2 . Найдите радиусы внутреннего и внешнего кругов, образующих кольцо, если известно, что первый в 2 раза меньше второго (примите $\pi \approx 3$).

3.6

Теорема Виета

Между корнями приведенного квадратного уравнения и его коэффициентами существует интересная связь. Ее легко обнаружить с помощью конкретных примеров.

Рассмотрите таблицу, в которой для нескольких приведенных квадратных уравнений указаны корни и вычислены их суммы и произведения:

Уравнение	Корни	Сумма корней	Произведение корней
$x^2 - 5x + 6 = 0$	2 и 3	5	6
$x^2 + 7x + 12 = 0$	-3 и -4	-7	12
$x^2 - 4x - 5 = 0$	-1 и 5	4	-5

Если вы сравните сумму и произведение корней каждого уравнения с его коэффициентами, то обнаружите, что в каждом случае сумма корней противоположна коэффициенту при x , а их произведение равно свободному члену. Этим свойством обладает любое приведенное квадратное уравнение, имеющее корни. Справедливо следующее утверждение:

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Сформулированное утверждение называется *теоремой Виета* — по имени выдающегося французского математика Франсуа Виета (XVI в.), хотя о связи между корнями и коэффициентами квадрат-

ного уравнения знали уже математики Древнего Вавилона и Древнего Египта.

Доказательство. Приведенное квадратное уравнение имеет вид $x^2 + bx + c = 0$, но исторически его принято записывать так: $x^2 + px + q = 0$.

Пусть это уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}, \text{ где } D = p^2 - 4q.$$

Найдем их сумму и произведение:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} + \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-p + \sqrt{D} - p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$x_1 x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Таким образом, теорема доказана.

Равенства

$$x_1 + x_2 = -p \text{ и } x_1 x_2 = q,$$

выражающие связь между корнями и коэффициентами квадратного уравнения, называют *формулами Виета*.

Используя теорему Виета, легко вывести соответствующие формулы и для квадратного уравнения, не являющегося приведенным. В самом деле, пусть квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Разделив обе его части на a , получим приведенное уравнение

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

имеющее те же корни. Тогда по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ и } x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Формулы Виета позволяют, не решая уравнение, получить некоторую информацию о его корнях.

Возьмем, например, уравнение $2x^2 - 5x - 4 = 0$. Его дискриминант положителен, т. е. это уравнение имеет корни. По теореме Виета найдем сумму и произведение корней этого уравнения:

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{2} = 2,5; \quad x_1 x_2 = -\frac{4}{2} = -2.$$

Из этих равенств ясно, что корни данного уравнения имеют разные знаки и у положительного корня модуль больше.

Рассуждая таким образом, важно не ошибиться. Так, к квадратному уравнению $2x^2 - 5x + 4 = 0$ подобные рассуждения неприменимы. Дело в том, что у этого уравнения отрицательный дискриминант ($D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -7$) и корней оно не имеет.

Соотношения между корнями и коэффициентами квадратного уравнения позволяют в некоторых случаях находить его корни устно, не прибегая к формуле корней.

Попробуем, например, подобрать корни квадратного уравнения $x^2 - 8x + 15 = 0$. Формулы Виета подсказывают решение: корнями должны быть числа, сумма которых равна 8 и произведение которых равно 15. Легко видеть, что этим условиям отвечают числа 5 и 3: $5 + 3 = 8$ и $5 \cdot 3 = 15$. Подставив числа 5 и 3 в уравнение, убедимся, что они действительно являются его корнями: $5^2 - 8 \cdot 5 + 15 = 0$ и $3^2 - 8 \cdot 3 + 15 = 0$.

Решение квадратного уравнения путем подбора его корней основано на следующей теореме:

Если числа m и n таковы, что $m + n = -p$, а $mn = q$, то эти числа являются корнями уравнения

$$x^2 + px + q = 0.$$

Это теорема, обратная теореме Виета. Чтобы доказать ее, выразим коэффициенты уравнения $x^2 + px + q = 0$ через m и n : $p = -(m + n)$ и $q = mn$. Значит, уравнение можно записать в таком виде:

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0.$$

Подставим в уравнение вместо x поочередно числа m и n :

$$m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - mn + mn = 0,$$

$$n^2 - (m + n)n + mn = n^2 - mn - n^2 + mn = 0.$$

Таким образом, эти числа — корни уравнения.

А

513. Не решая уравнения, укажите, имеет ли оно корни и чему равны произведение и сумма его корней:

а) $x^2 - 14x + 40 = 0$; г) $2x^2 - 5x - 3 = 0$;

б) $x^2 + 16x + 15 = 0$; д) $4x^2 + 16x + 15 = 0$;

в) $x^2 - 2x - 1 = 0$; е) $3x^2 + 11x - 4 = 0$.

514. Все данные уравнения имеют корни. В каждом случае объясните, почему уравнение имеет корни одинаковых знаков, и определите знаки корней:

а) $x^2 + 3x + 2 = 0$; в) $x^2 - 5x + 4 = 0$; д) $x^2 - 6x + 8 = 0$;

б) $x^2 - 3x + 2 = 0$; г) $x^2 + 5x + 4 = 0$; е) $x^2 + 8x + 7 = 0$.

515. Все данные уравнения имеют корни. В каждом случае объясните, почему уравнение имеет корни разных знаков. Определите, какой из корней больше по модулю — положительный или отрицательный:

а) $x^2 + 5x - 6 = 0$; в) $x^2 + 4x - 21 = 0$; д) $x^2 - 2x - 3 = 0$;

б) $x^2 - 5x - 6 = 0$; г) $x^2 - 4x - 21 = 0$; е) $x^2 + 2x - 3 = 0$.

516. Не применяя формулу корней, найдите второй корень уравнения, если известен первый:

а) $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = 2$; в) $x^2 + 3x - 18 = 0$, $x_1 = 3$;

б) $x^2 + 8x + 15 = 0$, $x_1 = -3$; г) $x^2 - 6x - 7 = 0$, $x_1 = 7$.

Решите квадратное уравнение подбором корней (517—519):

517. а) $y^2 + 9y + 20 = 0$; д) $x^2 + 13x + 30 = 0$;

б) $x^2 - 11x + 24 = 0$; е) $y^2 - 17y + 30 = 0$;

в) $t^2 - 9t + 8 = 0$; ж) $t^2 + 12t + 32 = 0$;

г) $z^2 + 12z + 20 = 0$; з) $u^2 - 15u + 50 = 0$.

518. а) $x^2 - 3x - 10 = 0$; д) $x^2 + 5x - 14 = 0$;

б) $u^2 - 4u - 5 = 0$; е) $t^2 - t - 42 = 0$;

в) $v^2 + 7v - 60 = 0$; ж) $y^2 + 5y - 50 = 0$;

г) $y^2 + y - 56 = 0$; з) $z^2 + z - 20 = 0$.

519. а) $z^2 - 11z + 18 = 0$; д) $u^2 + 14u + 24 = 0$;

б) $x^2 + 5x - 6 = 0$; е) $z^2 - 2z - 3 = 0$;

в) $y^2 - 14y + 33 = 0$; ж) $x^2 + 13x + 12 = 0$;

г) $t^2 + 7t - 18 = 0$; з) $y^2 - 4y - 21 = 0$.

520. Для составления квадратного уравнения, имеющего корни 8 и 7, можно применить два способа:

1) составить произведение $(x - 8)(x - 7) = 0$, откуда получаем уравнение $x^2 - 15x + 56 = 0$;

2) использовать формулы Виета:

$x^2 - (8 + 7)x + 8 \cdot 7 = 0$, откуда получаем то же уравнение $x^2 - 15x + 56 = 0$.

Составьте двумя способами квадратное уравнение, имеющее корни:

а) 11 и 4; б) -4 и -5; в) -10 и 2; г) -1 и 15.

Б

521. Определите, имеет ли уравнение корни. Если имеет, то ответьте на следующие вопросы: 1) Сколько корней имеет уравнение? 2) Рациональными или иррациональными являются его корни? 3) Каковы знаки корней? 4) Если корни разных знаков, то какой из них имеет больший модуль?

а) $3x^2 + 7x + 2 = 0$; д) $5x^2 - 3x + 1 = 0$;
б) $3y^2 - 8y + 2 = 0$; е) $-6z^2 + 11z - 3 = 0$;
в) $4x^2 - 11x - 3 = 0$; ж) $-2y^2 + 4y - 3 = 0$;
г) $-8z^2 - 2z + 3 = 0$; з) $2x^2 - 10x - 5 = 0$.

522. Уравнение $(3x - 7)(3x + 1) = 7$ с помощью замены $y = 3x - 7$ сводится к уравнению, которое легко решается устно с использованием формул Виета:

$$(3x - 7)(3x + 1) = y((3x - 7) + 8) = y(y + 8).$$

Получаем уравнение $y(y + 8) = 7$. Отсюда $y^2 + 8y - 7 = 0$.

Воспользовавшись этим приемом, решите уравнение:

а) $(12 - 3x)(18 - 3x) = -5$; б) $(2x + 6)(5 - 2x) = 10$.

523. а) Один из корней уравнения $x^2 + px - 20 = 0$ равен -5. Определите другой корень и коэффициент p .

б) Один из корней уравнения $3x^2 + px + 4 = 0$ равен -2. Определите другой корень и коэффициент p .

524. а) Один из корней уравнения $x^2 - 8x + q = 0$ равен -10. Определите другой корень и коэффициент q .

б) Один из корней уравнения $2x^2 + 3x + q = 0$ равен 3. Определите другой корень и коэффициент q .

525. Найдите все целые значения p , при которых данное уравнение имеет целые корни:

а) $x^2 + px + 15 = 0$; д) $x^2 + px + 10 = 0$;
б) $x^2 + px - 15 = 0$; е) $x^2 + px - 8 = 0$;
в) $x^2 + px + 12 = 0$; ж) $x^2 + px + 3 = 0$;
г) $x^2 + px - 12 = 0$; з) $x^2 + px - 32 = 0$.

Образец. $x^2 + px + 15 = 0$.

Решение. Найдем все пары целых чисел, произведение которых равно 15:

$$15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5 = (-1) \cdot (-15) = (-3) \cdot (-5).$$

Соответствующие значения p равны 16, 8; -16, -8.

526. Найдите все целые положительные значения q , при которых данное уравнение имеет целые корни:

а) $x^2 + 5x + q = 0$; б) $x^2 - 6x + q = 0$.

Найдите несколько целых отрицательных значений q , при которых указанные уравнения имеют целые корни. Можно ли перечислить все такие значения q ?

527. Составьте квадратное уравнение, корни которого:

а) на 2 меньше корней уравнения $x^2 - 187x + 148 = 0$;

б) на 3 больше корней уравнения $x^2 + 191x - 1250 = 0$.

Образец. а) Пусть y_1 и y_2 — корни уравнения, которое надо составить. Тогда

$$y_1 = x_1 - 2, \quad y_2 = x_2 - 2;$$

$$y_1 + y_2 = (x_1 + x_2) - 4,$$

$$y_1 \cdot y_2 = (x_1 - 2)(x_2 - 2) = x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4.$$

Доведите решение до конца.

528. Составьте квадратное уравнение, если известно, что:

а) $x_1 x_2 = 12$, $x_1^2 + x_2^2 = 40$; б) $x_1 x_2 = -3$, $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Указание. Найдите сумму корней уравнения, воспользовавшись формулой квадрата суммы двух чисел.

529. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Выразите через коэффициенты p и q :

а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $x_1^3 + x_2^3$; в) $x_1^4 + x_2^4$.

530. (Задача-исследование.)

1) Докажите, что если сумма коэффициентов квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна нулю, то одним из корней этого уравнения является число 1.

2) Составьте какое-нибудь квадратное уравнение, имеющее корень, равный 1, и найдите второй корень этого уравнения.

3) Найдите устно корни уравнения:

а) $x^2 - 1999x + 1998 = 0$; в) $8x^2 - 5x - 3 = 0$;

б) $x^2 + 2000x - 2001 = 0$; г) $100x^2 - 150x + 50 = 0$.

Многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называют *квадратным трехчленом*. Так, например, многочлены $10x^2 - 3x + 6$ и $-x^2 + \sqrt{2}x - 12$ являются квадратными трехчленами. Заметим, что квадратный трехчлен необязательно должен состоять из трех слагаемых. Такой многочлен, как, например, $10x^2 - 25$, тоже является квадратным трехчленом — просто его второй коэффициент равен 0.

Обратите внимание: в левой части квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ записан квадратный трехчлен. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ называют также *корнями квадратного трехчлена* $ax^2 + bx + c$. Иными словами, корни квадратного трехчлена — это значения переменной, при которых квадратный трехчлен обращается в нуль. Понятно, что квадратный трехчлен, как и квадратное уравнение, может иметь два корня, один корень или не иметь корней. И зависит это от знака выражения $D = b^2 - 4ac$, которое называют также *дискриминантом квадратного трехчлена*.

Квадратный трехчлен, имеющий корни, можно разложить на множители.

Возьмем трехчлен $x^2 - 5x + 6$. Чтобы разложить его на множители, применим способ группировки, причем формулы Виета подскажут нам, какую группировку использовать. Корни этого трехчлена — числа 2 и 3. Выразив коэффициенты трехчлена через корни, получим

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= x^2 - (2 + 3)x + 2 \cdot 3 = x^2 - 2x - 3x + 2 \cdot 3 = \\ &= x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3). \end{aligned}$$

Разложим теперь на множители трехчлен $2x^2 - 10x + 12$. Понятно, что он имеет те же корни, что и трехчлен $x^2 - 5x + 6$ (объясните почему). Сначала вынесем за скобки коэффициент при x^2 , получим

$$2x^2 - 10x + 12 = 2(x^2 - 5x + 6) = 2(x - 2)(x - 3).$$

Точно так же обстоит дело и в общем случае:

Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Проще всего провести доказательство так: выполнить умножение в правой части этого равенства и убедиться в том, что при этом получается левая часть. Будем иметь

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = \\ &= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

В ходе доказательства, воспользовавшись теоремой Виета, мы выполнили подстановку:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ и } x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Итак, если квадратный трехчлен имеет корни, то он раскладывается на множители. Верно и обратное утверждение: если квадратный трехчлен раскладывается на линейные множители, то он имеет корни. В самом деле, если $ax^2 + bx + c = (kx + l)(mx + n)$, то, например, число $-\frac{n}{m}$ — корень трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Это обратное утверждение можно сформулировать по-другому:

Если квадратный трехчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на линейные множители.

Приведем примеры разложения квадратного трехчлена на множители с использованием доказанной формулы.

■ **Пример 1.** Разложим на множители трехчлен $-3x^2 - 5x + 2$. Решив уравнение $-3x^2 - 5x + 2 = 0$, найдем, что корни трехчлена — числа $\frac{1}{3}$ и -2 . Воспользовавшись формулой $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, получим

$$\begin{array}{ccccccc} -3x^2 - 5x + 2 & = & (-3) & \left(x - \frac{1}{3}\right) & (x + 2). \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & a & (x - x_1) & (x - x_2) \end{array}$$

Разложение на множители будет более красивым, если перемножить число -3 и двучлен $x - \frac{1}{3}$. Тогда трехчлен $-3x^2 - 5x + 2$ будет записан в виде произведения двух линейных двучленов:

$$-3x^2 - 5x + 2 = (1 - 3x)(x + 2).$$

Формула разложения квадратного трехчлена на множители справедлива и в том случае, если его дискриминант равен 0. При этом говорят, что трехчлен имеет *два равных корня*.

■ **Пример 2.** Разложим на множители трехчлен

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}.$$

Решив уравнение $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = 0$, найдем, что $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$. Таким образом,

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2.$$

Конечно, трехчлен $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$ можно было бы «свернуть» в квадрат двучлена известным способом — воспользовавшись формулой $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Таким образом, если дан квадратный трехчлен, то, вычислив его дискриминант, вы можете выяснить, раскладывается ли этот трехчлен на линейные множители или нет. А для разложения трехчлена на множители вы теперь можете пользоваться простым способом, не требующим какой-либо догадки, как это было при использовании способа группировки.

А

531. Найдите корни квадратного трехчлена:

- а) $x^2 - 15x + 50$; в) $3x^2 - 2x - 1$;
б) $2x^2 + 9x + 4$; г) $x^2 + 14x + 48$.

532. Определите, можно ли разложить на линейные множители квадратный трехчлен:

- а) $x^2 - 12x - 4$; в) $2x^2 + 3x + 1$;
б) $3x^2 + 8x + 10$; г) $x^2 - 5x + 8$.

Разложите на множители (533—535):

533. а) $m^2 + 3m - 18$; г) $a^2 + a - 6$;
б) $b^2 + 9b + 8$; д) $n^2 - 4n - 60$;
в) $d^2 + 11d + 18$; е) $x^2 - 23x + 60$.
534. а) $21 + 10n + n^2$; в) $42 - 13b + b^2$;
б) $14 - 9k + k^2$; г) $48 - 14c + c^2$.
535. а) $2x^2 + 3x + 1$; в) $-4z^2 + 11z + 3$; д) $3 - 11m + 6m^2$;
б) $3y^2 + 7y - 6$; г) $3a^2 + 7a + 2$; е) $2 + 9n + 7n^2$.

536. (Задание с выбором ответа.) В каком случае представлено разложение квадратного трехчлена $3x^2 - 4x - 4$ на линейные множители?

- А. $\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 2)$. В. $3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 2)$.
Б. $\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 2)$. Г. $3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 2)$.

537. Покажите, что квадратные трехчлены $x^2 + 2x - 3$, $2x^2 + 4x - 6$, $-5x^2 - 10x + 15$ имеют одни и те же корни. Разложите эти квадратные трехчлены на множители.

538. Сократите дробь:

а) $\frac{x^2+6x+5}{x^2+5x}$; в) $\frac{y^2-7y+12}{2y^2-8y}$; д) $\frac{m^2-2m-8}{m^2+4m+4}$;
б) $\frac{a^2-9}{a^2+8a+15}$; г) $\frac{b^2-25}{b^2-8b+15}$; е) $\frac{n^2+2n+1}{n^2+5n+4}$.

539. Разложите на множители:

а) x^3+3x^2+2x ; в) x^3-12x^2+32x ;
б) x^3-7x^2+10x ; г) $x^4+x^3-6x^2$.

540. Составьте какое-нибудь уравнение, имеющее корни:

а) 2; -8; в) 0; 10; 12; д) 1; 2; -3;
б) 0; -1; 5; г) 1; 2; -2; е) 0; 1; 2; 3.



541. Представьте в виде произведения двух линейных множителей с целыми коэффициентами:

а) $6x^2+25x+14$; г) $8m^2-27m-20$;
б) $18y^2-19y-12$; д) $-6a^2+a+12$;
в) $-12z^2-11z+15$; е) $24b^2+5b-36$.

542. Найдите все целые значения m , при которых квадратный трехчлен можно разложить на линейные двучлены с целыми коэффициентами:

а) $c^2+mc+10$; в) $x^2+mx-21$;
б) z^2+mz+3 ; г) $y^2+my-12$.

543. Найдите значение k , при котором:

а) разложение на множители трехчлена $2x^2+5x+k$ содержит множитель $(x+3)$;
б) разложение на множители трехчлена $3x^2-8x+k$ содержит множитель $(x-2)$;
в) разложение на множители трехчлена $-4x^2+kx+1$ содержит множитель $(x-1)$;
г) разложение на множители трехчлена $2x^2-5x+k$ содержит множитель $(2x+3)$;
д) разложение на множители трехчлена $4x^2-8x+k$ содержит множитель $(2x-1)$.

544. Сократите дробь:

а) $\frac{x^3+1}{3x^2+2x-1}$; в) $\frac{1-x^2}{5x^2-4x-1}$; д) $\frac{5+3x-2x^2}{1-x-2x^2}$;
б) $\frac{x^3-1}{2x^2+x-3}$; г) $\frac{2x^2-7x+3}{x-2x^2}$; е) $\frac{3x^2-4x-4}{6-x-x^2}$.

Разложите на множители (545—548):

545. а) $x^2(x-5) - x(x-5) - 42(x-5)$;
б) $y^2(y+3) + 9y(y+3) + 20(y+3)$;
в) $2v^2(1-v^2) - 5v(1-v^2) - 3(1-v^2)$;
г) $3a^2(a^2-4) + 2a(a^2-4) - a^2 + 4$.
546. а) $x^4 - 5x^2 + 4$; в) $4x^4 - 32x^2$;
б) $m^4 - 13m^2 + 36$; г) $3x^4 - 75$.
547. а) $(x+y)^2 - 3(x+y) - 10$; г) $(a-2)^2 + 4(a-2) - 21$;
б) $(a+b)^2 - 5(a+b) - 84$; д) $(3-y)^2 - 2(3-y) - 35$;
в) $(m+n)^2 + 3(m+n) + 2$; е) $(1-x)^2 - 6(1-x) + 8$.
548. а) $m^2 - 11mn + 28n^2$; г) $b^2 + 6bc - 55c^2$;
б) $a^2 - 16ab - 36b^2$; д) $n^2 + 14an + 24a^2$;
в) $x^2 + 21xy + 20y^2$; е) $a^2 - 9ac - 36c^2$.

Указание. а) Решите уравнение $m^2 - 11mn + 28n^2 = 0$ относительно m ; сделайте это устно, пользуясь формулами Виета.

3.8

Целые корни уравнения с целыми коэффициентами

(Для тех, кому интересно)

Вам уже приходилось находить корни квадратного уравнения без использования общей формулы корней, непосредственным подбором. Познакомимся еще с одним приемом бесформульного решения квадратного уравнения, с помощью которого можно отыскать его целый корень (если, конечно, такой есть). При этом мы будем рассматривать только уравнения с целыми коэффициентами.

Возьмем уравнение $5x^2 - 14x - 3 = 0$. Предположим, что целое число m — корень этого уравнения, т. е. $5m^2 - 14m - 3 = 0$. Это равенство можно переписать так: $m(5m - 14) = 3$. Число, записанное слева, делится на m , поэтому и равное ему число 3 также делится на m . Мы пришли к выводу: если уравнение $5x^2 - 14x - 3 = 0$ имеет целый корень, то он является делителем свободного члена.

Теперь понятно, как этот целый корень можно отыскать: нужно выписать все делители свободного члена и затем подстановкой проверить, является ли какое-нибудь из этих чисел корнем уравнения.

Всего имеем четыре делителя: 1, -1, 3 и -3. Подставляя их в уравнение, получим

$$5 \cdot 1^2 - 14 \cdot 1 - 3 \neq 0,$$

$$5 \cdot (-1)^2 - 14 \cdot (-1) - 3 \neq 0,$$

$$5 \cdot 3^2 - 14 \cdot 3 - 3 = 0.$$

Итак, число $x_1 = 3$ — корень уравнения. А второй корень можно найти, воспользовавшись, например, соотношением $x_1 x_2 = -\frac{3}{5}$.

Подставив вместо x_1 число 3, получим

$$3x_2 = -\frac{3}{5}, \quad x_2 = -\frac{1}{5}.$$

У вас может возникнуть естественный вопрос: «Зачем нужен такой прием, когда любое квадратное уравнение можно решить по формуле корней?»

Оказывается, в некоторых случаях такой способ отыскания корней может быть очень полезен. Возьмем, например, уравнение $183x^2 - 184x + 1 = 0$. Если решать его по формуле, то придется выполнять громоздкие вычисления. В то же время с помощью рассмотренного приема легко обнаружить, что один из его корней равен 1. (Найдите самостоятельно второй корень.)

Существенным также является то, что этот прием носит общий характер. Его можно использовать для нахождения целых корней не только квадратных уравнений, но и уравнений более высоких степеней, например уравнений третьей степени (или кубических) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где $a \neq 0$; четвертой степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, где $a \neq 0$. Для таких уравнений формулы корней хотя и существуют, но настолько сложны, что в явном виде их даже не выписывают. А уже для уравнения пятой степени формулы корней вообще не существуют.

Поэтому для решения уравнений третьей и четвертой степени мы пользовались *специальными приемами* — разложением на множители многочлена в левой части, понижением степени уравнения с помощью подстановки. А теперь еще будем использовать прием отыскания целого корня, который основан на следующем утверждении:

Всякий целый корень уравнения с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.

■ **Пример 1.** Найдем целые корни уравнения

$$2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Выпишем делители свободного члена: 1; -1; 2; -2. Подставим их в уравнение:

$$2 \cdot 1^3 - 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = 0,$$

$$2 \cdot 2^3 + 2^2 - 5 \cdot 2 + 2 \neq 0,$$

$$2 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 2 \neq 0,$$

$$2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 2 = 0.$$

Таким образом, уравнение имеет два целых корня: 1 и -2.

Если найден какой-нибудь целый корень уравнения, то его левую часть можно разложить на множители, один из которых есть разность между переменной и этим корнем. А это часто дает возможность найти и другие корни уравнения или установить, что их нет.

■ Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0.$$

Легко найти его целый корень, равный 1 (сделайте это самостоятельно). Разложим левую часть уравнения на множители, одним из которых будет разность $(x - 1)$. Для этого воспользуемся способом группировки.

Чтобы у нас появился одночлен, который можно будет объединить в группу со старшим членом $6x^3$, отнимем от левой части уравнения одночлен $6x^2$ и прибавим его:

$$\underbrace{6x^3 - 6x^2} + 6x^2 - 11x^2 + 6x - 1 = 0,$$

$$6x^2(x - 1) - 5x^2 + 6x - 1 = 0.$$

Теперь прибавим и вычтем $5x$:

$$6x^2(x - 1) - \underbrace{5x^2 + 5x} - 5x + 6x - 1 = 0,$$

$$6x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + (x - 1) = 0.$$

Вынесем за скобку двучлен $(x - 1)$, тогда уравнение примет вид

$$(x - 1)(6x^2 - 5x + 1) = 0.$$

Теперь можно выяснить, имеет ли уравнение $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$ другие корни. Для этого достаточно решить квадратное уравнение

$6x^2 - 5x + 1 = 0$. Получим $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Значит, уравнение $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$ имеет три корня: 1, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.

549. Найдите корни квадратного уравнения, не пользуясь формулой корней:

а) $2x^2 - 3x + 1 = 0$; в) $3x^2 - 10x - 8 = 0$;

б) $4x^2 + 7x + 3 = 0$; г) $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

Указание. Сначала найдите целый корень уравнения.

550. Найдите целые корни уравнения, если они есть:

а) $30x^2 - 23x - 2 = 0$;

б) $x^3 + 5x^2 - 17x - 21 = 0$;

в) $2x^3 - 5x^2 - 22x - 15 = 0$;

г) $3x^4 - 2x^2 + 3 = 0$;

д) $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$.

551. Решите уравнение:

а) $x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$;

в) $2x^3 - 7x^2 + 9 = 0$;

б) $x^3 - 12x^2 + 9x + 22 = 0$;

г) $5x^3 - 54x^2 + 39x + 10 = 0$.

552. Разложите на множители многочлен:

а) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$;

в) $4x^3 + 21x^2 - 25$.

б) $x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6$;

553. Определите степень уравнения

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0.$$

Выведите формулы Виета для этого уравнения.

Д3

Дополнительные задания к главе 3

Решение уравнений

554. Решите уравнение (554—557):

а) $(x + 1)^2 - 2(x + 1) + 1 = 0$;

в) $(1 - x)^2 + 6(1 - x) + 8 = 0$;

б) $(x - 2)^2 - 4(x - 2) - 5 = 0$;

г) $(3 - x)^2 + (3 - x) - 6 = 0$.

555. а) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$;

в) $9x^4 - 82x^2 + 9 = 0$;

б) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$;

г) $4x^4 + 9x^2 + 2 = 0$.

556. а) $x - 6\sqrt{x} + 5 = 0$;

в) $5x - 6\sqrt{x} + 1 = 0$;

б) $3x - 10\sqrt{x} + 3 = 0$;

г) $2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$.

557. а) $x^2 + 1 - \frac{x^2 + 3}{3} = \frac{x^2 + 2}{2} - \frac{x^2 + 4}{4}$;

б) $\frac{(x - 2)^2}{12} - \frac{(x - 1)^2}{3} = \frac{(x - 3)^2}{9} - \frac{(x - 2)^2}{4}$.

Решение задач

558. а) В аудитории расставили 96 стульев одинаковыми рядами. Сколько всего рядов, если число мест в ряду на 4 больше числа рядов?
б) Для спортивного парада 112 ребят построили в колонну из нескольких шеренг. Сколько шеренг в колонне, если их число на 6 меньше числа ребят в шеренге?
559. а) Периметр прямоугольника равен 38 см. Найдите его стороны, если площадь прямоугольника равна 84 см^2 .
б) Детская площадка прямоугольной формы обнесена забором, длина которого 56 м. Найдите длины сторон этой площадки, если ее площадь равна 140 м^2 .
560. а) Сумма квадратов двух последовательных натуральных четных чисел равна 340. Найдите эти числа.
б) Сумма квадратов двух последовательных целых чисел равна 41. Найдите эти числа.
561. Имеется прямоугольный кусок фанеры площадью 240 дм^2 . Из него изготовили квадратную крышку для ящика. Для этого от фанеры отпилили с одной стороны полосу шириной 5 дм, а с другой — шириной 6 дм. Определите размеры получившейся крышки.
562. В Третьяковской галерее висит картина художника Богданова-Бельского «Устный счет». На классной доске записано выражение $\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$. В числителе — сумма квадратов пяти последовательных целых чисел. Ученики могут найти значение этого выражения устно, если они заметят, что сумма квадратов первых трех из них равна сумме квадратов последних двух (проверьте!). Существуют ли еще пять последовательных целых чисел, которые обладают таким же свойством?
(Указание. Вычисления будут проще, если при составлении уравнения буквой обозначить второе число.)
563. В школе 400 учащихся ежедневно покупают завтрак, стоимость которого 30 р. Если столовая поднимет цену на завтрак, то повышение на каждые 5 р. приведет к тому, что 10 школьников начнут приносить завтрак из дома. Если, однако, цена станет выше 100 р., то никто из учащихся не будет завтракать в столовой. Когда цена была поднята, столовая получила за день на 3200 р. больше, чем обычно. Сколько школьников перестали покупать завтрак в столовой?
564. Магазин покупает на оптовом складе партию тетрадей в 500 штук по цене 4 р. за тетрадь. Увеличение партии на каж-

дые 50 тетрадей приводит к снижению цены одной тетради на 20 к. Эта скидка сохраняется только в том случае, если общая партия не превышает 750 тетрадей. Магазин дополнительно заплатил еще 210 р. На сколько тетрадей увеличилась закупаемая партия?

Теорема Виета и квадратный трехчлен

565. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Запишите уравнение, корни которого равны:

а) mx_1 и mx_2 ; б) $\frac{m}{x_1}$ и $\frac{m}{x_2}$.

566. Составьте уравнение, корнями которого являются числа $x_1 + 1$ и $x_2 + 1$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

567. Дано уравнение $x^2 - 39x + 324 = 0$. Не вычисляя корней x_1 и x_2 данного уравнения, найдите: $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$; $x_1^2 + x_2^2$; $(x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2$; $x_1^3 + x_2^3$.

568. Напишите два каких-нибудь квадратных трехчлена, имеющие одни и те же корни, равные:

а) -4 и 5; б) -2 и $-\frac{1}{3}$; в) $1\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$.

569. Докажите, что:

а) $\frac{a+2}{a-5} - \frac{3a}{a^2-7a+10} - \frac{2}{a-2} = \frac{3-a}{5-a}$;

б) $1 + \frac{a-4}{a-3} - \frac{a}{a+4} - \frac{7a}{a^2+a-12} = \frac{a-7}{a-3}$.

570. Упростите выражение:

а) $\frac{3a}{a^3-1} - \frac{3}{a^2+a+1} - \frac{1}{a-1}$; б) $\frac{2}{a+2} - \frac{6}{a^2-2a+4} - \frac{24}{a^3+8}$.



Вопросы для повторения к главе 3

1. Какое уравнение называется квадратным? Приведите примеры. Назовите коэффициенты a , b , c этого уравнения.
2. Запишите формулу корней квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0.$$
3. Сколько корней может иметь квадратное уравнение? Как это зависит от дискриминанта? Определите, сколько корней имеет уравнение:
а) $x^2 - 7x - 4 = 0$; б) $2x^2 + x + 2 = 0$; в) $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

4. Запишите формулу корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом.
5. Приведите пример неполного квадратного уравнения вида $ax^2 + bx = 0$. Покажите на этом примере, как решаются уравнения такого вида. Сколько корней имеет уравнение вида $ax^2 + bx = 0$?
6. Приведите пример неполного квадратного уравнения вида $ax^2 + c = 0$. Покажите на этом примере, как решаются уравнения такого вида. Сколько корней может иметь уравнение вида $ax^2 + c = 0$?
7. Сформулируйте и докажите теорему Виета. Чему равны произведение и сумма корней уравнения $x^2 - 27x + 180 = 0$?
8. Чему равны сумма и произведение корней неприведенного квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$? Определите знаки корней уравнения: а) $3x^2 - 5x + 2 = 0$; б) $2x^2 + 7x - 3 = 0$. В случае если корни имеют разные знаки, определите, модуль какого из них больше.
9. Приведите пример квадратного трехчлена. Запишите формулу для разложения на множители квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, корни которого равны x_1 и x_2 . Разложите на множители многочлен $-2x^2 + x + 3$.



Задания для самопроверки к главе 3

(Обязательные результаты обучения)

1. Решите уравнение:
а) $3x^2 + 5x - 2 = 0$; б) $x^2 - 2x - 1 = 0$; в) $4x^2 - 12x + 9 = 0$.
2. Вычислив дискриминант квадратного уравнения, определите:
1) имеет ли уравнение корни; 2) если имеет, то сколько; 3) рациональными или иррациональными числами являются корни:
а) $5x^2 - 11x + 2 = 0$; в) $2x^2 - x - 2 = 0$;
б) $x^2 + 3x + 5 = 0$; г) $9x^2 + 6x + 1 = 0$.
3. Решите уравнение:
а) $3x^2 = 2x + 4$; б) $(x - 1)(2x + 3) = -2$; в) $\frac{x^2 + 7}{2} = 4x$.
Решите задачу (4—5):
4. Вокруг детской площадки прямоугольной формы сооружена изгородь, длина которой 30 м. Определите размеры площадки, если ее площадь равна 50 м^2 .
5. Сумма n последовательных натуральных чисел, начиная с 1, вычисляется по формуле $A = \frac{n^2 + n}{2}$. Сколько последовательных

натуральных чисел, начиная с 1, надо сложить, чтобы в сумме получить 55?

6. Решите уравнение:

а) $3x^2 - 2x = 0$; в) $2x^2 - 18 = 0$; д) $3x^2 - 9 = 0$;

б) $2x^2 + 3x = x^2$; г) $4x^2 = 9$; е) $5x^2 + 1 = 0$.

7. Укажите, чему равны произведение и сумма корней уравнения, и определите знаки корней:

а) $x^2 - 7x + 12 = 0$; в) $x^2 - 4x - 32 = 0$;

б) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; г) $3x^2 + 11x - 4 = 0$.

8. Разложите, если возможно, на множители:

а) $x^2 + 6x - 7$; б) $4x^2 - 9x + 2$; в) $3x^2 - 2x + 1$.



Тест к главе 3

1. Решите уравнение $2x^2 - 13x + 21 = 0$.

Ответ. _____

2. Соотнесите каждое уравнение с числом его корней:

1) $x^2 + 3x - 10 = 0$; 2) $x^2 - 3x + 3 = 0$; 3) $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

а) Один корень; б) два корня; в) нет корней.

Ответ. 1) _____; 2) _____; 3) _____

3. При каких значениях переменной x дробь $\frac{x-2}{x^2+4x-21}$ не имеет смысла?

Ответ. _____

4. Найдите корни уравнения $5x^2 - 8 = (x - 4)(3x - 1) + 8x$.

А. -4 и $\frac{3}{2}$. Б. -4 и $-\frac{3}{2}$. В. 4 и $\frac{1}{3}$. Г. $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{2}$.

5. Дано уравнение $x^2 + 2x + c = 0$, где c — некоторое число, x — переменная. Найдите значение c , при котором один из корней уравнения равен 6.

Ответ. _____

6. При каком из данных значений c уравнение $x^2 - 8x + c = 0$ не имеет корней?

А. 5. Б. 7. В. 16. Г. 20.

7. Сколько корней имеет уравнение $(2x^2 - 3x + 2)(2x^2 - x - 2) = 0$?

А. 0. Б. 1. В. 2. Г. 4.

8. При каких значениях a и c уравнение $ax^2 + c = 0$ не имеет решения?
 А. $a > 0, c = 0$. В. $a < 0, c < 0$.
 Б. $a > 0, c < 0$. Г. $a < 0, c > 0$.
9. Решите уравнение $2x^2 = \frac{1}{2}$.
 Ответ. _____
10. Решите уравнение $x^2 = 3x$.
 А. 3. Б. 3; -3. В. 0; $\sqrt{3}$. Г. 0; 3.
11. Найдите значения x , при которых значения выражений $x - x^3$ и $2x - 5x^3$ равны.
 Ответ. _____
12. Какое из следующих уравнений является биквадратным уравнением?
 А. $x^4 + 3x^2 + x = 0$. В. $x^4 + x - 5 = 0$.
 Б. $x^4 + 5x^3 - 6 = 0$. Г. $x^4 + x^2 + 1 = 0$.
13. Найдите значения x , при которых выполняется равенство $x^4 = 8x^2 + 9$.
 Ответ. _____
14. Укажите корни уравнения $x^2 + (m - n)x - mn = 0$.
 А. $x_1 = m, x_2 = n$. В. $x_1 = -m, x_2 = n$.
 Б. $x_1 = -m, x_2 = -n$. Г. $x_1 = m, x_2 = -n$.
15. Разложите, если возможно, на множители квадратный трехчлен $2x^2 + 15x + 25$.
 А. Это невозможно. В. $(x + 5)(x + 2,5)$.
 Б. $(x + 5)(2x + 5)$. Г. $2(x + 5)(x + 0,5)$.
16. Задача. Одно число на 5 меньше другого. Сумма большего числа и квадрата меньшего равна 17. Найдите эти числа. Обозначьте меньшее число буквой x . Какое уравнение соответствует условию задачи?
 А. $x^2 + 11x + 8 = 0$. В. $x^2 - 9x + 8 = 0$.
 Б. $x^2 + x - 12 = 0$. Г. $x^2 + x - 22 = 0$.
17. Решите задачу, условие которой сформулировано в предыдущем задании.
 Ответ. _____
18. С вертолета, летящего на высоте 120 м, на луг сброшен груз с начальной скоростью 10 м/с. Через сколько секунд груз приземлится? (Воспользуйтесь формулой $h = vt + 5t^2$.)
 А. Через 12 с. Б. Через 10 с. В. Через 6 с. Г. Через 4 с.



Системы уравнений

4.1

Линейное уравнение с двумя переменными

До сих пор, составляя уравнение по условию задачи, мы всегда вводили одну букву. Но во многих случаях для перевода задачи на математический язык удобно использовать две буквы.

Пусть, например, надо найти два числа, сумма которых равна их удвоенной разности. Обозначим одно число буквой x , а другое — буквой y . Тогда в соответствии с условием задачи $x + y = 2(x - y)$.

Это равенство, которое мы составили по условию задачи, называют *уравнением с двумя переменными*. Вообще любое равенство, содержащее две переменные, например $6x - 5y + 1 = 0$, $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 25$, $xy = 12$, можно рассматривать как уравнение с двумя переменными.

Для уравнения с одной переменной главным был вопрос о его корнях. Имея уравнение с двумя переменными, мы будем говорить о парах чисел — его *решениях*.

Решением уравнения с двумя переменными называется всякая пара значений переменных, которая обращает это уравнение в верное числовое равенство.

Так, решением уравнения $x + y = 2(x - y)$ является пара чисел $x = 9$, $y = 3$. В самом деле, равенство $9 + 3 = 2 \cdot (9 - 3)$ верное. Точно так же решениями этого уравнения служат пары $(15; 5)$, $(-6; -2)$, $(30; 10)$. А вот пара $(8; 2)$ его решением не является, так как равенство $8 + 2 = 2 \cdot (8 - 2)$ неверное.

Обратите внимание: мы записали пары значений переменных в круглых скобках как координаты точек на плоскости. При такой записи на первом месте обязательно ставят значение той переменной, которая по алфавиту идет первой. В данном случае это переменная x .

Среди уравнений с двумя переменными важную роль играют так называемые *линейные уравнения*.

Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида $ax + by = c$, где a , b и c — произвольные числа.

Например, уравнение $6x - 5y = 7$ является линейным, а уравнение $\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 7$ нет.

Уравнение с двумя переменными, так же как и уравнение с одной переменной, можно преобразовывать: переносить слагаемое из одной части уравнения в другую, меняя при этом его знак на противоположный; умножать и делить обе части уравнения на одно и то же число, отличное от нуля. При этом получается уравнение, имеющее те же решения, что и исходное.

Используя эти свойства, в линейном уравнении можно выражать одну переменную через другую. Выразим, например, из уравнения $3x + 5y = 10$ переменную y через переменную x :

$$\begin{aligned}5y &= -3x + 10, \\ y &= -0,6x + 2.\end{aligned}$$

Говорят, что *уравнение $3x + 5y = 10$ решили относительно y* .

С линейным уравнением, записанным в таком виде, удобно работать, в частности, находить пары чисел, являющиеся его решениями; в качестве x можно брать любое число, а соответствующее значение y вычислять по формуле $y = -0,6x + 2$.

Например, если $x = 0$, то $y = 2$; получаем пару $(0; 2)$. Если $x = -1$, то $y = 1,4$; получаем решение $(-1; 1,4)$. Понятно, что таких пар чисел x и y , удовлетворяющих уравнению $3x + 5y = 10$, можно указать сколько угодно. Иными словами, это уравнение имеет бесконечное множество решений.

В заключение рассмотрим задачу на знакомый вам старинный сюжет. В клетке сидят фазаны и кролики, всего у них 18 ног. Сколько в клетке тех и других?

Для перевода условия этой задачи на математический язык естественно ввести две переменные. Пусть в клетке x фазанов и

y кроликов. Так как у фазанов по 2 ноги, а у кроликов по 4, то приходим к уравнению

$$2x + 4y = 18.$$

Разделив обе его части на 2, получим более простое уравнение

$$x + 2y = 9.$$

Понятно, что ни количество фазанов, ни количество кроликов отрицательным или дробным числом выражаться не могут. Поэтому надо найти такие пары x и y , удовлетворяющие этому уравнению, которые составлены из натуральных чисел, или, как говорят, *решить уравнение в натуральных числах*.

Выразив из уравнения переменную y через переменную x , получим $y = \frac{9-x}{2}$. Далее воспользуемся простым перебором: будем подставлять вместо переменной x числа 1, 2, ... и вычислять соответствующие значения переменной y . Всего получим четыре пары x и y , подходящие по смыслу задачи (см. таблицу):

x	1	3	5	7
y	4	3	2	1

Таким образом, задача имеет четыре решения: в клетке могут сидеть 1 фазан и 4 кролика, 3 фазана и 3 кролика, 5 фазанов и 2 кролика, 7 фазанов и 1 кролик.

Подобные задачи интересовали математиков еще в глубокой древности. Много занимался вопросом о решении в целых числах уравнений с двумя и более переменными древнегреческий ученый Диофант Александрийский (III в. до н. э.). Он изобрел разные способы решения подобных уравнений, поэтому их часто называют *диофантовыми уравнениями*.

А

571. Проверьте, является ли пара чисел $(-2; 2)$ решением уравнения: а) $x - y = -4$; б) $x + 2 = 2y$; в) $x^2 - y = 2$.
572. Даны пары значений переменных x и y : $(0; 2)$, $(2; 1)$, $(1; 0)$, $(-2; 1)$. Какие из них являются решениями уравнения:
а) $x^2 + 4y = 8$; б) $x^3 - 3x^2 + 3x = y + 1$?
573. (Задание с выбором ответа.) Какая пара чисел не является решением уравнения $xy + x = 2$?
А. $(-2; -2)$. Б. $(0,5; 3)$. В. $(-3; -1)$. Г. $(-0,5; -5)$.

574. Какие из данных уравнений являются линейными:
 $2x + 3y = 6$; $4x^2 - 3y = 0$; $5x - 2y = 0$;
 $\frac{2}{x} + \frac{7}{y} = 1$; $3xy + 2y = 2$; $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$?
575. Выразите из уравнения $3x - 5y + 15 = 0$ переменную y через x . Запишите три каких-нибудь решения этого уравнения.
576. Найдите несколько решений уравнения:
 а) $x + y = 20$; в) $2x - y + 10 = 0$;
 б) $4x + y = 0$; г) $x - 3y + 1 = 0$.
577. Запишите все пары натуральных чисел, являющиеся решениями уравнения:
 а) $x + y = 6$; б) $xy = 12$; в) $2x + y = 10$; г) $0,5x + y = 6$.
 Указание. Воспользуйтесь методом перебора.
578. (Задание с выбором ответа.) Выполняя задания теста, Олег правильно решил x задач, оцененных 3 баллами, и y задач, оцененных 4 баллами. Всего он набрал 27 баллов. Сколько задач, оцененных 3 баллами, мог решить Олег?
 А. 2. Б. 3. В. 4. Г. 5.

Б

579. Имеет ли уравнение решения? Если имеет, то приведите примеры решений:
 а) $x^2 = y^2$; в) $xy = 0$; д) $x^2 + y^2 = 0$;
 б) $xy = 8$; г) $x = y^2$; е) $|x| + |y| + 1 = 0$.
580. Сколько целочисленных решений имеет уравнение:
 а) $y = \frac{6}{x}$; б) $y = -\frac{10}{x}$; в) $y = 3x$; г) $\frac{y}{2x} = 1$?
581. Докажите, что уравнение не имеет положительных решений:
 а) $4x + 3y = -5$; б) $-2x - 7y = 8$.
- Решите задачу, составив по ее условию уравнение с двумя переменными (582—585):
582. Ученики начальной школы на уроке математики выкладывают из палочек пятиугольники и шестиугольники. Всего в наборе 100 палочек. Сколько пятиугольников и сколько шестиугольников можно выложить, чтобы использованными оказались все палочки?
583. Учащиеся 8 класса выполняли тест, содержащий задания по алгебре и геометрии. За каждый верный ответ на алгебраический вопрос выставялось 3 балла, а на геометрический — 4 балла. Ученик верно ответил на все вопросы теста и получил

100 баллов. Сколько в тесте было заданий по алгебре и сколько по геометрии?

584. Андрей работает летом в кафе. За каждый час ему платят 10 р. и высчитывают 2 р. за каждую разбитую тарелку. На прошедшей неделе он заработал 180 р. Определите, сколько часов он работал и сколько разбил тарелок, если известно, что он работает не более 3 ч в день.
585. На неделю учащимся 8 класса было предложено для решения два списка задач: по алгебре и по геометрии. За каждую правильно решенную задачу по алгебре выставлялось 4 балла, а по геометрии — 5 баллов. Николай за выполненную им работу получил 80 баллов. Сколько задач по алгебре и сколько по геометрии решил Николай, если известно, что в каждом списке было 15 задач?

4.2 График линейного уравнения с двумя переменными

Найдем несколько решений уравнения $x + 2y = 4$. Для этого запишем уравнение в виде $y = -0,5x + 2$ и выполним соответствующие вычисления. Их результаты представлены в таблице:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0	-0,5	-1	-1,5

Каждое решение уравнения $x + 2y = 4$ можно изобразить точкой на координатной плоскости (рис. 4.1). Мы видим, что все отмеченные точки «укладываются» на одну и ту же прямую (рис. 4.2).

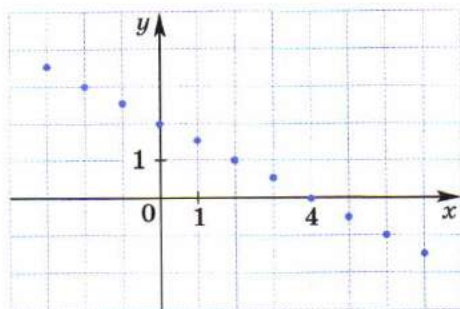


Рис. 4.1

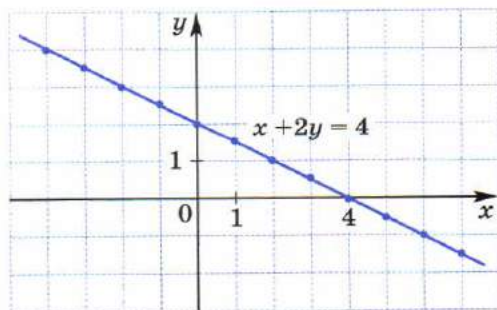


Рис. 4.2

Говорят, что эта прямая — *график уравнения* $x + 2y = 4$ (или, что то же самое, график уравнения $y = -0,5x + 2$).

Вообще любому уравнению, связывающему переменные x и y , соответствует некоторое множество точек координатной плоскости — график этого уравнения. График уравнения с двумя переменными определяется следующим образом:

Точка с координатами x и y принадлежит графику уравнения с двумя переменными в том и только в том случае, когда пара чисел $(x; y)$ является решением этого уравнения.

Иными словами:

Если точка с координатами x и y принадлежит графику уравнения с двумя переменными, то пара чисел $(x; y)$ является его решением; и наоборот, если пара чисел $(x; y)$ является решением уравнения с двумя переменными, то точка с координатами x и y принадлежит его графику.

Мы видели, что график линейного уравнения $x + 2y = 4$ есть прямая линия. Построим теперь график какого-нибудь линейного уравнения, в котором один из коэффициентов при переменных равен 0.

Возьмем уравнение $0x + 2y = 7$, т. е. $y = 3,5$. Решением этого уравнения является любая пара чисел, в которой x — произвольное число, а $y = 3,5$, например $(2; 3,5)$, $(0; 3,5)$, $(-1; 3,5)$. Его график, как вы уже знаете, — прямая, параллельная оси x (рис. 4.3).

Точно так же графиком уравнения $-4x + 0y = 12$, т. е. $x = -3$, служит прямая, параллельная оси y (рис. 4.4).

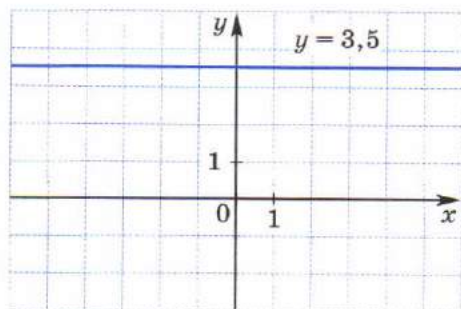


Рис. 4.3

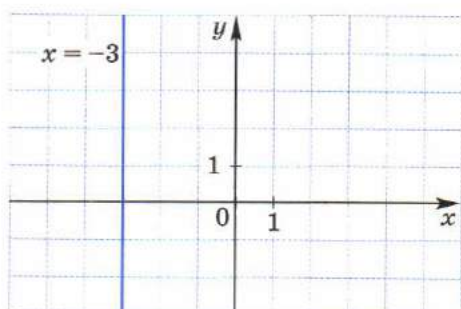


Рис. 4.4

И вообще:

Графиком уравнения $ax + by = c$, где коэффициенты a и b не равны нулю одновременно, является прямая.

Верно также обратное утверждение:

Всякая прямая на координатной плоскости является графиком уравнения вида $ax + by = c$, где коэффициенты a и b не равны нулю одновременно.

Поэтому уравнение вида $ax + by = c$, в котором хотя бы один из коэффициентов a и b отличен от 0, называют *уравнением прямой*.

Из сказанного выше понятен способ построения графика линейного уравнения: достаточно построить две любые его точки и провести через них прямую.

■ Пример. Построим прямую, которая задается уравнением

$$x - 3y + 6 = 0.$$

Найдем, например, точки, в которых эта прямая пересекает оси координат. Подставим в уравнение $x = 0$, тогда $-3y + 6 = 0$, т. е. $y = 2$. Значит, график проходит через точку $(0; 2)$.

Теперь подставим в уравнение $y = 0$, тогда $x + 6 = 0$, т. е. $x = -6$. Значит, прямая проходит через точку $(-6; 0)$.

Отметим на координатной плоскости точки $(0; 2)$ и $(-6; 0)$ и проведем через них прямую. Эта прямая и есть график (рис. 4.5) уравнения $x - 3y + 6 = 0$.

График уравнения $x - 3y + 6 = 0$ можно, конечно, построить и по другим точкам. Чтобы проще было найти их координаты, выразим переменную y через x ; получим уравнение $y = \frac{1}{3}x + 2$. Понятно, что удобнее отмечать точки с целыми координатами. Поэтому возьмем значения x , кратные 3, например 3 и -3 . Если $x = 3$, то $y = 3$; если $x = -3$, то $y = 1$. Отметим на координатной плоскости точки $(3; 3)$ и $(-3; 1)$ и проведем через них прямую (рис. 4.6).

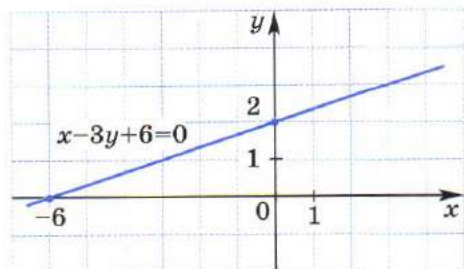


Рис. 4.5

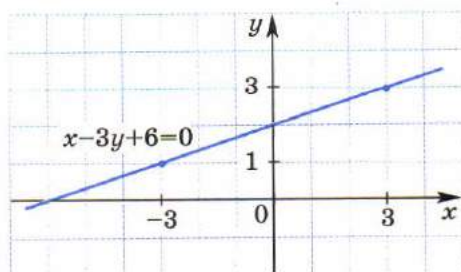


Рис. 4.6

В заключение приведем примеры графиков нелинейных уравнений. Некоторые из них вам уже встречались. Так, график уравнения $y = x^2$ — это хорошо знакомая вам парабола (рис. 4.7), а график уравнения $y^2 = x$ — это такая же парабола, однако она иначе расположена в координатной плоскости (рис. 4.8).

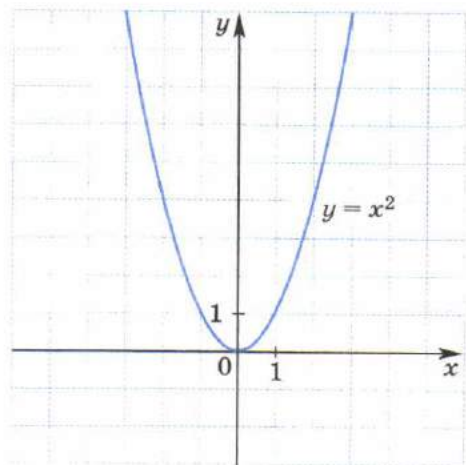


Рис. 4.7

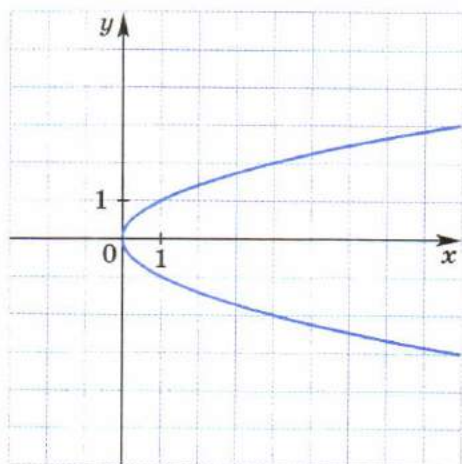


Рис. 4.8

На рисунках 4.9 и 4.10 изображены графики новых для вас уравнений. Название графика уравнения $x^2 + y^2 = 25$ вы знаете — это окружность. Центр ее находится в начале координат, а радиус равен 5. А график уравнения $x^3 + y^3 = 3xy$ называют *декартовым листом*. Интересно, что эта кривая когда-то носила поэтическое название «лист жасмина», а декартовым листом ее впоследствии

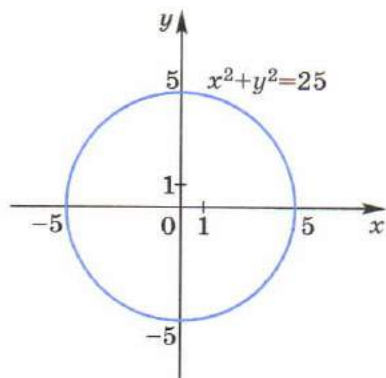


Рис. 4.9

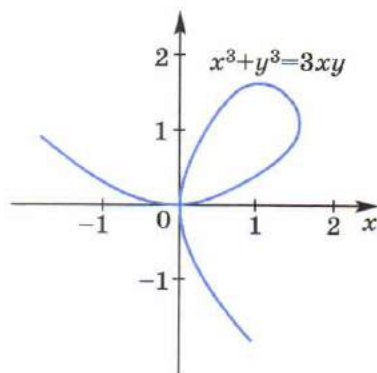


Рис. 4.10

назвали потому, что ее уравнение составил великий французский математик и философ Рене Декарт.

A

586. Выпишите уравнения, графиками которых являются прямые:
 $x^2 - y^2 = 1$; $x + y = 1$; $2x + 3y = 4$; $xy = 1$;
 $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + 2 = 0$; $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} + 2 = 0$; $3x - 4y = 12$; $\frac{x-y}{3} = 1$.

587. На рисунке 4.11 изображен график уравнения $2x + y = 5$. Найдите с помощью графика несколько целочисленных решений этого уравнения. Проверьте подстановкой, правильно ли указаны решения.

588. Постройте прямую, являющуюся графиком уравнения:

а) $x + y = 5$; в) $x - y + 1 = 0$;
 б) $x - y = 3$; г) $x + y + 4 = 0$.

589. Запишите уравнение прямой, если известны коэффициенты a , b и c , и постройте эту прямую:

а) $a = 0$, $b = 3$, $c = 6$;
 б) $a = 0$, $b = 2$, $c = -5$;
 в) $a = 2$, $b = 0$, $c = -10$;
 г) $a = 5$, $b = 0$, $c = 5$;
 д) $a = 2$, $b = 4$, $c = 0$;
 е) $a = 4$, $b = 2$, $c = 0$.

590. Постройте прямую, заданную уравнением:

а) $3x - y = 6$; в) $2x + 3y = -6$;
 б) $2x + y = 10$; г) $3x - 4y = 12$.

591. Постройте прямую $7x + 3y - 21 = 0$.

Проходит ли она через точку: а) $(11; -19)$; б) $(-9; 28)$?

592. а) Проходит ли прямая $5x - 12y = 29$ через точку $A(20; 6)$ через точку $B(-11; -7)$?

б) Принадлежит ли прямой $8x + 7y = 56$ точка $A(3,5; 4)$ точка $B(-7; 15)$?

593. (Задание с выбором ответа.) Укажите уравнение прямой, проходящей через точки $M(-3; -4)$ и $N(6; 2)$.

А. $2x - 3y = 18$. В. $2x - 3y = 6$.
 Б. $2x + 3y = -18$. Г. $3x - 2y = -6$.

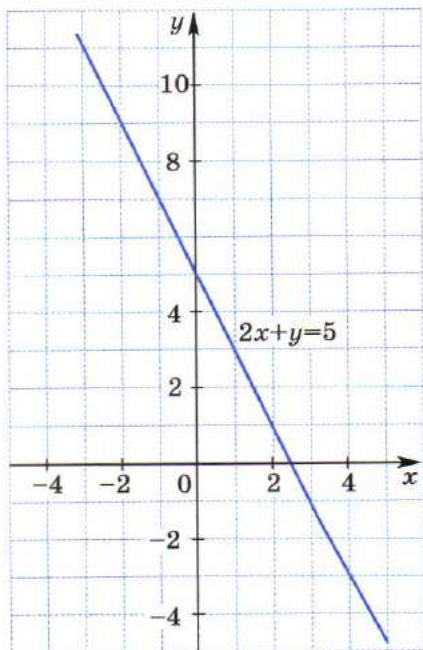


Рис. 4.11

594. а) Найдите ординату точки прямой $2x - y + 3 = 0$, абсцисса которой равна 3; -1; -6.
 б) Найдите абсциссу точки этой же прямой, ордината которой равна 7; 1; -5.
 в) Найдите координаты точек, в которых эта прямая пересекает оси координат.
595. Постройте прямые в одной системе координат и укажите координаты точки их пересечения. Проверьте результат подстановкой найденной пары чисел в уравнения:
 а) $4x - 3y = 12$ и $2x + 2y = 1$;
 б) $2x + y = 4$ и $7x - 2y = 3$.
596. В одной системе координат постройте прямые $x - 2y = 6$ и $x - 2y = -1$. Объясните, почему эти прямые не имеют общей точки.
597. Определите, проходит ли окружность $x^2 + y^2 = 25$ (см. рис. 4.9) через точку:
 а) $A(0; -5)$; б) $B(-3; 4)$; в) $C(4; -3)$; г) $D(2; 4,5)$.
 Покажите на рисунке положение каждой из этих точек в координатной плоскости.
598. Принадлежит ли графику, изображенному на рисунке 4.10, точка:
 а) $M\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$; б) $D(1; 0,5)$?

5

599. Постройте в одной и той же системе координат следующие прямые: $3x + 2y - 18 = 0$, $x + 2y - 13 = 0$, $3x - 15 = 0$ и $2y - 12 = 0$. Определите координаты точек пересечения:
 а) прямых $3x + 2y - 18 = 0$ и $3x - 15 = 0$;
 б) прямых $x + 2y - 13 = 0$ и $2y - 12 = 0$.
600. Прямые $5x + 2y = 10$, $x = -2$, $y = -5$, попарно пересекаясь, образуют треугольник. Вычислите его площадь.
601. а) Известно, что прямая $ax + 3y = 60$ проходит через точку $(-15; 30)$. Определите коэффициент a и постройте эту прямую, выбрав удобные единицы на осях координат.
 б) Известно, что прямая $5x + by = 150$ проходит через точку $(12; 30)$. Определите коэффициент b и постройте эту прямую, выбрав удобные единицы на осях координат.
602. 1) Выпишите уравнения, которые задают ту же прямую, что и уравнение $2x + 3y = 5$:
 $4x + 6y = 10$, $2x + 3y = 12$, $0,2x + 0,3y = 0,5$,
 $4x + 6y = 5$, $-6x - 9y = -15$, $2x - 3y = 5$.

2) Составьте несколько уравнений, которые задают ту же самую прямую, что и уравнение $2x - y = 10$.

603. а) Найдите точки первой координатной четверти с целыми координатами, которые принадлежат прямой $x + 3y = 12$. Дайте ответ, не выполняя построения.

б) Сколько точек второй координатной четверти с целыми координатами принадлежит прямой $3x - 4y + 48 = 0$? Дайте ответ, не выполняя построения.

604. Линия, изображенная на рисунке 4.12, является эллипсом.

Уравнение такого эллипса можно записать в виде $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$,

где a и b — некоторые числа, не равные 0.

1) Найдите координаты точек пересечения с осями координат эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

2) Определите ординаты точек эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, абсциссы которых равны 1.

3) Постройте эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

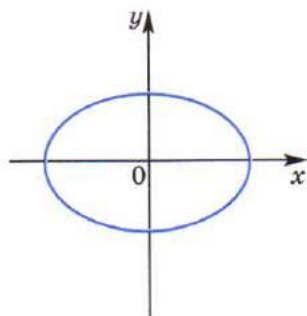


Рис. 4.12

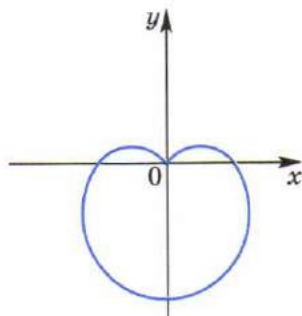


Рис. 4.13

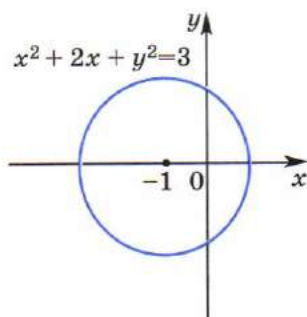


Рис. 4.14

605. Графиком уравнения $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$ является кривая, изображенная на рисунке 4.13. Она называется *кардиоидой* (так как имеет форму сердца). Найдите координаты точек пересечения кардиоиды с осями координат.

606. Графиком уравнения $x^2 + 2x + y^2 = 3$ является окружность (рис. 4.14). Вычислите координаты точек пересечения этой окружности с осями координат.

Вам уже неоднократно приходилось решать линейное уравнение с двумя переменными относительно переменной y . При этом получалось уравнение вида $y = kx + l$, где k и l — некоторые числа. В таком виде можно представить любое линейное уравнение $ax + by = c$, у которого коэффициент при y отличен от 0.

Выясним, как зависит положение прямой $y = kx + l$ в координатной плоскости от коэффициентов k и l . Остановимся сначала на частном случае, когда $l = 0$, т. е. рассмотрим график уравнения $y = kx$.

Прежде всего отметим следующий факт:

График уравнения $y = kx$ — это прямая, проходящая через начало координат.

В самом деле, если $x = 0$, то и $y = 0$, а это означает, что точка $O(0; 0)$ принадлежит графику. Обратите внимание: для построения прямой $y = kx$ достаточно найти координаты одной лишь ее точки, так как вторая уже имеется — это начало координат.

Построим в одной и той же системе координат прямые, заданные уравнениями $y = 2x$ и $y = -\frac{1}{3}x$, в которых коэффициенты при x имеют разные знаки (рис. 4.15). Прямая $y = 2x$, проходя через третий и первый координатные углы, поднимается вверх; так выглядит график любого уравнения $y = kx$ с положительным коэффициентом k . Прямая $y = -\frac{1}{3}x$, проходя через второй и четвертый координатные углы, опускается вниз; так выглядит график любого уравнения $y = kx$ с отрицательным коэффициентом k .

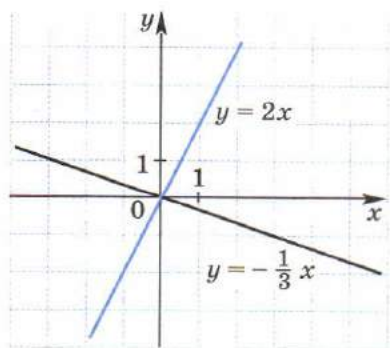


Рис. 4.15

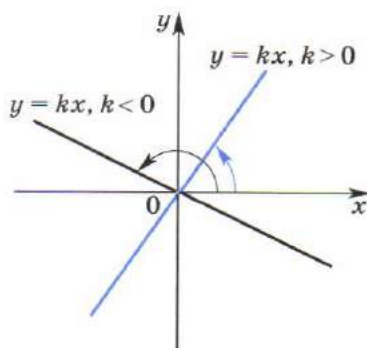


Рис. 4.16

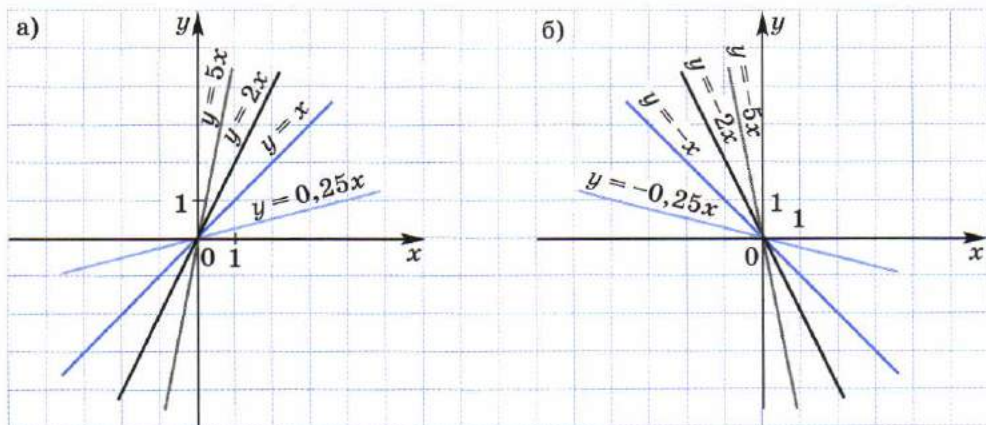


Рис. 4.17

И вообще, если $k > 0$, то угол, который образует луч, являющийся частью прямой $y = kx$ и расположенный в верхней полуплоскости, с лучом Ox , — острый; если $k < 0$, то этот угол тупой (рис. 4.16). (Понятно, что если $k = 0$, то график уравнения $y = kx$ совпадает с осью x .)

На рисунке 4.17, а, б построены графики уравнений $y = kx$ при различных значениях k — положительных и отрицательных. Вы видите, что, чем больше $|k|$, тем круче поднимается или опускается прямая.

А каково взаимное расположение прямых, заданных уравнениями вида $y = kx + l$, в которых коэффициенты при x одинаковы?

Построим в одной системе координат две такие прямые, например прямые $y = 0,5x$ и $y = 0,5x + 3$ (рис. 4.18). При любом x ордината точки прямой $y = 0,5x + 3$ на 3 единицы больше ординаты соответствующей точки прямой $y = 0,5x$. Таким образом, прямая $y = 0,5x + 3$ получается сдвигом прямой $y = 0,5x$ на 3 единицы вверх вдоль оси y . Понятно, что угол между лучом Ox и частью прямой, расположенной в верхней полуплоскости, при этом не меняется. Значит, прямые $y = 0,5x$ и $y = 0,5x + 3$ параллельны. (Заметим, что параллельность этих прямых можно обосновать и по-другому. Значения выражений $0,5x$

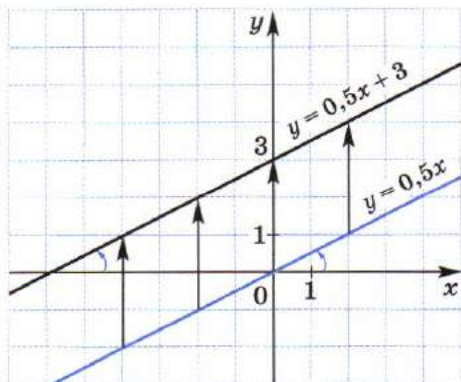


Рис. 4.18

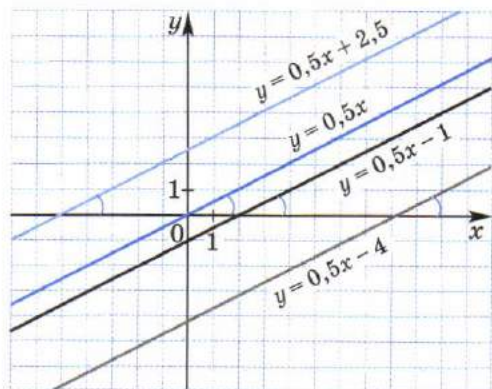


Рис. 4.19

зависит только от значения коэффициента k . Поэтому k называют *угловым коэффициентом* прямой $y = kx + l$.

Если у двух различных прямых угловые коэффициенты одинаковы, то эти прямые параллельны.

Если же две прямые имеют разные угловые коэффициенты, то эти прямые пересекаются. Например, пересекаются прямые $y = 0,5x + 1$ и $y = -1,5x + 5$ (рис. 4.20).

Коэффициент l в уравнении $y = kx + l$ также имеет определенный геометрический смысл: это ордината точки пересечения прямой с осью y . В самом деле, если подставить в уравнение $y = kx + l$ вместо x число 0, то получим, что $y = l$.

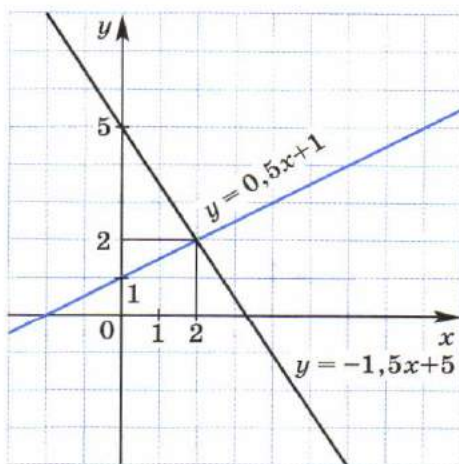


Рис. 4.20

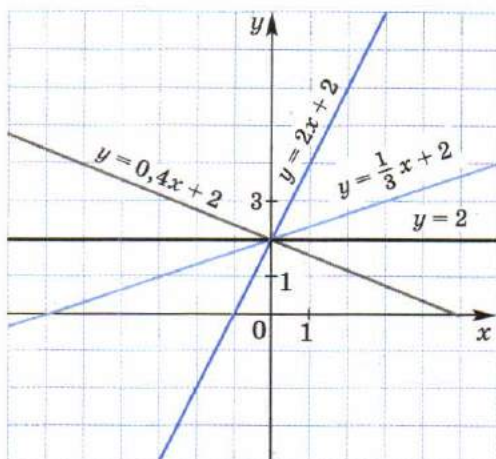


Рис. 4.21

и $0,5x + 3$ ни при каком значении x не могут оказаться одинаковыми, а это означает, что прямые $y = 0,5x$ и $y = 0,5x + 3$ не имеют общих точек.)

Точно так же каждая из прямых $y = 0,5x - 1$, $y = 0,5x + 2,5$, $y = 0,5x - 4$ параллельна прямой $y = 0,5x$. А значит, все они параллельны между собой (рис. 4.19).

Таким образом, величина угла между лучом Ox и частью прямой $y = kx + l$, расположенной в верхней полуплоскости,

На рисунке 4.21 построено несколько прямых, каждая из которых задается уравнением вида $y = kx + 2$. Все они проходят через точку $(0; 2)$, лежащую на оси y . Получается пучок прямых, пересекающихся в точке $(0; 2)$.

Таким образом, запись уравнения прямой в виде $y = kx + l$ очень удобна, так как из нее можно извлечь информацию о положении прямой в координатной плоскости.

Подчеркнем, что в таком виде может быть записано уравнение любой прямой, кроме вертикальной. Вертикальная прямая, как вы знаете, задается уравнением вида $x = m$, где m — некоторое число. А такое уравнение, естественно, нельзя решить относительно y .

А

Запишите уравнение прямой в виде $y = kx + l$ и назовите коэффициенты k и l (607—608):

607. а) $x + y = 5$; в) $3x - 2y = 6$;
 б) $2x + y = -3$; г) $10x + 100y = 200$.
 608. а) $3y - 2x = 0$; б) $2y + 4 = 0$; в) $3y - 9 = 0$; г) $2x = 3y$.
 609. (Задание с выбором ответа.) Уравнение какой прямой нельзя записать в виде $y = kx + l$?

А. Наклонной. Б. Вертикальной. В. Горизонтальной.

610. Постройте прямую, заданную уравнением:

- а) $y = \frac{1}{2}x$; в) $y = -2x$; д) $y = \frac{x}{3}$;
 б) $y = 3x$; г) $y = -0,5x$; е) $y = -\frac{x}{4}$.

611. Запишите уравнение прямой $y = kx + l$ при указанных k и l и постройте эту прямую:

- а) $k = 1, l = 0$; в) $k = 0, l = 1$;
 б) $k = -1, l = 0$; г) $k = 0, l = -1$.

612. Выпишите уравнения, графиками которых являются прямые, проходящие через начало координат и постройте эти прямые:

$$y = 3x^2, \quad y = \frac{x}{4}, \quad y = 4x - 1, \quad y = \frac{2}{x}, \\ y = -3x, \quad y = -5.$$

613. На рисунке 4.22 изображены прямые a , b и c с угловыми коэффициентами $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$ и 0. Назовите угловой коэффициент каждой из прямых.

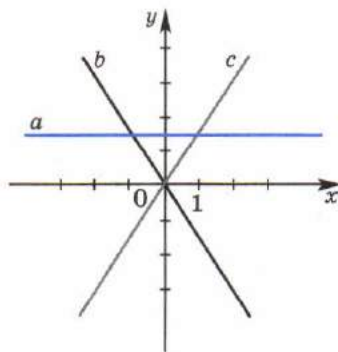


Рис. 4.22

614. Покажите схематически, как в координатной плоскости расположен график уравнения:

а) $y = 10x$; б) $y = -8x$; в) $y = 0,3x$; г) $y = -1,2x$.

615. Прямые заданы уравнениями $y = \frac{1}{2}x + 1$, $y = \frac{1}{2}x - 4$, $y = \frac{1}{2}x$.

- 1) Чему равен угловой коэффициент каждой прямой?
- 2) Каково взаимное расположение этих прямых на плоскости?
- 3) В какой точке каждая прямая пересекает ось y ?
- 4) Постройте эти прямые.

616. В одной системе координат постройте прямые, заданные уравнениями вида $y = kx + l$ с одним и тем же угловым коэффициентом $-\frac{2}{3}$ и коэффициентом l , равным 0; 1; 3; -2; -6.

617. На рисунке 4.23 изображены прямые a , b , c и d . Соотнесите каждую из них с одним из следующих уравнений:

$$y = \frac{3}{2}x, \quad y = \frac{3}{2}x + 5, \quad y = \frac{3}{2}x + 2, \quad y = \frac{3}{2}x - 4.$$

618. На рисунке 4.24 изображены прямые a , b , c , d , e . У каких из них угловой коэффициент положителен? отрицателен? равен 0?

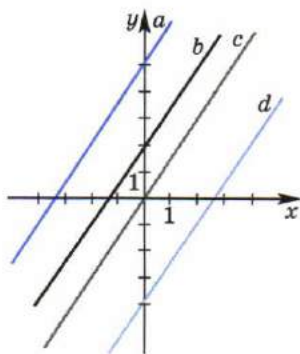


Рис. 4.23

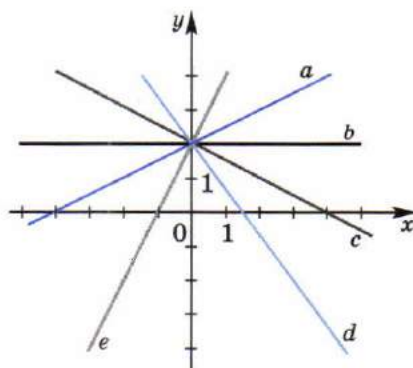


Рис. 4.24

Для каждой прямой назовите угловой коэффициент и ординату точки, в которой прямая пересекает ось y , и постройте эту прямую (619—620):

619. а) $y = x + 2$; б) $y = x - 1$; в) $y = 2x - 4$; г) $y = \frac{2}{3}x + 2$; д) $y = 0,5x - 3$; е) $y = \frac{x}{2} + 1$.
620. а) $y = -x + 3$; б) $y = -x - 1$; в) $y = -2x + 2$; г) $y = 4 - \frac{1}{2}x$; д) $y = -0,4x - 2$; е) $y = 6 - 3x$.

621. Запишите уравнение прямой, если известен ее угловой коэффициент и точка, в которой прямая пересекает ось y , и постройте эту прямую:

а) $k = 3$, $A(0; -3)$;

б) $k = -2$, $A(0; 1)$;

в) $k = \frac{2}{5}$, $A(0; 0)$;

г) $k = 0$, $A(0; -4)$.

622. Найдите координаты точек, в которых прямая пересекает ось x и ось y , и постройте эту прямую:

а) $y = 2x - 10$; б) $y = -\frac{2}{3}x + 4$; в) $y = 4x + 2$; г) $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

623. На рисунке 4.25 изображены следующие прямые:

$$y = \frac{1}{2}x, y = 2x - 4, y = -x + 1, y = -\frac{1}{2}x - 4.$$

Установите соответствие между прямыми и уравнениями.

624. Ученик допустил ошибки при построении прямых $y = 3x$, $y = \frac{1}{2}x + 2$, $y = 2x - 1$, $y = 3 - x$ (рис. 4.26). В каждом случае объясните, почему можно сразу увидеть, что прямая построена неверно.

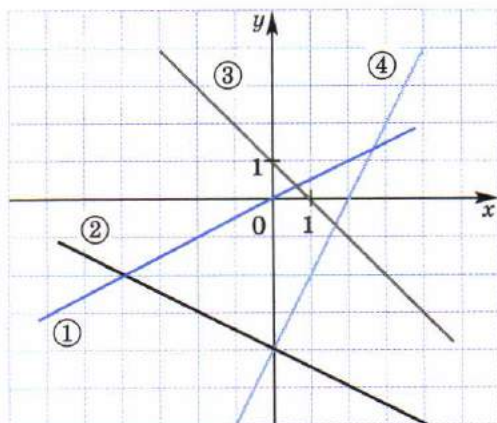


Рис. 4.25

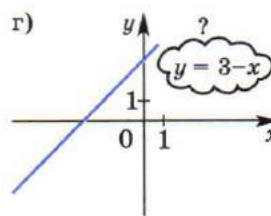
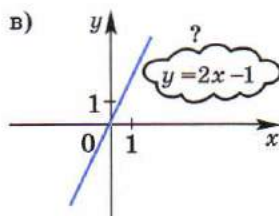
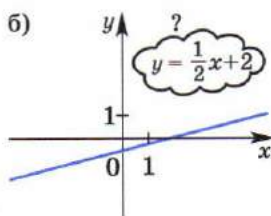
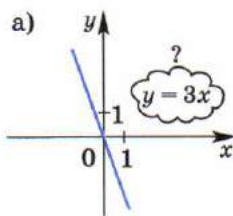


Рис. 4.26

625. Даны уравнения прямых: $y = x - 4$, $y = -x - 4$, $y = 2x - 4$,
 $y = -\frac{1}{2}x - 4$.

- 1) Есть ли среди данных прямых параллельные прямые?
- 2) В какой точке каждая прямая пересекает ось y ?
- 3) Постройте эти прямые.

626. На рисунке 4.27 изображены прямые a , b , c и d . Соотнесите каждую из них с одним из уравнений:

$$y = 2x + 2, \quad y = -2x + 2,$$

$$y = \frac{1}{3}x + 2, \quad y = -\frac{1}{3}x + 2.$$

627. Определите, пересекаются ли данные прямые; если пересекаются, то постройте эти прямые и укажите координаты точки пересечения; проверьте результат, подставив найденные координаты в уравнения:

а) $y = 2x - 5$ и $y = 2x + 5$;

в) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ и $y = x - 3$;

б) $y = -x + 1$ и $y = 3x + 9$;

г) $y = -\frac{1}{3}x + 1$ и $y = -\frac{1}{3}x + 3$.

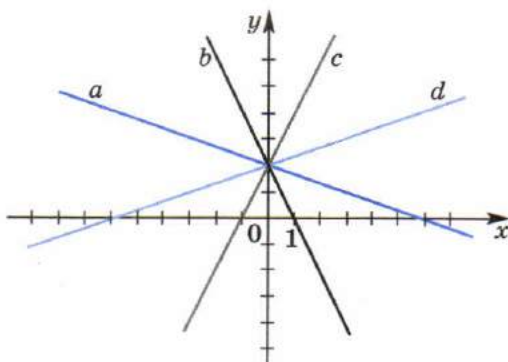


Рис. 4.27

Б

628. а) Парусная лодка в некоторый момент времени находится в 20 км от наблюдателя и движется в направлении к нему со скоростью 9 км/ч. Обозначьте расстояние между лодкой и наблюдателем (в километрах) буквой y , а время движения лодки (в часах) буквой x и составьте уравнение, связывающее y и x . Постройте график уравнения. Определите значение y при $x = 2$, $x = -1$, $x = 3$. Прокомментируйте в соответствии с условием задачи каждый ответ.

б) После сильных дождей вода в реке поднялась над обычным уровнем на 1,5 м. Через некоторое время уровень начал снижаться в среднем на 20 см в час. Обозначьте высоту воды над обычным уровнем (в метрах) буквой y , а время снижения уровня воды (в часах) буквой x и составьте уравнение, связывающее y и x . Постройте график этого уравнения. Определите, на

какой высоте над обычным уровнем окажется вода через 4 ч после начала снижения; через какое время вода достигнет обычного уровня.

629. Определите, параллельны или пересекаются прямые:

а) $x - 2y = 14$ и $x + 2y = 3$;

б) $6x + 2y = 3$ и $3x + y = 1$.

630. Запишите уравнение прямой, пересекающей ось y в точке $(0; 5)$ и параллельной прямой:

а) $y = 2x - 1$; б) $y = -7x + 4$; в) $2x - 3y = 0$.

631. Запишите уравнение прямой, параллельной прямой $y = -\frac{3}{4}x + 2$ и проходящей через точку:

а) $(0; -2)$; б) $(0; 100)$; в) $(0; 0)$.

632. Постройте график уравнения:

а) $|x| + |y| = 1$; б) $|x| - |y| = 1$.

Указание. Рассмотрите график уравнения отдельно в каждой координатной четверти.

4.4

Системы уравнений.

Решение систем способом сложения

Пусть две прямые заданы своими уравнениями $2x - 3y = 3$ и $4x + 3y = 18$. Эти прямые пересекаются. Каковы координаты их точки пересечения?

Построим прямые в одной и той же системе координат (рис. 4.28). Обозначим точку пересечения буквой M . Из рисунка видно, что координаты точки M — числа дробные, и по чертежу их можно найти только приближенно. Если же нас интересуют точные координаты этой точки, то их придется *вычислить*. Это можно сделать, используя уравнения прямых.

Точка M принадлежит сразу двум прямым, поэтому ее координаты должны удовлетворять одновременно двум уравнениям. Таким образом, наша задача теперь состоит в том, чтобы найти общее решение уравнений $2x - 3y = 3$ и $4x + 3y = 18$.

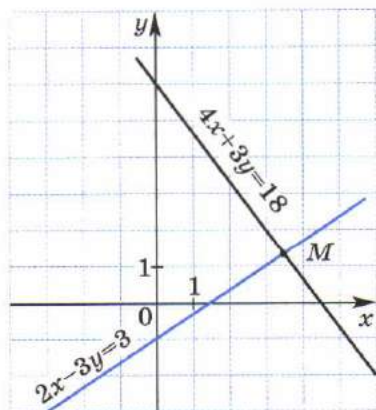


Рис. 4.28

В тех случаях, когда нужно найти общие решения двух или более уравнений, говорят, что требуется *решить систему уравнений*. Так, в данном случае мы должны решить систему двух линейных уравнений $2x - 3y = 3$ и $4x + 3y = 18$. Тот факт, что уравнения рассматриваются как система, символически обозначают с помощью фигурной скобки:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x + 3y = 18. \end{cases}$$

Пару чисел, которая является решением каждого из уравнений, входящих в систему, называют решением системы.

Решить систему уравнений — это значит найти все ее решения или убедиться, что их нет.

Из геометрических соображений мы уже знаем, что система уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$ имеет единственное решение. Чтобы найти

его, поступим следующим образом. Сложим левые и правые части уравнений. (При этом мы воспользуемся очевидным свойством числовых равенств: если $a = b$ и $c = d$, то $a + c = b + d$.) Так как коэффициенты при переменной y — противоположные числа, то при сложении y исчезнет и получится уравнение с одной переменной:

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 3 \\ + \quad 4x + 3y = 18 \\ \hline 6x = 21. \end{array}$$

Из полученного уравнения найдем x :

$$x = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

Подставив это число вместо x в любое из уравнений системы, например в уравнение $2x - 3y = 3$, найдем y :

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{7}{2} - 3y &= 3, \\ -3y &= -4, \\ y &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Таким образом, решением системы является пара чисел $x = 3\frac{1}{2}$, $y = 1\frac{1}{3}$. Эта пара чисел и является координатами точки пересечения прямых $2x - 3y = 3$ и $4x + 3y = 18$.

Обратите внимание: находя координаты точки пересечения прямых, мы перевели задачу с геометрического языка на алгебраический. Возможность формулировать одни и те же утверждения и на геометрическом, и на алгебраическом языках дает нам система координат, изобретение которой, как вы уже знаете, принадлежит Рене Декарту. Преимуществом геометрического языка является его наглядность. Зато алгебраический язык позволяет сводить задачу к вычислениям. В силу этого обстоятельства он более приспособлен для передачи функций человека компьютеру.

При решении системы, рассмотренной выше, мы воспользовались так называемым *способом сложения*. Он основан на следующем утверждении:

Любое уравнение системы можно заменить уравнением, полученным путем сложения (или вычитания) левых и правых частей уравнений, входящих в систему; при этом получается система уравнений, имеющая те же решения, что и исходная.

Так, решая систему

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x + 3y = 18, \end{cases}$$

мы заменили ее системой

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 6x = 21, \end{cases}$$

в которой второе уравнение получено в результате сложения исходных уравнений.

Приведем еще примеры решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными способом сложения.

■ **Пример 1.** Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 4y = -7 \\ 5x - 6y = 23. \end{cases}$$

Коэффициенты при переменной x одинаковы. Поэтому в данном случае удобно из первого уравнения вычесть второе. Получим уравнение с переменной y :

$$10y = -30.$$

Из уравнения $10y = -30$ найдем, что $y = -3$. Подставив это значение y в первое уравнение системы, найдем x :

$$\begin{aligned} 5x + 4 \cdot (-3) &= -7, \\ 5x &= 5, \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Ответ. $x = 1$, $y = -3$.

Заметим, что ответ можно записать иначе: в виде пары $(1; -3)$ или в виде системы

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3. \end{cases}$$

Чтобы решить систему уравнений способом сложения, обычно приходится преобразовывать входящие в нее уравнения так, чтобы коэффициенты при какой-либо переменной оказались или равными, или противоположными числами.

■ Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 3y = -16 \\ 6x + 5y = 14. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на 5, а второе — на 3; тогда коэффициенты при y станут противоположными числами. Получим систему

$$\begin{cases} 20x - 15y = -80 \\ 18x + 15y = 42. \end{cases}$$

Сложим левые и правые части уравнений. Получим уравнение

$$38x = -38.$$

Из этого уравнения найдем x :

$$x = -1.$$

Из уравнения $4x - 3y = -16$ найдем y :

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-1) - 3y &= -16, \\ -3y &= -12, \\ y &= 4. \end{aligned}$$

Заметим, что найти y можно было бы иначе, исключив путем сложения уравнений переменную x .

Ответ. $x = -1$, $y = 4$.

До сих пор мы рассматривали системы двух линейных уравнений с двумя переменными, имеющие единственное решение. Геометрической интерпретацией каждой из этих систем является пара пересекающихся прямых.

Однако две прямые могут оказаться параллельными или даже совпасть. Поэтому при решении систем линейных уравнений возможны и другие случаи. Такие случаи рассмотрены в примерах 3 и 4.

■ Пример 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$$

Сразу видно, что эта система решений не имеет. В самом деле, левые части входящих в нее уравнений одинаковы, а правые — различны. Поэтому не существует таких значений x и y , которые удовлетворяли бы одновременно и первому, и второму уравнениям системы. Если бы мы, действуя, как и в предыдущих примерах, нашли разность левых и правых частей уравнений, то получили бы неверное числовое равенство: $0 = 4$. Это означало бы то же самое: система решений не имеет.

На рисунке 4.29 проведенные рассуждения проиллюстрированы графически. Прямые $3x - 2y = 9$ и $3x - 2y = 5$ — графики уравнений системы — параллельны; нет ни одной точки, принадлежащей и графику первого, и графику второго уравнения.

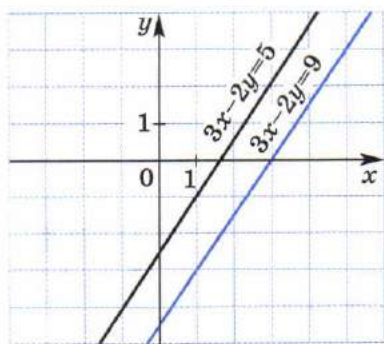


Рис. 4.29

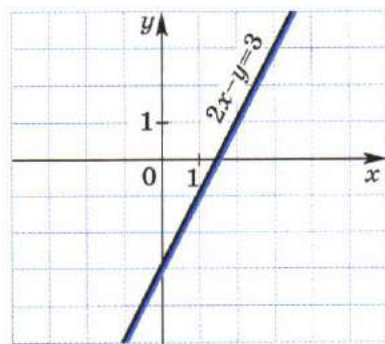


Рис. 4.30

■ Пример 4. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Разделив обе части первого уравнения на 2, получим следующую систему:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Она состоит из двух одинаковых уравнений. С геометрической точки зрения это совпадающие прямые (рис. 4.30).

Решениями этой системы служат решения уравнения $2x - y = 3$, а значит, она имеет бесконечное множество решений. Записать множество решений системы можно в виде пары $(x; 2x - 3)$ или так: x — любое число, $y = 2x - 3$.

Ответ. x — любое число, $y = 2x - 3$.

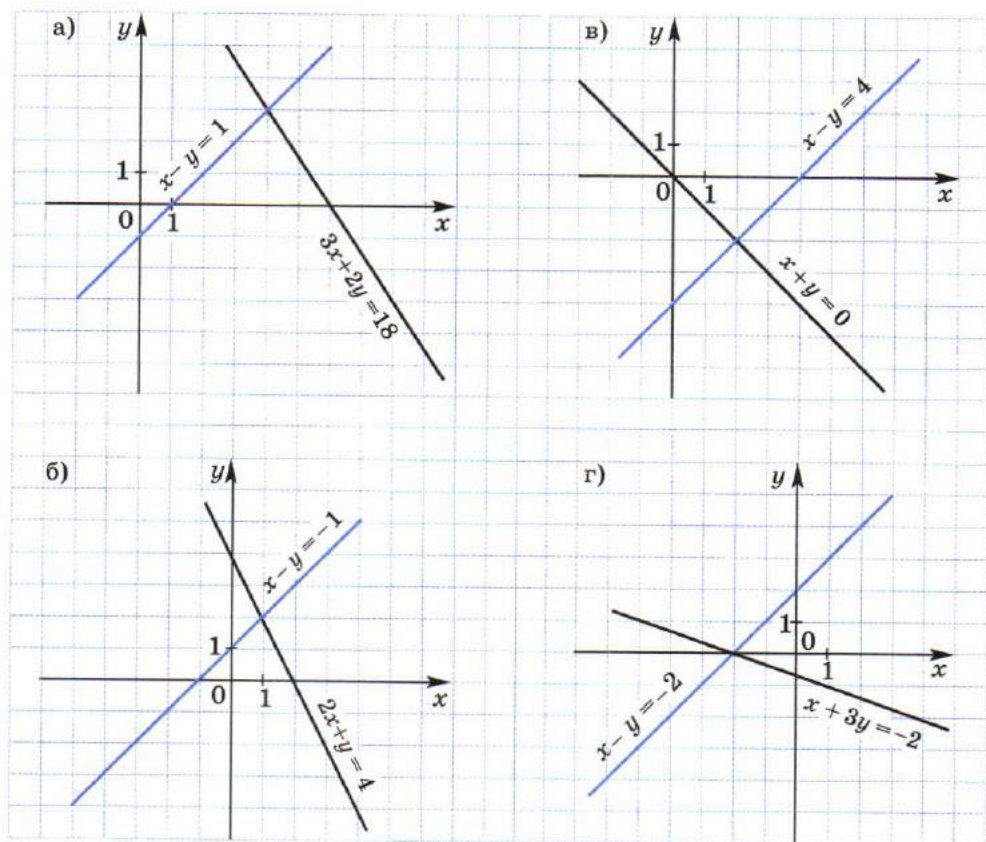


Рис. 4.31

- 633.** На рисунке 4.31, а—г приведены геометрические иллюстрации систем линейных уравнений. Запишите каждую систему и определите с помощью графиков ее решение; сделайте проверку, подставив найденные значения x и y в уравнения системы.
- 634.** На рисунке 4.32 изображены прямые, проходящие через точку $(2; 4)$. Используя рисунок, запишите все возможные системы двух уравнений с двумя переменными, решением каждой из которых служит пара чисел $x = 2$, $y = 4$.
- 635.** Является ли пара чисел $(2; 8)$ решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 10x - y = 12 \\ x - y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7x - 2y = -2 \\ y - x = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + y = 14 \\ x + 2y = 18? \end{cases}$

636. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 9; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 5x - 2y = 0,1 \\ -5x - 4y = 0,5; \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} x + 2y = -25 \\ 3x + 2y = -5; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x + 3y = 18 \\ 2x - 3y = 3; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 2x + y = 5,4 \\ x + y = 6,4; \end{cases} & \text{е) } \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x - 3y = 11. \end{cases} \end{array}$$

637. а) Найдите два числа, сумма которых равна -1 , а разность равна 5 .

б) Найдите два числа, если известно, что их сумма равна 283 и одно из них на 75 больше другого.

638. Решите систему уравнений двумя способами, исключив в первом случае одну переменную, а во втором другую:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 9x + 4y = 40; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} a + b = 5 \\ 3a - 5b = -1; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} p - 4q = 2 \\ 3p - 2q = 16. \end{cases} \end{array}$$

Решите систему уравнений (639—640):

$$\begin{array}{ll} \text{639. а) } \begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ 6x + y = 0; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 3u - 4v = 2 \\ 9u - 5v = 7; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} 5x + y = 30 \\ 3x - 4y = 41; \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} 6m - 9n = -4 \\ 2m + 5n = 4; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} 3a - 2b = 5 \\ a - 4b = 6; \end{cases} & \text{е) } \begin{cases} 5y + 8z = 21 \\ 10y - 3z = -15. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{640. а) } \begin{cases} 3a + 5b = 4 \\ 2a - 3b = 9; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 2m + 5n = 12 \\ 4m + 3n = 10; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} 2x + 3z = 6 \\ 3x + 5z = 8; \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} 4y - 2z = 10 \\ 3y + 5z = 1; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} 6u - 7v = 6 \\ 7u - 8v = 15; \end{cases} & \text{е) } \begin{cases} 8x - 3y = 22 \\ 3x + 4y = -2. \end{cases} \end{array}$$

641. Вычислите координаты точки пересечения прямых:

$$\begin{array}{l} \text{а) } 8x + y = 27 \text{ и } 5x - y = 25; \\ \text{б) } 3x - y = 19 \text{ и } x - y = -1; \\ \text{в) } x + y = 2 \text{ и } 4x - 7y = -10; \\ \text{г) } 2x - y = 3 \text{ и } 4x + 3y = -15. \end{array}$$

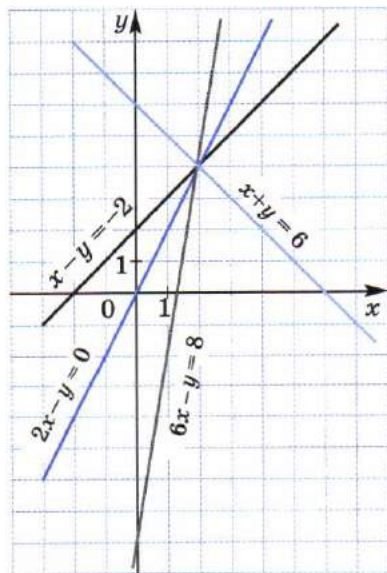


Рис. 4.32

642. Объясните, почему данная система не имеет решений или имеет бесчисленное множество решений (в этом случае приведите примеры решений системы):

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 1; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} y - x = 5 \\ 2y - 2x = 10; \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} x - 3y = 6 \\ 3x - 9y = -9; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 2y = 0; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 6x + 2y = 12; \end{cases} & \text{е) } \begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ x + 0,5y = 0,5. \end{cases} \end{array}$$

В каждом случае проиллюстрируйте ваш вывод графически.

643. (Задание с выбором ответа.) Используя графические соображения, установите, какая система уравнений имеет единственное решение.

$$\begin{array}{lll} \text{А. } \begin{cases} 2x - y = 8 \\ y - 2x = -8. \end{cases} & \text{Б. } \begin{cases} 2x - 2y = 8 \\ y - x = 8. \end{cases} & \text{В. } \begin{cases} x - 2y = 8 \\ 2x - y = 8. \end{cases} \end{array}$$

644. Известно, что одно из уравнений системы — это уравнение $y = 0,5x - 3$, а вторым уравнением может быть любое уравнение из следующих: $2y - x = 0$, $x + 2y = 0$, $x - 2y = 6$, $4y - 2x = 6$, $4y + 2x = 6$, $2y - x + 6 = 0$.

Используя графические представления, установите в каждом случае, имеет ли система решения, и если имеет, то сколько — одно или бесчисленное множество.

Решите систему уравнений (645—646):

$$645. \quad \begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 5; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 2p - \frac{q}{2} = 14 \\ \frac{p}{2} + \frac{q}{8} = 7; \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{б) } \begin{cases} \frac{u}{5} + \frac{v}{2} = 2 \\ -\frac{u}{3} + \frac{v}{2} = \frac{2}{3}; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \frac{3m}{2} + \frac{2n}{3} = 6 \\ \frac{3m}{4} + \frac{n}{3} = 12. \end{cases} \end{array}$$

$$646. \quad \begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 7(x + y) = 28 \\ 3(x - y) = 33; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 0,6(m - n) = 4,2 \\ 0,3(m + n) = 1,5; \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{б) } \begin{cases} \frac{1}{3}(a - b) = 5 \\ \frac{1}{5}(a + b) = 2; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \frac{2}{3}(u + v) = \frac{4}{3} \\ \frac{3}{4}(u - v) = \frac{3}{2}. \end{cases} \end{array}$$

647. Найдите расстояние от точки пересечения прямых $5x - 5y = -1$ и $5x + 5y = 7$ до оси x , оси y , начала координат.

648. (Задача-исследование.)

1) Убедитесь в том, что графической моделью каждой из данных систем являются совпадающие прямые:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + 8y = 10 \\ 5x + 20y = 25; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x - 12y = 40 \\ 5x - 15y = 50. \end{cases}$$

Сравните отношения коэффициентов при x , при y и свободных членов в каждой системе. Сформулируйте признак, по которому можно определить, что система имеет бесконечно много решений.

2) Убедитесь в том, что графической моделью каждой из данных систем являются параллельные прямые:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 6y = -3 \\ 4x + 8y = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 6x + 2y = 1 \\ 9x + 3y = 9. \end{cases}$$

Сравните отношения коэффициентов при x , при y и свободных членов в каждой системе. Сформулируйте признак, по которому можно определить, что система не имеет решений.

3) Дано уравнение $5x + y = 8$. Составьте еще одно уравнение так, чтобы вместе с данным оно образовало систему:

а) имеющую бесконечно много решений;

б) не имеющую решений.

4) Существует ли такое значение a , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 3y = 6 \\ 2x + y = 18 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений? не имеет решений? Если существует, то укажите его.

4.5

Решение систем уравнений способом подстановки

Пусть требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = -1 \\ 3y - 5x = 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы легко выразить y через x :
 $y = 2x - 1$.

Подставим во второе уравнение системы вместо y выражение $2x - 1$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 3(2x - 1) - 5x = 2. \end{cases}$$

Теперь второе уравнение системы содержит только одну переменную. Решим его:

$$\begin{aligned} 6x - 3 - 5x &= 2, \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Подставив в уравнение $y = 2x - 1$ вместо x число 5, найдем y :

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot 5 - 1, \\ y &= 9. \end{aligned}$$

Таким образом, решением данной системы является пара чисел: $x = 5$, $y = 9$.

Способ, которым мы воспользовались для решения системы, называется *способом подстановки*.

При решении систем уравнений способом подстановки поступают следующим образом:

выражают из какого-либо уравнения системы одну переменную через другую и подставляют полученное выражение во второе уравнение системы. В результате, как и при способе сложения, удается исключить одну из переменных.

Теперь, когда вам известны два алгебраических способа решения систем уравнений, в каждом конкретном случае нужно думать о том, какой из них предпочтительнее. Например, систему уравнений

$\begin{cases} 6x - 5y = -2 \\ 4x - 9y = -24 \end{cases}$ лучше решать способом сложения, так как при выражении одной переменной через другую получатся дроби.

А система уравнений $\begin{cases} x - 2y = -9 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$ достаточно просто решается любым из рассмотренных приемов.

Однако более сложные системы, в которых только одно из уравнений линейное, решаются, как правило, способом подстановки.

■ **Пример.** Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y + 2x = 2. \end{cases}$$

Выразим из линейного уравнения переменную y через x :

$$y = 2 - 2x.$$

Выполнив подстановку, получим систему

$$\begin{cases} x^2 + (2 - 2x)^2 = 4 \\ y = 2 - 2x. \end{cases}$$

Решим уравнение с одной переменной:

$$\begin{aligned} x^2 + 4 - 8x + 4x^2 &= 4, \\ 5x^2 - 8x &= 0, \\ x(5x - 8) &= 0, \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = 1,6. \end{aligned}$$

Для каждого значения x найдем соответствующее значение y :
 $y_1 = 2 - 2 \cdot 0 = 2$; $y_2 = 2 - 2 \cdot 1,6 = -1,2$. Таким образом, система имеет два решения: $x_1 = 0$, $y_1 = 2$ и $x_2 = 1,6$, $y_2 = -1,2$. Ответ можно также записать следующим образом: $(0; 2)$, $(1,6; -1,2)$.

Обратимся к геометрической интерпретации рассмотренной системы. Для этого сначала выясним, что представляет собой график уравнения $x^2 + y^2 = 4$.

Пусть $M(a; b)$ — произвольная точка графика уравнения $x^2 + y^2 = 4$ (рис. 4.33, а). Это означает, что пара $(a; b)$ — решение уравнения $x^2 + y^2 = 4$, т. е. верно равенство $a^2 + b^2 = 4$.

Найдем расстояние от точки M до начала координат. По теореме Пифагора $OM^2 = a^2 + b^2$. Так как $a^2 + b^2 = 4$, то $OM^2 = 4$ и $OM = 2$.

Таким образом, любая точка графика уравнения $x^2 + y^2 = 4$ находится на одном и том же расстоянии, равном 2 единицам, от начала координат. А это означает, что график уравнения $x^2 + y^2 = 4$ есть окружность с центром в начале координат и с радиусом, равным 2 (рис. 4.33, б). Вообще

График уравнения $x^2 + y^2 = r^2$, где r — положительное число, есть окружность с центром в начале координат и радиусом, равным r .

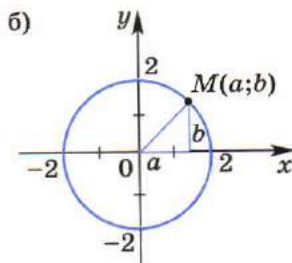
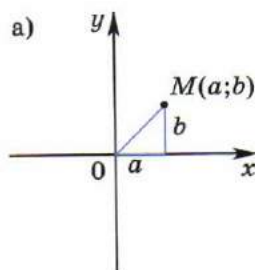


Рис. 4.33

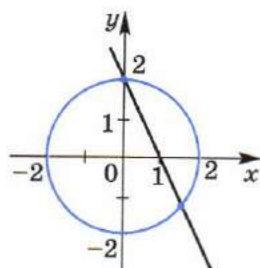


Рис. 4.34

Вернемся теперь к системе уравнений, которую мы решали. Начертим в одной и той же системе координат окружность $x^2 + y^2 = 4$ и прямую $y = 2 - 2x$ (рис. 4.34). Они пересекаются в двух точках. Это и есть геометрическое выражение того факта, что рассмотренная система имеет два решения.

А

649. Выразите из уравнения сначала одну переменную, а затем другую:

- а) $x + y = 18$; в) $2p + q = 0$;
 б) $a - b = 3$; г) $m - 3n = 1$.

Решите систему способом подстановки (650—651):

- 650.** а) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ y = 2x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} a = b \\ 2a + 3b = -15; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y + 2z = 14 \\ y = z - 4; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} x = y - 1 \\ 2x + y = 13; \end{cases}$ г) $\begin{cases} m - 2n = 1 \\ m = -3n + 6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} q = p - 2 \\ 7q - 4p = 10. \end{cases}$

- 651.** а) $\begin{cases} y + x = 21 \\ y - x = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + 4y = 10; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3u + 5v = 8 \\ u + 2v = 1; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} a - 2b = 3 \\ a - 3b = 20; \end{cases}$ г) $\begin{cases} m + 3n = 2 \\ 2m + 3n = 7; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x - 2z = 3 \\ 2x - z = 2. \end{cases}$

652. Решите систему уравнений, применив любой из известных вам способов:

- а) $\begin{cases} 3m + 4n = 7 \\ 2m + n = 8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5a + 2b = 15 \\ 8a + 3b = -1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 8x - 2y = 14 \\ 9x + 4y = -3; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 5x + y = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5p - 4q = 3 \\ 2p - 3q = 11; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3y - z = 5 \\ 5y + 2z = 12. \end{cases}$

653. Вычислите координаты точки пересечения данных прямых и укажите, в какой координатной четверти она находится:

- а) $y = -8x + 27$ и $y = 5x - 25$; в) $2x - y = 6$ и $12x - 5y = 3$;
 б) $y = 3x - 19$ и $y = x + 2$; г) $y + 4x = 0$ и $y = \frac{3}{2}x + 33$.

654. Вычислите координаты точек пересечения прямой и окружности, заданных уравнениями, и проиллюстрируйте результат графически:

а) $y = \frac{3}{4}x$ и $x^2 + y^2 = 25$; в) $y = -\frac{2}{3}x$ и $x^2 + y^2 = 13$;

б) $x + y = 6$ и $x^2 + y^2 = 20$; г) $x - y = 0$ и $x^2 + y^2 = 16$.

655. Определите, пересекаются ли парабола и прямая, и если да, то укажите координаты точек пересечения:

а) $y = x^2$ и $x + y = 2$; в) $y + x^2 = 0$ и $y = -2x - 3$.

б) $y = x^2$ и $x - y = 1$;

656. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 32; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = x + 2 \\ 4y + x^2 = 8; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x - y^2 = 5 \\ x + y^2 = 16; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 4 \\ xy = 12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y^2 + 2x - 4y = 0 \\ 2y - x = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 - 3y = -5 \\ x^2 - y = 1. \end{cases}$



657. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{y}{5} + \frac{x+y}{3} = -2 \\ \frac{2x-y}{3} = \frac{3x}{4} + \frac{3}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = x - y \\ 2(x+y) - 2(x-y) - 3 = 2x + y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{2x}{3} = \frac{x+y}{2} - \frac{5}{2} \\ 2x + \frac{3y}{2} = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3(x-y) - 2(x+y) = 2x - 2y \\ \frac{x-y}{3} - \frac{x+y}{2} = \frac{x}{6} + 1. \end{cases}$

658. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{x} - \frac{4}{y} = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{3}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 10 \\ \frac{1}{2x} - \frac{1}{2y} = 1. \end{cases}$

Указание. Введите замену: $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{y} = b$. Решив систему с переменными a и b , найдите x и y из равенств $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$.

659. Решите систему способом подстановки:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x = 30z \\ y = 40z \\ x + y = 210; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} a = c + 1 \\ b = 2c - 1 \\ a - b = 3; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} m = 4p \\ n = -5p \\ m + 4n = 40; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} s = 2v - 3 \\ u = v - 5 \\ 2s - 3u = 10. \end{cases} \end{array}$$

660. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x + z = 3 \\ y + z = 1 \\ x + y = 2; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x - y - z = 9; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x - y = 3y \\ z - 2y = y \\ x - z = 5; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x + y - z = 18 \\ x - y = 10 \\ y - z = 6. \end{cases} \end{array}$$

661. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x + y = -2 \\ y + z = 4 \\ z + x = 2; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z + u = 5 \\ z + u + x = 6 \\ u + x + y = 1. \end{cases} \end{array}$$

Указание. а) Сложите все уравнения системы и в полученное уравнение подставьте поочередно значения $x + y$, $y + z$ и $z + x$.

662. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x^2 + 2x + y^2 = 16 \\ x + y = 2; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 9x^2 - 6y^2 = 291 \\ 3x^2 + 2y^2 = 197; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \\ x + 2y = 3; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 4x^2 - 3y^2 = 48 \\ 3x^2 - y^2 = 23. \end{cases} \end{array}$$

663. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению:

$$\text{а) } x^2 - y^2 = 64; \quad \text{б) } x^2 - y^2 = 15; \quad \text{в) } x^2 - y^2 = 44.$$

Указание. а) Разложите на множители левую часть уравнения, получится уравнение $(x - y)(x + y) = 64$. Числа $x - y$ и $x + y$ — натуральные, причем их произведение равно 64. Найдите все пары натуральных чисел, дающих в произведении 64, и составьте соответствующие системы уравнений. Чтобы не выписывать лишние системы уравнений, можно учесть, что $x > y$, а $x - y < x + y$.

Вспомните, как в рассказе А. П. Чехова «Репетитор» гимназист, давая урок двенадцатилетнему Пете Удодову, предложил ему решить такую задачу: «Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 рублей. Спрашивается, сколько аршин он купил того и другого, если синее стоило 5 рублей за аршин, а черное 3 рубля».

Тот, кто читал этот рассказ, знает, что учитель запутался, пытаясь решить задачу арифметическим путем. А отец Пети решил ее очень быстро на русских счетах. Возможно, он рассуждал так:

$3 \cdot 138 = 414$ (р.) — столько купец заплатил бы за сукно, если бы все оно было по 3 р. за аршин;

$540 - 414 = 126$ (р.) — такая разница получилась, так как часть сукна купец купил по 5 р. за аршин, т. е. на 2 р. дороже;

$126 : 2 = 63$ (арш.) — столько купец купил синего сукна;

$138 - 63 = 75$ (арш.) — столько купец купил черного сукна.

Горе-репетитор, оправдываясь, заявил: «Эта задача, собственно говоря, алгебраическая. Ее с иском и игркою решить можно». Решим и мы эту задачу, составив по ее условию систему уравнений. Для этого введем две переменные.

Пусть купец купил x аршин синего сукна и y аршин черного. Так как всего было куплено 138 аршин, то $x + y = 138$.

Теперь составим второе уравнение: за синее сукно купец заплатил $5x$ рублей, а за черное — $3y$ рублей, всего купец заплатил 540 рублей, поэтому $5x + 3y = 540$.

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 138 \\ 5x + 3y = 540. \end{cases}$$

Решим ее способом сложения. Умножив первое уравнение на 3, получим систему

$$\begin{cases} 3x + 3y = 414 \\ 5x + 3y = 540. \end{cases}$$

Из второго уравнения вычтем первое. Получим уравнение с переменной x :

$$2x = 126,$$

откуда

$$x = 63.$$

Из уравнения $x + y = 138$ найдем y :

$$y = 138 - 63 = 75.$$

Мы получили уже известный нам ответ: купец купил 63 аршин синего сукна и 75 аршин черного.

По условию этой задачи можно было бы составить уравнение с одной переменной. Однако составить систему уравнений с двумя переменными в данном случае значительно проще, и так бывает при решении многих задач. Если условие задачи достаточно сложное или запутанное, то перевод ее на алгебраический язык можно упростить введением не одной, а двух или даже большего числа переменных.

Задача. Места на стадионе расположены в три яруса. Всего арена рассчитана на 4280 мест. В нижнем ярусе в 3 раза больше мест, чем в верхнем. В среднем ярусе на 680 мест больше, чем в верхнем. Сколько мест в каждом ярусе?

Пусть x мест — в верхнем ярусе,

y мест — в среднем ярусе,

z мест — в нижнем ярусе.

Составим систему

$$\begin{cases} x + y + z = 4280 \\ z = 3x \\ y = x + 680. \end{cases}$$

Подставив в первое уравнение выражения для z и y из второго и третьего уравнений, получим

$$x + (x + 680) + 3x = 4280.$$

Решив уравнение, найдем x :

$$x = 720.$$

Используя уравнения системы, найдем y и z :

$$y = 1400, z = 2160.$$

Как вы хорошо знаете, найдя решение, полезно для самопроверки убедиться, что оно отвечает условию задачи. Действительно, $720 + 1400 + 2160 = 4280$.

Ответ. В верхнем ярусе 720 мест, в среднем ярусе 1400 мест, в нижнем ярусе 2160 мест.

A

664. Составьте систему уравнений по условию задачи:

а) Николай на выполнение домашней работы по математике затратил на 30 мин больше, чем по географии. Всего на эти два предмета он затратил 1 ч 40 мин. Сколько времени потребовалось на каждый предмет?

б) Скорость лодки по течению реки 18 км/ч, а против течения 15 км/ч. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.

в) Стоимость карандаша составляет $\frac{2}{3}$ стоимости ручки, причем ручка на 6 р. дороже карандаша. Сколько стоит ручка и сколько карандаш?

г) С июня ежемесячная плата за квартиру увеличится на 6% и семье придется платить 901 р. Сколько рублей платит семья за квартиру теперь и на сколько рублей увеличится плата?

Решите задачу (665—680):

665. а) Длина ограды вокруг участка прямоугольной формы равна 140 м. Одна из сторон участка на 50 м больше другой. Найдите размеры участка.

б) Брат и сестра, работая летом на почте, заработали 2300 р. Брат заработал на 400 р. больше сестры. Сколько заработал каждый?

666. а) Группа туристов отправилась в поход на 12 байдарках. Часть байдарок были двухместные, а часть — трехместные. Сколько двухместных и сколько трехместных байдарок использовали в походе, если группа состояла из 29 человек и все места были заняты?

б) На теплоходе 17 четырехместных и шестиместных кают. В них можно перевезти 78 пассажиров. Сколько тех и других кают в отдельности имеется на теплоходе?

667. а) У Вани 25 монет по 5 к. и по 10 к., всего на сумму 1 р. 50 к. Сколько 5-копеечных и сколько 10-копеечных монет у Вани?

б) Для школьного вечера купили 10 коробок печенья по 250 г и по 150 г. Общая масса коробок составила 2,1 кг. Сколько купили коробок печенья каждого вида?

668. а) Два отдела института приобрели бумагу для заметок и скрепки. Один отдел за 5 пачек бумаги и 4 коробки скрепок заплатил 144 р., а другой отдел за 2 такие же пачки бумаги и 2 коробки скрепок заплатил 60 р. Сколько стоит одна пачка бумаги и одна коробка скрепок?

б) В кафе в понедельник было продано 56 пирожков и 20 бутылок воды на 872 р., а во вторник — 50 пирожков и 40 бутылок воды на 1000 р. Определите цену одного пирожка и одной бутылки воды.

669. а) Прибыль компании в этом году выросла на 200 000 р. Это на 25% больше, чем прибыль в прошлом году. Найдите прибыль компании за прошлый год и за этот год.

б) Электрочайник на 60 р. дешевле кофеварки, а кофеварка на 30% дороже электрочайника. Сколько стоит электрочайник и сколько стоит кофеварка?

670. а) Клиент банка внес 1200 р. на два разных вклада. По одному из них банк выплачивает 8% в год, по другому — 10% в год. Через год внесенная сумма увеличилась на 108 р. Сколько рублей внес клиент на каждый из вкладов?

б) В выборах школьного совета участвовало 900 учащихся. За кандидата А проголосовало 15% девочек и 20% мальчиков, всего 159 учащихся. Сколько девочек и сколько мальчиков участвовало в выборах совета?

671. Какая из следующих ситуаций возможна, а какая невозможна?

а) Для двух классов купили одинаковые тетради и шариковые ручки. За 60 тетрадей и 20 ручек для одного класса заплатили 420 р., а за 75 тетрадей и 25 ручек для другого класса заплатили 600 р.

б) В школе 650 учащихся. К концу года число девочек увеличилось на 10%, а число мальчиков — на 20%, и всего стало 750 учащихся.

672. а) Произведение двух чисел равно 84, а их сумма равна 20. Найдите эти числа.

б) Произведение двух положительных чисел равно 120, и одно из них на 7 больше другого. Найдите эти числа.

673. а) В парке под аттракционы отвели участок прямоугольной формы площадью 720 м^2 . Длина ограждения этого участка 108 м. Найдите размеры участка.

б) Площадь газона прямоугольной формы 375 м^2 . Одна из его сторон на 10 м больше другой. Найдите размеры газона.

674. а) Периметр прямоугольника 28 см, а его диагональ равна 10 см. Найдите стороны прямоугольника.

б) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 см, а его периметр равен 30 см. Найдите катеты треугольника.

Б

675. Туристский маршрут от станции к озеру идет сначала в гору, а затем с горы. При подъеме туристы идут со скоростью 3 км/ч, а при спуске — 6 км/ч. Путь от станции к озеру занимает 3,5 ч, а обратный путь — 4 ч. Найдите длину маршрута.

676. Некоторая сумма денег была помещена в банк на два разных вклада: один с доходом 6% в год, а другой — 5% в год. Об-

щий годовой доход составил 51 р. Если внесенные вклады поменять местами, то годовой доход составит 48 р. Какая сумма внесена в банк?

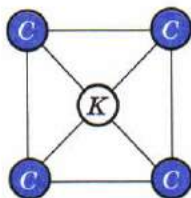
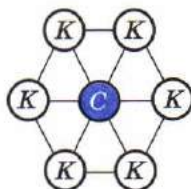


Рис. 4.35

- 677.** Имеется 40 красных фишек и 45 синих. Их раскладывают на плоской поверхности следующим образом: красные фишки образуют вершины правильного шестиугольника, в центр которого кладется синяя фишка, а синие фишки образуют вершины квадрата, в центр которого кладется красная фишка (рис. 4.35).
- а) Существует ли такой способ разложения фишек, при котором все они будут использованы? Если существует, то сколько шестиугольников и сколько квадратов получится?
 - б) Решите эту же задачу для случая, когда имеется 42 красные и 43 синие фишки.
- 678.** В магазине смешали конфеты по 110 р. за килограмм и по 150 р. за килограмм и получили смесь по 120 р. за килограмм. Сколько конфет того и другого сорта содержится в одном килограмме смеси?
- 679.** а) В колбу налили некоторое количество 60%-ного раствора соли и некоторое количество 80%-ного раствора этой же соли. Получили 35 мл раствора, содержащего 72% соли. Сколько миллилитров каждого раствора налили в колбу? Решите задачу, используя следующий план:
- 1) Обозначьте буквами количество 60%-ного и 80%-ного растворов соли, налитых в колбу.
 - 2) Запишите уравнение, связывающее эти две величины и общее количество раствора.
 - 3) Определите количество соли в получившемся растворе.
 - 4) Запишите уравнение, связывающее количество соли в 60%-ном, 80%-ном и получившемся растворах.
 - 5) Составьте систему и решите ее.
- б) Для проведения опыта научный сотрудник химической лаборатории смешал 4%-ный и 10%-ный растворы некоторого химического вещества и получил 75 мл 8%-ного раствора этого вещества. Сколько миллилитров 4%-ного и сколько миллилитров 10%-ного растворов было взято?
- 680.** а) Междугородный автобус проехал от одного города до другого за 17 ч. Некоторое время он ехал со скоростью 35 км/ч,

а остальную часть пути — со скоростью 55 км/ч. Определите, сколько часов он ехал со скоростью 35 км/ч и сколько со скоростью 55 км/ч, если его средняя скорость была 50 км/ч.

б) Автомобиль затратил 5 ч на путь от одного города до другого. Часть пути он ехал со скоростью 70 км/ч, а часть пути со скоростью 90 км/ч, и 1 ч был затрачен на остановку. Сколько времени он ехал со скоростью 70 км/ч и сколько со скоростью 90 км/ч, если его средняя скорость была 60 км/ч?

Введите необходимое число переменных и решите задачу (681—683):

681. Матери, дочери и бабушке вместе 105 лет. Матери и дочери вместе 45 лет, а бабушке и внучке вместе 70 лет. Сколько лет каждой?
682. Города A , B и C расположены не на одной прямой. Путь из A в B через C на 5 км длиннее, чем прямой путь из A в B . Путь из A в C через B в 4 раза длиннее, чем прямой путь из A в C . Путь из B в C через A равен 85 км. Найдите расстояние между каждыми двумя городами.
683. Салат приготовили из помидоров по 40 р. за килограмм, огурцов по 20 р. за килограмм и перца по 70 р. за килограмм. Получили 8 кг салата по 4 р. за 100 г. Сколько помидоров, огурцов и перца взято для салата, если известно, что масса каждого продукта выражается целым числом килограммов?

4.7

Задачи на координатной плоскости

Вы уже знаете, что с помощью систем уравнений можно определять взаимное расположение прямых на координатной плоскости, находить точку их пересечения. Таким образом, алгебра может работать на геометрию.

С помощью уравнений можно решать и другие задачи, связанные с прямыми на координатной плоскости.

■ **Задача 1.** Запишем уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = -0,5x + 3$ и проходит через точку $A(4; -1)$.

Так как прямая, уравнение которой мы должны записать, параллельна прямой $y = -0,5x + 3$, то их угловые коэффициенты одинаковы, и искомое уравнение имеет вид $y = -0,5x + l$. Таким образом, задача свелась к нахождению коэффициента l .

Точка $A(4; -1)$ принадлежит прямой $y = -0,5x + l$. Подставив ее координаты $x = 4$ и $y = -1$ в уравнение $y = -0,5x + l$, получим

$$-1 = -0,5 \cdot 4 + l.$$

Из этого равенства найдем, что $l = 1$.

Значит, уравнение прямой, параллельной прямой $y = -0,5x + 3$ и проходящей через точку $A(4; -1)$, имеет вид $y = -0,5x + 1$.

■ **Задача 2.** Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; 2)$ и $B(3; 4)$.

Чтобы записать уравнение прямой AB в виде $y = kx + l$, нужно найти коэффициенты k и l .

Так как точка A лежит на прямой, то ее координаты $x = -1$ и $y = 2$ удовлетворяют уравнению $y = kx + l$, т. е. $2 = k \cdot (-1) + l$. Точно так же уравнению $y = kx + l$ удовлетворяют координаты точки B , т. е. $4 = k \cdot 3 + l$.

Таким образом, мы имеем систему уравнений с переменными k и l :

$$\begin{cases} -k + l = 2 \\ 3k + l = 4. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем, что $k = 0,5$ и $l = 2,5$. Значит, прямая, проходящая через точки $A(-1; 2)$ и $B(3; 4)$, задается уравнением $y = 0,5x + 2,5$.

■ **Задача 3.** Докажем, что прямые $2x - 3y + 6 = 0$, $y + 2x - 6 = 0$ и $2x + 4y - 15 = 0$ пересекаются в одной точке.

Поступим следующим образом: найдем точку пересечения каких-либо двух прямых и покажем, что она принадлежит третьей прямой.

Найдем точку пересечения прямых $2x - 3y + 6 = 0$ и $y + 2x - 6 = 0$. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ y + 2x - 6 = 0. \end{cases}$$

Получим $x = \frac{3}{2}$, $y = 3$.

Точка пересечения этих прямых имеет координаты $x = \frac{3}{2}$ и $y = 3$. Подставим найденные координаты в уравнение $2x + 4y - 15 = 0$, получим верное равенство $2 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot 3 - 15 = 0$. Следовательно, эта точка принадлежит также прямой $2x + 4y - 15 = 0$. Таким образом, все три прямые пересекаются в одной точке.

А

684. Запишите уравнение прямой и постройте ее, если известно, что:
- а) угловой коэффициент прямой равен -2 и она проходит через точку $(2; -2)$;
 - б) угловой коэффициент прямой равен $0,5$ и она проходит через точку $(-6; -2)$.
685. Запишите уравнение прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку A :
- а) $y = 3x$, $A(2; -1)$; б) $y = -\frac{1}{2}x + 4$, $A(-6; 5)$.
686. Запишите уравнение прямой и постройте эту прямую, если известно, что:
- а) прямая проходит через начало координат и через точку с координатами $(90; 60)$;
 - б) прямая пересекает ось y в точке $(0; -3)$ и проходит через точку $(15; 57)$.

Б

687. Запишите уравнение прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку A :
- а) $3x + 4y = 12$, $A(8; -8)$; б) $2x - 5y = 1$, $A(5; 7)$.
688. Запишите уравнение прямой, которая проходит через две данные точки:
- а) $A(1; 3)$, $B(5; -4)$; б) $A(-1; -1)$, $B(4; 3)$.
689. а) Найдите координаты точки пересечения прямых $2x + y = 2$ и $x - y = 4$ и определите, проходит ли через эту точку прямая $x + 2y = 6$.
- б) Определите, пересекаются ли прямые $2x - 3y = 1$, $x + y = 3$ и $3x - y = 5$ в одной точке.
690. Запишите уравнения прямых, изображенных на рисунке 4.36.
691. Докажите, что точки $(-2; -14)$, $(2; 6)$, $(3; 11)$ лежат на одной прямой.
692. Четыре точки заданы своими координатами: $A(-5; 6)$, $B(7; 2)$, $C(5; 1)$, $D(-4; 4)$. Определите, параллельны ли прямые:
- а) AB и CD ; б) BC и AD .
693. При каком значении k прямые $y = \frac{1}{2}x - 2$, $y = -2x - 12$, $y = kx$ пересекаются в одной точке?

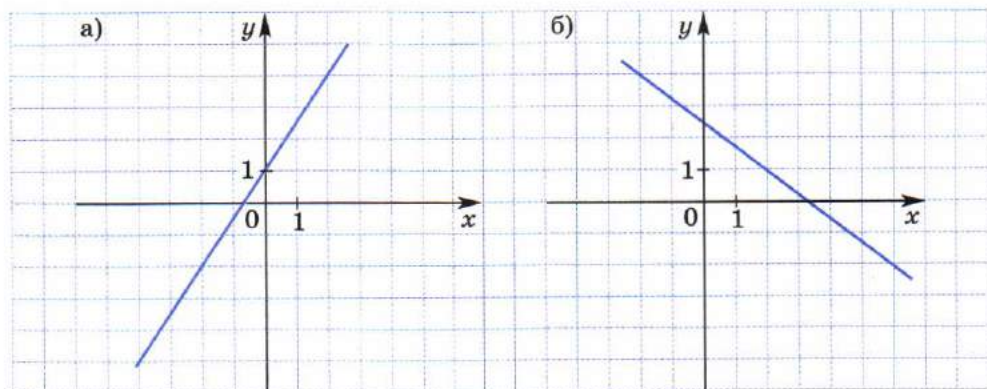


Рис. 4.36

694. Три прямые $y = -\frac{2}{3}x + 2$, $y = 4x + 16$, $y = \frac{6}{5}x + 2$, попарно пересекаясь, образуют треугольник. Вычислите координаты его вершин.

695. Постройте прямую $y = -\frac{1}{3}x + 1$. Постройте прямую, симметричную ей относительно: а) оси y ; б) оси x ; в) начала координат. В каждом случае запишите уравнение построенной прямой.

696. (Задача-исследование.)

1) В одной системе координат постройте прямые:

а) $y = 3x + 1$ и $y = -\frac{1}{3}x + 1$; б) $y = -2x + 2$ и $y = \frac{1}{2}x - 3$.

2) Убедитесь, что прямые на каждом из рисунков перпендикулярны. Как связаны между собой угловые коэффициенты каждой пары прямых?

3) Запишите в буквенном виде соотношение, связывающее угловые коэффициенты перпендикулярных прямых $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$.

4) Запишите уравнение какой-нибудь прямой, перпендикулярной прямой: а) $y = -\frac{1}{4}x - 1$; б) $y = x + 5$. В каждом случае выполните чертеж.

5) Дана прямая $y = -\frac{3}{2}x + 3$. Запишите уравнение прямой:

а) перпендикулярной данной прямой и проходящей через начало координат;

б) перпендикулярной данной прямой и проходящей через точку $A(9; 2)$;

в) пересекающей данную прямую под прямым углом в точке $M(0; 3)$.

(Для тех, кому интересно)

При изучении курса алгебры 7 класса вам уже приходилось строить множества точек координатной плоскости, которые задавались с помощью неравенств. Однако эти неравенства всегда содержали только одну переменную. Теперь мы будем рассматривать множества точек, которые задаются неравенствами, содержащими две переменные.

■ **Пример 1.** Вы знаете, что графиком уравнения $y = x$ является прямая — биссектриса I и III координатных углов (рис. 4.37, а). Эта прямая разбивает координатную плоскость на две полуплоскости. Какая из них соответствует неравенству $y > x$?

Возьмем на прямой $y = x$ какую-нибудь точку, например $M(2; 2)$. Понятно, что точки, у которых абсцисса равна 2, а ордината больше 2, лежат на вертикали $x = 2$ выше точки M (рис. 4.37, б). И вообще точки, у которых абсцисса равна некоторому числу a , а ордината больше a , расположены на вертикальной прямой $x = a$ выше точки ее пересечения с биссектрисой $y = x$. Таким образом, неравенством $y > x$ задается полуплоскость, расположенная над прямой $y = x$ (рис. 4.37, в). Так как неравенство $y > x$ строгое, то сама прямая $y = x$ рассматриваемому множеству не принадлежит. Чтобы показать это, мы провели ее пунктирной линией.

Очевидно, что полуплоскость под прямой $y = x$ задается неравенством $y < x$ (рис. 4.37, г).

Заметим, что выяснить, какая из двух полуплоскостей задается неравенством $y > x$, можно было бы с помощью следующего приема. Подставим в это неравенство координаты любой точки плоскости, не лежащей на прямой $y = x$, например точки $(4; 0)$, принадлежащей полуплоскости под прямой. Получим неверное неравенство

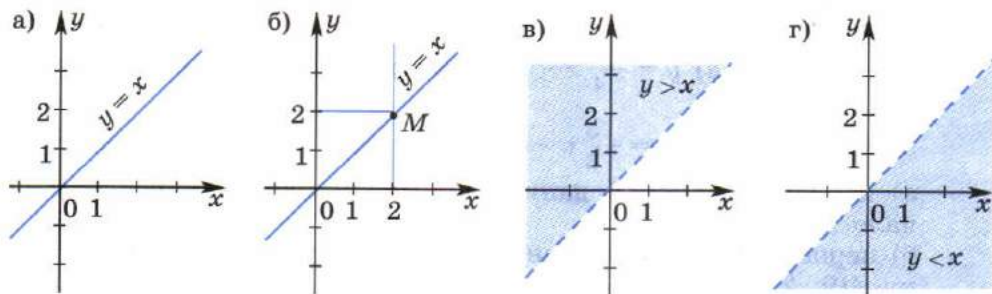


Рис. 4.37

$0 > 4$. Значит, эта точка рассматриваемому множеству не принадлежит и неравенством $y > x$ задается другая полуплоскость.

■ **Пример 2.** Построим множество точек координатной плоскости, которое задается системой неравенств

$$\begin{cases} y < x - 1 \\ y < -x + 3. \end{cases}$$

Неравенством $y < x - 1$ задается множество точек, расположенных ниже прямой $y = x - 1$, а неравенством $y < -x + 3$ задается множество точек, расположенных ниже прямой $y = -x + 3$. Системе неравенств удовлетворяют координаты точек, принадлежащих сразу двум указанным множествам. Искомое множество точек показано двойной штриховкой на рисунке 4.38.

■ **Пример 3.** Изобразим на координатной плоскости множество точек, задаваемое системой трех неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 2. \end{cases}$$

Первыми двумя неравенствами системы задается первый координатный угол. В нем закрасим область, которая расположена ниже прямой $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Получили треугольник вместе с его границами (рис. 4.39).

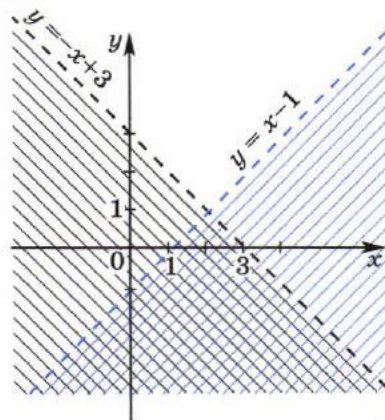


Рис. 4.38

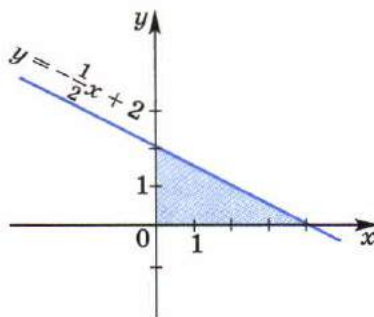


Рис. 4.39

697. Постройте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $y \geq -x$; б) $y < -x$; в) $y \geq 2x$; г) $y \leq -2x + 4$.

698. Какое множество точек координатной плоскости задается неравенством: а) $y \geq x^2$; б) $y \leq x^3$?

699. Постройте множество точек плоскости, которое задается системой неравенств:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} y \geq \frac{1}{3}x \\ y \leq 6 \\ y \geq 0; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} y \geq x - 1 \\ y \leq x + 1; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} y \geq |x| \\ y \leq 5; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} y \geq -x + 4 \\ y \geq x - 4 \\ y \leq \frac{1}{4}x + 2. \end{cases} \end{array}$$

700. Закрасьте часть координатной плоскости, которая расположена ниже каждой из прямых $x + 3y = 16$ и $2x + y = 12$, ограничена горизонталями $y = 0$ и $y = 5$, а также вертикалями $x = 0$ и $x = 5$. Задайте это множество точек плоскости системой неравенств.
701. Какое множество точек координатной плоскости задается условием:
 а) $x^2 + y^2 \leq 1$; б) $x^2 + y^2 \geq 9$; в) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$
702. Задайте системой неравенств множество точек координатной плоскости, изображенное на рисунках 4.40—4.43.

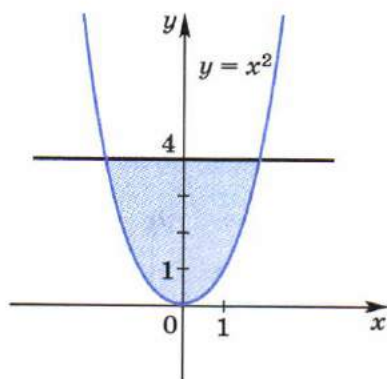


Рис. 4.40

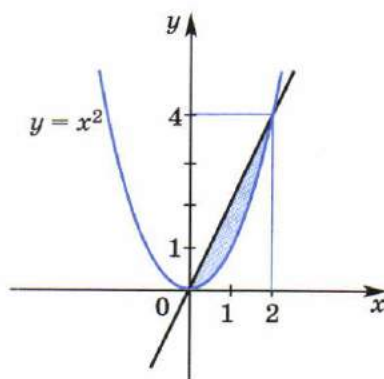


Рис. 4.41

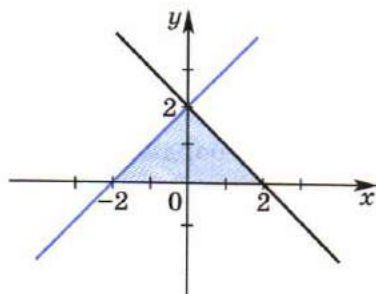


Рис. 4.42

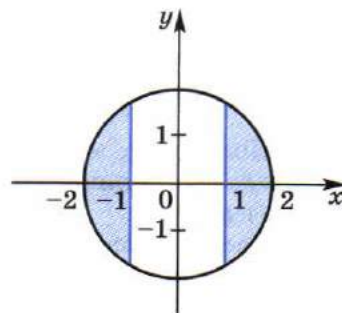


Рис. 4.43

Уравнение с двумя переменными.

График уравнения с двумя переменными

- 703.** Составьте какое-нибудь уравнение с двумя переменными, решением которого служит пара чисел: а) $(2,5; -1)$; б) $(-1; 2,5)$.
- 704.** а) При каких значениях a пара чисел $(4; a)$ является решением уравнения $x^2 + y^2 = 25$?
б) При каких значениях b пара чисел $(b; 4)$ является решением уравнения $2x^2 + y = 12$?
- 705.** а) Найдите значение c , при котором пара чисел $\left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ является решением уравнения $2x + 3y = c$.
б) Найдите значение a , при котором пара чисел $(-3; -2)$ является решением уравнения $ax - 4y = 2$.
- 706.** Постройте график уравнения $x + 3y = c$, где x и y — переменные, c — некоторое число, если известно, что он проходит через точку $M(-3; 3)$.
- 707.** а) Найдите значение дроби $\frac{2x+3y}{3x-2y}$, если $\frac{3x+y}{x-y} = 4$.
б) Найдите значение дроби $\frac{a+5b}{b-a}$, если $\frac{a+b}{a-b} = 2$.
- 708.** Постройте график уравнения:
а) $(x-2y)(x+2y) = 0$; в) $(x-1)(x+2) = 0$;
б) $(x+5)(y-3) = 0$; г) $(y+1)(y+4) = 0$.
- 709.** Проходит ли через начало координат график уравнения:
а) $xy - 1 = 0$; б) $x^2 + y = 0$; в) $3x - 6y = 2$; г) $5x + 7y = 0$?
- 710.** Окружность задана уравнением $x^2 + y^2 = 9$. Определите, какие из данных точек лежат на этой окружности; внутри окружности; вне окружности: $A(1; 2\sqrt{2})$, $B(-\sqrt{3}; 2)$, $C(2,5; 2)$, $D(-\sqrt{5}; -2)$, $E(-1; 2,5)$, $F(2; -\sqrt{6})$.
- 711.** Можно ли двухрублевыми и пятирублевыми монетами заплатить за книгу 35 р. без сдачи? Если можно, то укажите эти способы.
- 712.** В канцелярском магазине продают простые карандаши в коробках по 8 и по 12 карандашей. Маленькая коробка стоит 70 р., а большая — 90 р. Покупателю требуется ровно 100 простых карандашей. Сколько маленьких и сколько больших коробок ему надо купить, чтобы покупка была максимальной выгодной?

713. а) Найдите все точки первой четверти с целыми координатами, через которые проходит прямая $x + 2y = 9$.
 б) Найдите все точки второй четверти с целыми координатами, через которые проходит прямая $2y - 3x = 15$.

Системы уравнений

714. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 17x + 13y = 40 \\ 13x + 17y = 50; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 11x + 35y = 59 \\ 14x - 10y = -34; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 12x - 19y = 10 \\ 18x - 11y = 50; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 16x - 17y = 49 \\ 14x + 47y = -19. \end{cases}$

Указание. а) Сложите первое и второе уравнения системы; получится уравнение $30x + 30y = 90$, или $x + y = 3$. Затем решите систему

$$\begin{cases} 17x + 13y = 40 \\ x + y = 3. \end{cases}$$

715. Найдите сумму $x + y$, если $(x; y)$ — решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 16x + 9y = 30 \\ 9x + 16y = 70; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 12x + 11y = 8 \\ 11x + 12y = 61. \end{cases}$

716. Найдите сумму $x + y + z$, если:

а) $\begin{cases} \frac{x}{12} - \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1 \\ \frac{x}{5} + \frac{z}{10} + \frac{y}{3} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{6} - \frac{y}{4} - \frac{z}{12} = 5 \\ \frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 10. \end{cases}$

Решите задачу (717—721):

717. а) Сестра старше брата на 4 года. Через год она будет старше его в 3 раза. Сколько лет сейчас каждому?
 б) Возраст сестры сейчас составляет $\frac{3}{4}$ возраста брата, а 8 лет назад брат был в 2 раза старше сестры. Сколько лет каждому сейчас?
 718. Школьная баскетбольная команда в двух играх заработала 95 очков. Количество очков, полученных во второй игре, на 5 больше, чем удвоенное количество очков, полученных в первой игре. Сколько очков заработала команда в каждой игре?



- 719.** Для учащихся 8 класса составили работу из заданий по алгебре и геометрии. Если каждое задание по алгебре оценивать в 2 балла, а каждое задание по геометрии — в 3 балла, то максимальное число баллов за работу будет равно 38. Если каждое задание по алгебре оценивать в 3 балла, а каждое задание по геометрии — в 2 балла, то максимальное число баллов за работу будет равно 37. Сколько заданий содержит работа?
- 720.** В таблице показано содержание белков и жиров в одной порции мяса и хлеба:

	Мясо	Хлеб
Белки, г	16	2
Жиры, г	11	1

Сколько порций мяса и хлеба надо съесть за один прием пищи, чтобы получить 26 г белков и 17,5 г жиров?

- 721.** Сколько граммов арахиса по цене 12,5 р. за 100 г и сколько граммов лесных орехов по цене 30 р. за 100 г надо смешать, чтобы получить 700 г смеси по цене 20 р. за 100 г?

Введите необходимое число переменных и решите задачу (722—725):

- 722.** Отцу, матери и сыну вместе 70 лет. Отец старше матери на 5 лет, а мать старше сына на 25 лет. Сколько лет каждому?
- 723.** Три сосуда вместе имеют вместимость, равную 80 л. Если первый сосуд наполнить водой и затем перелить ее в два других сосуда, то либо второй сосуд наполнится доверху, а третий — на $\frac{3}{5}$, либо третий сосуд наполнится доверху, а второй — на $\frac{1}{2}$.

Найдите вместимость каждого сосуда.

- 724.** Шесть станций на железнодорожной ветке расположены в следующем порядке: Абрамцево, Белово, Виноградово, Грибово, Дорохово, Ельники. Расстояние от первой до последней станции 70 км. Расстояние между Абрамцево и Белово в 2 раза больше, чем между Белово и Виноградово; расстояние между Грибово и Дорохово в 1,5 раза больше, чем между Белово и Виноградово, и на 2 км меньше, чем между Виноградово и Грибово. Расстояние между Виноградово и Дорохово в 4 раза больше, чем между Дорохово и Ельники. Чему равно расстояние от Абрамцево до Виноградово?

725. За 3 майки, 2 пары шорт и 4 пары кроссовок заплатили 2650 р., а за 2 майки, 3 пары шорт и пару кроссовок заплатили 1350 р. Сколько стоит комплект из майки, одной пары шорт и одной пары кроссовок?



Вопросы для повторения к главе 4

1. Что называется решением уравнения с двумя переменными? Укажите несколько решений уравнения $4x - y = 4$.
2. Дайте определение линейного уравнения с двумя переменными. Какие из следующих уравнений являются линейными:

$$x + y = 0, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3, \quad 2x - 5y = 8, \quad y - x^2 = 6?$$

3. Что является графиком уравнения $ax + by = c$, где хотя бы один из коэффициентов a и b отличен от 0?
4. Запишите уравнение прямой $6x + 3y = 9$ в виде $y = kx + l$. Назовите коэффициенты k и l .
5. Прямые, изображенные на рисунке 4.44, могут быть заданы уравнениями вида $y = kx$. Для каждой прямой укажите знак коэффициента k .
6. Каков геометрический смысл коэффициента l в уравнении $y = kx + l$? В какой точке пересекает ось y прямая $y = 3x - 10$?
7. Сформулируйте условие параллельности двух прямых, заданных уравнениями вида $y = kx + l$. Приведите примеры уравнений, задающих параллельные прямые.
8. Что называется решением системы двух уравнений с двумя переменными? Является ли решением системы уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = -5 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

пара чисел: $(3; -4)$, $(-1; -2)$?

9. Объясните, как решить методом сложения систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 7x + 2y = 16. \end{cases}$$

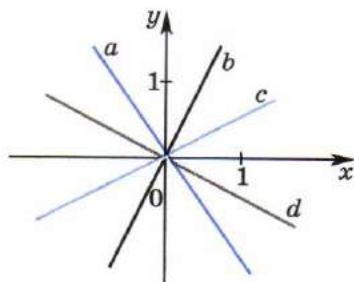


Рис. 4.44

10. Используя графические соображения, определите, какая система имеет единственное решение, какая система не имеет решений, какая система имеет бесконечное множество решений:

а) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 6x - 2y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - y = 8 \\ 8x - y = 8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = 3x + 9 \\ 6x - 2y = -27. \end{cases}$

11. Объясните, как решить методом подстановки систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ x - 3y = 0. \end{cases}$$



Задания для самопроверки к главе 4

(Обязательные результаты обучения)

- Найдите какие-нибудь два решения уравнения $7x + 2y = 14$.
- Является ли решением уравнения $xy - x = 18$ пара чисел: $(-3; -5)$, $(-5; -3)$, $(2; 10)$?
- Проходит ли прямая $3x - 4y = 48$ через точку $A(20; 2)$? через точку $B(24; 6)$?
- Вычислите координаты точек пересечения прямой $4x - 5y = 10$ с осями координат.
- Постройте график уравнения:
 - $9x - 3y = 6$;
 - $y = -4x + 2$;
 - $y = \frac{1}{3}x$;
 - $y = -x$;
 - $y = -5$;
 - $x = 4$.
- Решите систему уравнений:
 - $\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 3x - y = 7; \end{cases}$
 - $\begin{cases} 3x + 4y = 13 \\ 5x + 2y = 17; \end{cases}$
 - $\begin{cases} x - y = 5 \\ xy = 14. \end{cases}$

7. Пользуясь рисунком 4.45, решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 2. \end{cases}$$

8. Вычислите координаты точки пересечения прямых

$$3x - y = 2 \text{ и } 2x - y = 3.$$

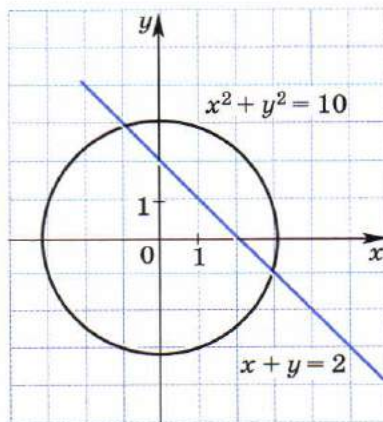


Рис. 4.45

9. Вычислите координаты точки пересечения прямой $y = 2 + x$ и окружности $x^2 + y^2 = 10$.

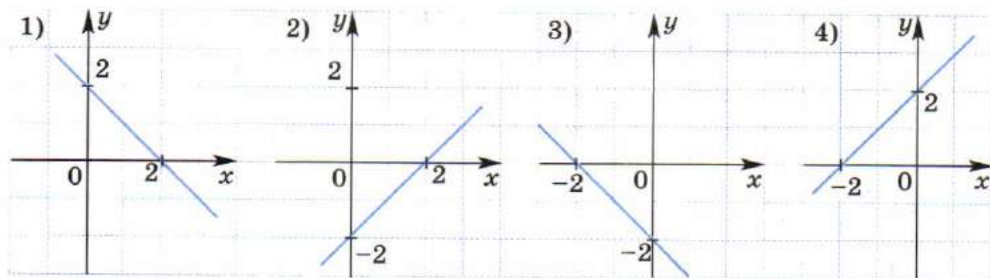
Составьте систему уравнений и решите задачу (10—11):

10. Три карандаша и пять авторучек вместе стоят 50 р., а шесть карандашей и три авторучки вместе стоят 51 р. Сколько стоит карандаш и авторучка в отдельности?
11. Найдите стороны прямоугольника, площадь которого равна 24 см^2 , а периметр равен 20 см.



Тест к главе 4

1. Укажите пару чисел, которая является решением уравнения $x^2 - y^2 = 25$.
А. (0; 5). Б. (5; 0). В. (6; 3). Г. (3; 6).
2. Для художественной студии планируется купить коробки карандашей: x коробок по цене 90 р. и y коробок по цене 50 р. На всю покупку должно быть истрачено 1300 р. Какое наибольшее число коробок с карандашами может быть куплено?
А. 16. Б. 18. В. 22. Г. 24.
3. Какое из следующих уравнений не задает прямую?
А. $x - 2y - 1 = 0$. Б. $2x + y = 0$. В. $2x - 7 = 0$. Г. $2xy = 1$.
4. Соотнесите каждую прямую с ее уравнением:
а) $x + y = -2$; б) $x - y = 2$; в) $x + y = 2$; г) $x - y = -2$.

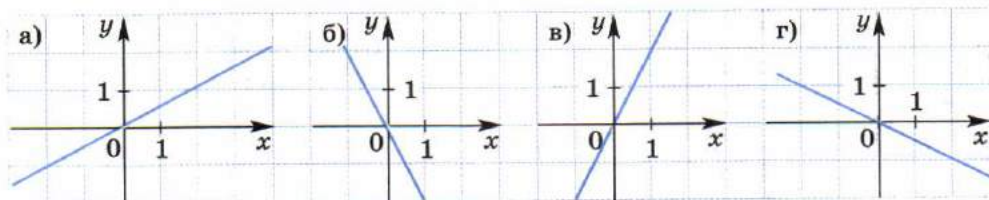


Ответ. 1) _____ ; 2) _____ ; 3) _____ ; 4) _____

5. Через какую из точек проходит прямая $3x - 8y = -25$?
А. (3; 2). Б. (-3; -2). В. (3; -2). Г. (-3; 2).
6. Укажите уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; 5)$ и $B(-1; 4)$.
А. $2x - y = -3$. Б. $x - 2y = -9$. В. $x + 2y = 7$. Г. $2x + y = 7$.

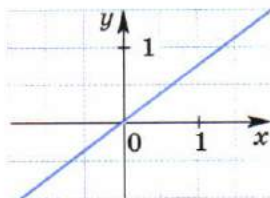
7. Соотнесите каждое уравнение с его графиком:

1) $y = 2x$; 2) $y = -2x$; 3) $y = -\frac{1}{2}x$; 4) $y = \frac{1}{2}x$.



Ответ. 1) _____ ; 2) _____ ; 3) _____ ; 4) _____

8. Определите, через какую из заданных точек проходит прямая, изображенная на рисунке.



А. (6; 8). В. (15; 20).

Б. (8; 12). Г. (16; 12).

9. Какая прямая проходит через I, II и III координатные четверти?

А. $y = -3x + 5$. Б. $y = -3x - 5$. В. $y = 3x - 5$. Г. $y = 3x + 5$.

10. Выберите уравнение прямой, параллельной прямой $y = 4x$ и проходящей через точку (10; 39).

А. $y = -4x$. Б. $y = -4x + 1$. В. $y = 4x + 1$. Г. $y = 4x - 1$.

11. В какой координатной четверти находится точка пересечения прямых $2x - 3y = 5$ и $x - 6y = -2$?

А. В первой. Б. Во второй. В. В третьей. Г. В четвертой.

12. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ \frac{2x}{3} + y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ. _____

13. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y = -5 \\ x^2 - y^2 = 13 \end{cases}$$

А. (2; -7). Б. (-5; 0). В. (-3,8; -1,2). Г. (-3,2; -1,8).

14. В питомнике одинаковыми рядами высадили 90 елок. Оказалось, что число рядов на 1 меньше числа елок в каждом ряду. Сколько рядов и сколько елок в каждом ряду?

Пусть x — число рядов, а y — число елок в каждом ряду. Какая система уравнений соответствует условию задачи?

А. $\begin{cases} xy = 90 \\ y = x - 1 \end{cases}$ Б. $\begin{cases} xy = 90 \\ y - x = 1 \end{cases}$ В. $\begin{cases} xy = 90 \\ x - y = 1 \end{cases}$ Г. $\begin{cases} 2(x + y) = 90 \\ y - x = 1 \end{cases}$



Функции

5.1 Чтение графиков

Вам уже приходилось работать с графиками различных зависимостей между величинами. Зависимости представлены на графиках в наглядной, удобной для восприятия форме, что позволяет получать с их помощью самую разнообразную информацию. Разберем несколько примеров.

■ **Пример 1.** Родители измеряли рост сына каждые два года с 2 до 12 лет. Получились такие результаты:

Возраст, годы	2	4	6	8	10	12
Рост, см	82	102	108	120	126	132

Затем родители построили график роста сына. Для этого на горизонтальной оси отметили возраст, а на вертикальной — соответствующий рост. В результате получились точки, которые для наглядности соединили отрезками (рис. 5.1).

С помощью построенного графика можно узнать, например, какого роста был сын в 9 лет, в каком возрасте его рост был 130 см. Конечно, результат, прочитанный по графику, может отличаться от реального результата, но дает о нем достаточно хорошее представление.

По графику легко также увидеть, когда мальчик рос быстрее, а когда — медленнее. Например, с 2 до 4 лет он рос быстрее, чем с 4 до 6 лет. Можно вычислить среднюю скорость его роста в опре-

деленный период времени, для этого нужно найти отношение изменения роста за этот промежуток к его продолжительности.

Так, с 6 до 8 лет мальчик вырос со 108 до 120 см. Значит, средняя скорость (v) его роста в этот период была равна

$$\frac{120 - 108}{8 - 6} = 6 \text{ (см в год)}.$$

С 10 до 12 лет мальчик рос медленно:

$$v = \frac{132 - 126}{12 - 10} = 3 \text{ (см в год)}.$$

С 2 до 4 лет он рос очень быстро:

$$v = \frac{102 - 82}{4 - 2} = 10 \text{ (см в год)}.$$

Часто в одной и той же системе координат строят не один, а два или несколько графиков. И это позволяет сопоставлять представленные на них процессы.

■ Пример 2. На рисунке 5.2 изображены графики, показывающие, как менялся вес двух детей, родившихся в один и тот же день,

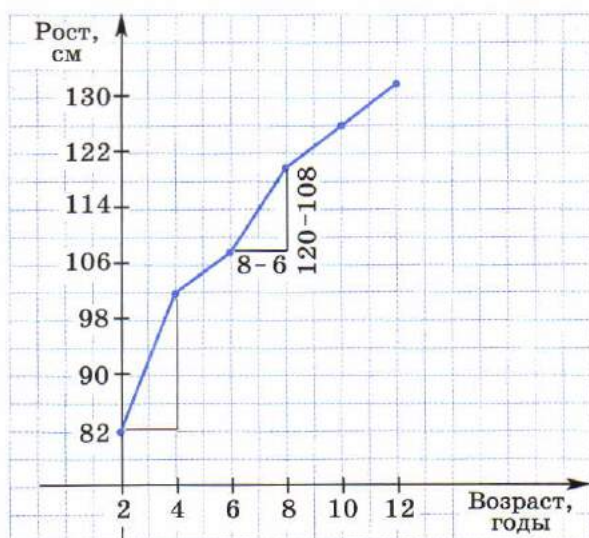


Рис. 5.1

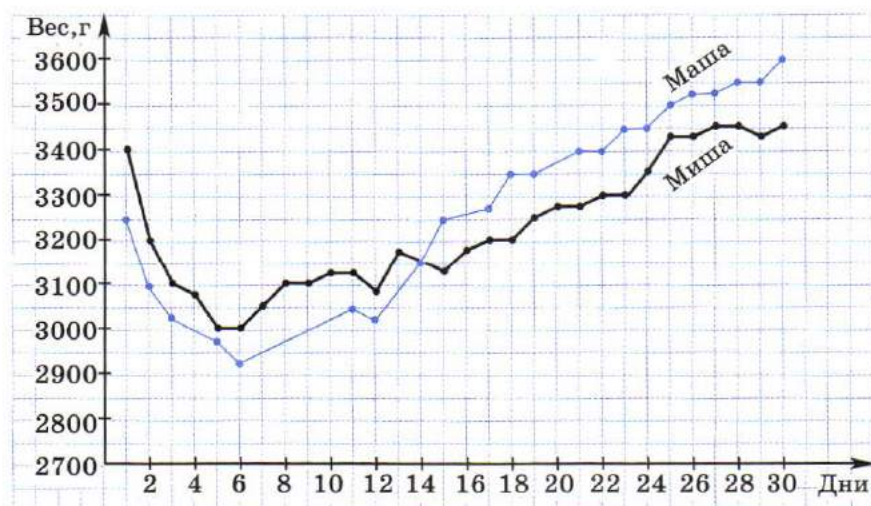


Рис. 5.2

в первый месяц их жизни. (Вы, конечно, понимаете, что в данном случае нужно говорить о массе детей. Но в реальной жизни в этой ситуации обычно употребляют слово «вес».)

У каждого из малышей вес сначала снижался, а потом и Маша, и Миша стали прибавлять в весе — так всегда бывает у новорожденных. Маша родилась с меньшим весом, однако уже на 14-й день она догнала Мишу, на 15-й день достигла своего первоначального веса и к концу месяца весила на 150 г больше, чем Миша. Наверное, Маша быстрее приспособилась к новой жизненной среде; она оказалась более активной, чем Миша.

■ Пример 3. В учебнике для 7 класса вы уже встречались с графиками бега трех спортсменов (рис. 5.3). Тренер, чтобы определить их возможности, предложил бежать «на износ».

Из сопоставления графиков сразу же видно, что Борис бежал дольше всех, а Вадим пробежал дальше всех. В то же время, анализируя графики, тренер может получить еще массу полезной информации, гораздо больше, чем если бы он просто узнал по секундомеру, за сколько времени бегуны преодолели свои дистанции.

Так, тренер видит, что с точки зрения поставленной им задачи — проверки выносливости — Андрей неправильно построил тактику бега и поэтому выдержал всего один час. Однако он видит также, что график бега Андрея круто идет вверх, т. е. Андрей сразу же побежал очень быстро — в первые 15 мин он пробежал 6 км, затем, устав, снизил скорость (кривая на участке от 15 мин до 45 мин более пологая), а потом снова «рванул» и еще через 15 мин полностью выдохся. Отсюда тренер может сделать вывод, что из Андрея может получиться неплохой спринтер — бегун на короткие дистанции.

По графику бега Бориса видно, что он бежал, мягко говоря, не

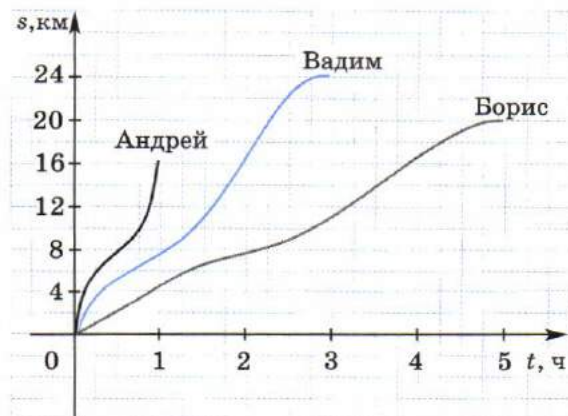


Рис. 5.3

спеша, пробегая за 1 ч примерно 4 км, т. е., попросту говоря, медленно шел (обычная скорость пешехода примерно 5–6 км/ч). Возможно, он слишком буквально понял задачу — как можно дольше продержаться на дистанции.

Наконец, по графику бега Вадима видно, что он обладает хорошими способностями к бегу: начал он резво (график довольно круто идет вверх), затем слегка снизил темп (график

стал более пологим), через 1 ч снова взвинтил темп и держал его еще 1 ч (график снова круто идет вверх), после чего Вадим стал снижать темп и, явно преодолевая усталость, продержался еще полчаса. Другими словами, Вадим умеет и быстро бегать, и распределять свои силы на дистанции, и, главное, обладает волевыми качествами.

■ Пример 4. График, который вы видите на рисунке 5.4, — это кардиограмма. По ней судят о работе сердца. В явном виде оси на этом графике не изображаются, но миллиметровая бумага позволяет врачу считывать интересные его показания.



Рис. 5.4

Выделенный на графике фрагмент показывает сердечный ритм. Вы видите, что этот фрагмент периодически повторяется. Такого рода *периодические* процессы в реальной жизни встречаются часто. Это, например, изменение расстояния от Земли до Солнца во время вращения нашей планеты вокруг Солнца — через каждый год Земля возвращается в одну и ту же точку своей орбиты, и весь процесс снова повторяется.

А

726. Школьный врач ежегодно фиксирует число детей, болевших в течение учебного года гриппом. Результаты его наблюдений показаны на графике (рис. 5.5).

- а) Сколько детей болело гриппом в 2002/03 учебном году?
- б) В каком году была серьезная эпидемия гриппа?
- в) В каком году было меньше всего болевших гриппом?
- г) К 2004/05 учебному году в школе сделали ремонт и обновили отопительную систему. Как вы считаете, повлияло ли это на число случаев заболевания гриппом?

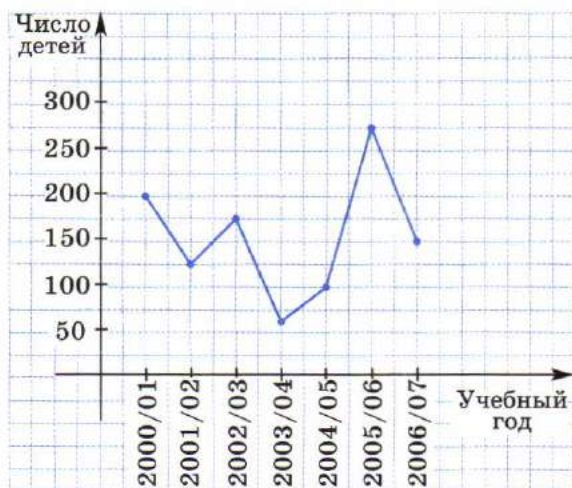


Рис. 5.5

727. На рисунке 5.6 изображен график температуры воздуха в городе Весеннем 25 февраля 2007 г. По графику определите:
- какая температура была в 6 ч; в 11 ч; в 18 ч;
 - в какое время дня температура была -3°C ; 2°C ; 4°C ;
 - в какое время суток температура была выше 0°C ; ниже 0°C ;
 - в какое время суток температура повышалась; понижалась; оставалась постоянной;
 - в какое время суток температура была максимальной и в какое время — минимальной;
 - какова была максимальная температура за сутки; минимальная температура за сутки;



Рис. 5.6

ж) в какое время суток температура повышалась с наибольшей скоростью; понижалась с наибольшей скоростью;
 з) какова была средняя скорость изменения температуры с 8 до 10 ч; с 0 до 4 ч.

728. Метеоролог каждый полдень в течение месяца измерял температуру воздуха. Результаты своих наблюдений он представил в виде таблицы:

День наблюдения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$t, ^\circ\text{C}$	-4	-3	-2	-1	0	2	2	3	3	4	5	5	5	5	6

День наблюдения	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$t, ^\circ\text{C}$	7	8	8	7	7	7	7	7	9	10	10	9	9	9	10

Постройте график температуры. Проанализируйте, как менялась температура в течение этого месяца. В каком месяце в вашей местности возможна такая ситуация?

729. На рисунке 5.7 изображен график изменения роста Тани от рождения до 20 лет. Используя график, ответьте на вопросы:
 а) Какого роста была Таня в момент рождения? в 1 год? в 5 лет? в 12 лет?
 б) К какому времени рост Тани достиг 1 м? 1 м 50 см?
 в) Когда рост Тани стал вдвое больше ее роста при рождении?

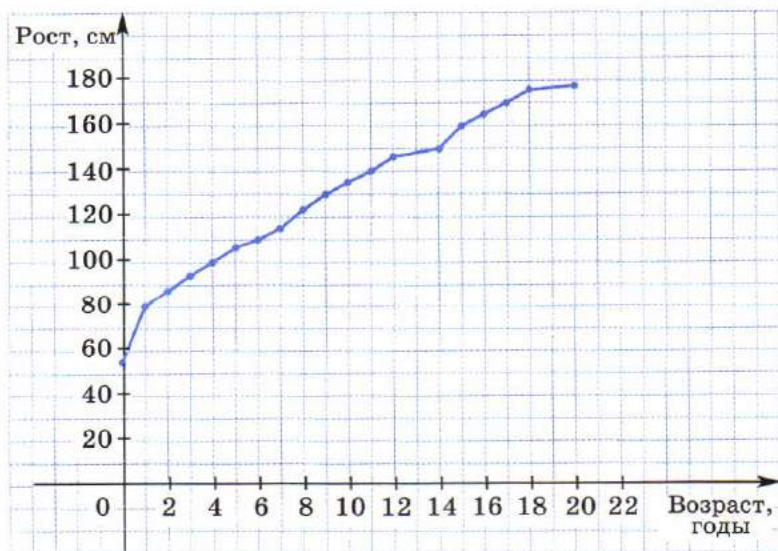


Рис. 5.7

- г) Укажите промежуток времени, когда Таня росла быстрее всего.
 д) Когда Таня росла быстрее — с 4 до 12 лет или с 12 до 20 лет?

730. На рисунках 5.8 и 5.9 изображены два графика. Один из них показывает процесс наполнения бака водой, а другой — процесс вытекания воды из бака.

- 1) Определите, какой процесс описывает каждый из графиков.
 2) По каждому графику ответьте на вопросы:

- а) Сколько литров воды было в баке первоначально?
 б) Сколько литров воды стало в баке через 1 мин? через 3 мин? через 5 мин?
 в) Через сколько минут в баке оказалось 20 л воды?
 г) На сколько литров меняется количество воды в баке за 1 мин?
 3) Какой процесс протекал быстрее — наполнение бака водой или вытекание воды из бака? Вычислите скорость, с которой вода вливалась в бак; вытекала из бака.

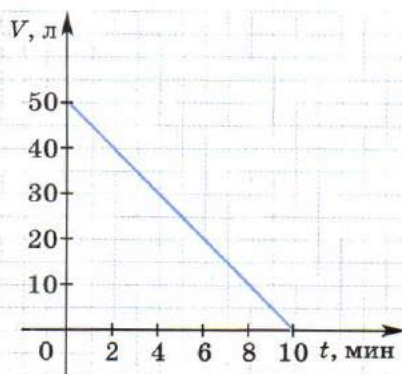


Рис. 5.8

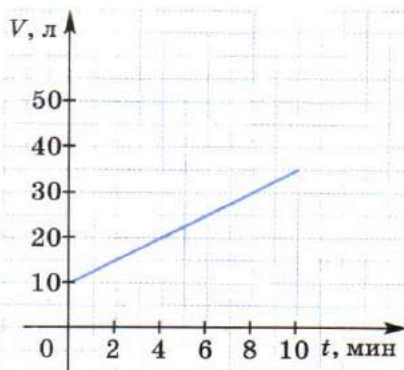


Рис. 5.9

731. Турист в течение 30 мин дошел от лагеря до озера, расположенного в 2 км от лагеря, и, пробыв там 40 мин, вернулся обратно. На всю прогулку он затратил полтора часа. На каком из графиков (рис. 5.10) изображена описанная ситуация? (На вертикальной оси отмечено расстояние туриста от лагеря.)

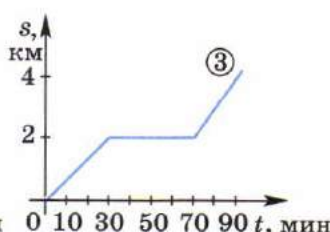
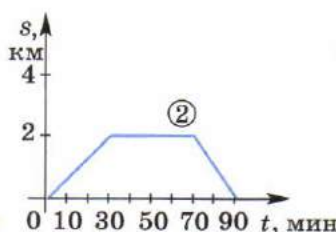
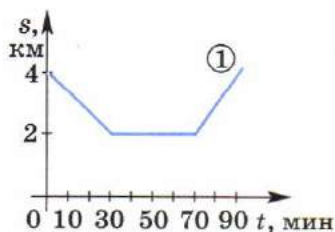


Рис. 5.10

732. Два человека крутят скакалку (рис. 5.11, а). Возьмем одну точку — середину скакалки (точку А) — и будем наблюдать, как меняется ее высота над землей в зависимости от времени. На рисунке 5.11, б изображен график, показывающий эту зависимость. Наблюдаемый нами процесс — периодический.

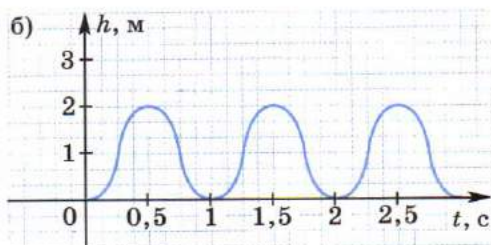
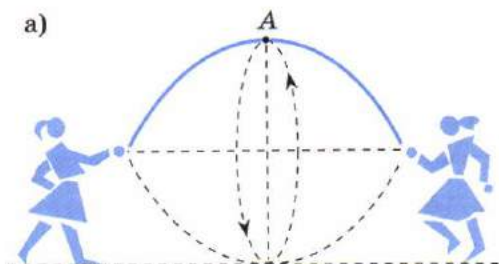


Рис. 5.11

Используя график, ответьте на вопросы:

- За какое время происходит один полный оборот скакалки?
- На какой высоте находится точка А через 0,5 с после начала вращения? через 1,25 с? через 2 с?
- В какие моменты времени точка А находится на высоте 1 м? Назовите все такие моменты, если скакалку продолжают крутить 10 с.
- В какие моменты времени точка А находится на высоте 2 м над землей? Сколько раз она окажется на этой высоте, если скакалку крутят 2 мин?

733. На рисунке 5.12 изображен график движения велосипедиста из пункта А в пункт В и график движения пешехода из пункта В в пункт А.

Ответьте на вопросы:

- Каково расстояние между пунктами А и В?
- Через сколько времени после начала движения велосипедист и пешеход встретились? Сколько километров к этому времени проехал велосипедист и прошел пешеход?
- Кто раньше прибыл в конечный пункт — велосипедист или пешеход? На сколько времени?

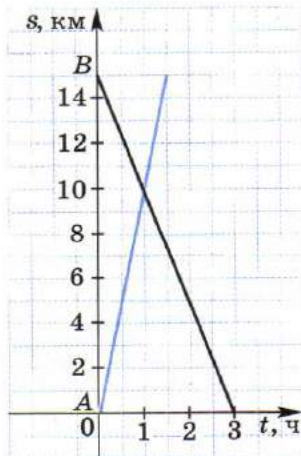


Рис. 5.12

г) Во сколько раз скорость велосипедиста больше скорости пешехода?

734. Олег и Петр соревновались на дистанции 200 м в 50-метровом бассейне. Графики их заплывов показаны на рисунке 5.13. По горизонтальной оси отложено время, а по вертикальной — соответствующее расстояние пловца от старта.

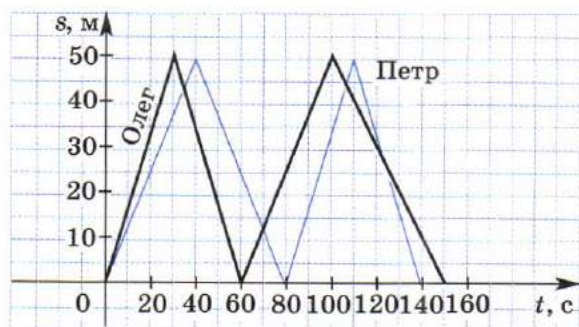


Рис. 5.13

1) Используя графики, ответьте на вопросы:

а) Сколько времени затратил каждый спортсмен на первые 50 м? на всю дистанцию?

б) Кто выиграл соревнование? На сколько секунд он обогнал соперника?

в) На сколько метров отстал проигравший от победителя к моменту его финиша?

2) Прокомментируйте подробно весь ход соревнования.

735. Используя графики, изображенные на рисунке 5.13, постройте в одной системе координат графики движения этих же спортсменов, отложив по горизонтальной оси время движения, а по вертикальной — расстояние, которое проплыл спортсмен с начала заплыва.

1) Определите по графику:

а) среднюю скорость движения каждого спортсмена на первой 100-метровке;

б) среднюю скорость движения каждого спортсмена на всей дистанции.

2) Объясните, что означают с точки зрения содержания задачи точки пересечения графиков на рисунке 5.13 и на вашем рисунке.

736. Яхта отошла от причала на берегу озера и в течение часа курсировала по озеру. Через час она вернулась к причалу. Максимальное удаление от причала составило 3 км.

- а) Начертите график, показывающий, как в течение этого часа могло меняться расстояние s (км) от яхты до причала, и прокомментируйте этот график.
- б) Используя свой график, постройте график движения яхты, отложив по горизонтальной оси время движения, а по вертикальной — пройденный яхтой путь.

5.2 Что такое функция

Рассматривая графики реальных зависимостей, вы не могли не заметить то общее, что присутствовало в каждом примере: мы всегда имели дело с двумя взаимосвязанными величинами; с изменением значений первой величины менялись и значения второй. В таких ситуациях одну величину называют *независимой*, а другую — *зависимой*.

Так, с течением времени изменялись рост мальчика, вес ребенка, пройденная бегом дистанция. В этих примерах время — независимая величина. Остальные величины, значения которых определялись значениями времени, зависимые. При построении графиков независимую величину мы всегда откладываем по горизонтальной оси, а зависимую — по вертикальной.

Зависимость между величинами может устанавливаться не только с помощью графика. И конечно, независимой величиной может быть не только время. Вы это увидите из следующих примеров.

■ Пример 1. Для перевода температуры, измеренной в градусах Цельсия, в градусы Фаренгейта пользуются формулой $F = \frac{9}{5}C + 32$,

где C — число градусов по шкале Цельсия, а F — число градусов по шкале Фаренгейта. Для каждого значения температуры по Цельсию с помощью этой формулы можно найти соответствующее значение температуры по шкале Фаренгейта. Например, нормальной температуре человека $36,6^\circ$ по шкале Цельсия соответствует температура $97,88^\circ$ по шкале Фаренгейта.

Эту зависимость можно изобразить и графически. Для этого достаточно

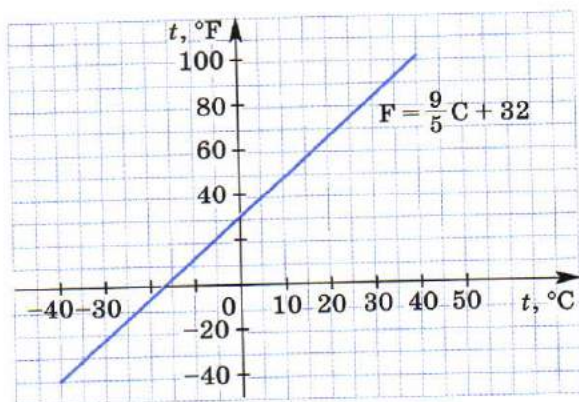


Рис. 5.14

построить график уравнения $F = \frac{9}{5}C + 32$ (рис. 5.14). (Объясните, почему этот график — прямая линия.)

В данном примере в качестве независимой величины рассматривается температура по шкале Цельсия, а в качестве зависимой — температура по шкале Фаренгейта. Так как числовые значения температур по Цельсию и Фаренгейту обозначены соответственно буквами C и F , то говорят также, что C — *независимая переменная*, а F — *зависимая переменная*.

■ Пример 2. В таблице, помещенной ниже, показано, как при нагревании воды меняется количество поваренной соли, которое может раствориться в 100 г воды без осадка. Здесь t — независимая переменная, а m — зависимая переменная. Каждому значению температуры t (в градусах Цельсия), равному 10, 20, 30, ..., 100, соответствует вполне определенное значение m — масса соли (в граммах).

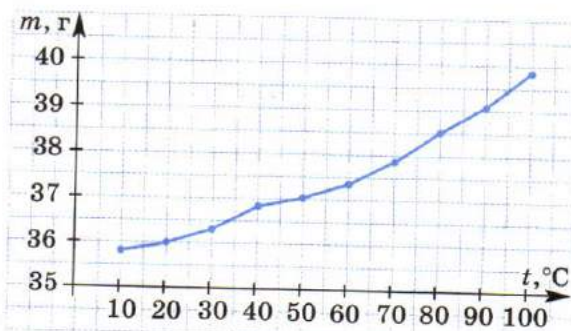


Рис. 5.15

$t, ^\circ\text{C}$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$m, \text{г}$	35,8	36,0	36,3	36,9	37,0	37,3	37,9	38,4	39,1	39,8

График зависимости m от t изображен на рисунке 5.15.

Изучение зависимостей между различными величинами составляет смысл многих наук. Средством описания всего многообразия реальных зависимостей на математическом языке служит понятие *функции*.

Главное в зависимости переменных состоит в том, что каждому значению независимой переменной некоторым образом — с помощью графика, таблицы, формулы или как-то иначе — поставлено в соответствие одно определенное значение зависимой переменной. В таких случаях для зависимой переменной в математике используют термин «функция».

Переменную y называют функцией переменной x , если каждому значению x из некоторого числового множества соответствует одно определенное значение переменной y .

Для независимой переменной тоже есть специальное название: ее называют *аргументом*.

Например, формула $y = x^2 - 2x$ задает переменную y как функцию переменной x : по этой формуле для любого значения аргумента x можно вычислить соответствующее значение функции y .

Формула $S = a^2$ задает площадь квадрата S как функцию его стороны a . Формула $s = 60t$ задает путь s , пройденный телом при равномерном движении, как функцию времени движения t .

Выбор букв, которыми обозначены переменные, вообще говоря, роли не играет. Однако в математике для обозначения аргумента и функции традиционно употребляют буквы x и y , а в задачах более конкретных — скажем, геометрических или физических — используются стандартные для этих наук обозначения длины, площади, скорости, времени и т. д.

Таким образом, функция — это переменная, значения которой определяются значениями другой переменной. В то же время в математике этот термин употребляется и в более широком смысле. Функцией часто называют не только одну из двух переменных, но и саму зависимость между ними, а также правило, по которому устанавливается соответствие между значениями аргумента и значениями функции. (Как мы уже видели, это правило может быть представлено разными способами — формулой, таблицей, графиком и т. д.)

Правило, по которому по данному значению аргумента находят соответствующее значение функции, принято обозначать какой-либо буквой. Чаще всего это буква f . Чтобы показать, что значения функции y получаются из значений аргумента x по правилу f , пишут: $y = f(x)$. (Читается: «Эф от икс».) Значение функции, соответствующее значению аргумента, равному, например, -3 , обозначают так: $f(-3)$.

■ Пример 3. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{5}{x+1}$. Найдём $f(1)$.

В данном случае функция задана алгебраическим выражением, поэтому $f(1)$ — это результат подстановки в него вместо x числа 1. Имеем

$$f(1) = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Обратите внимание: в формулу $f(x) = \frac{5}{x+1}$ вместо переменной x можно подставить любое число, кроме -1 . Иными словами, аргумент x не может принимать значение, равное -1 .

Все значения, которые может принимать аргумент, образуют область определения функции.

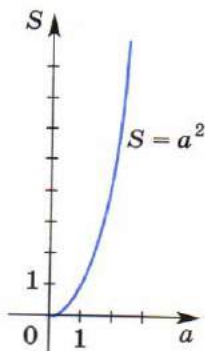


Рис. 5.16

Если функция задана формулой и ее область определения не указана, то считают, что она совпадает с областью допустимых значений аргумента. Например, областью определения функции $f(x) = x^2 - 2x$ является множество всех чисел. А областью определения функции $\varphi(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$ является множество всех чисел, кроме 0 и 2.

В то же время при рассмотрении конкретных задач область определения функции сужают, учитывая «происхождение» аргумента.

Например, в формулу $S = a^2$ вместо переменной a можно подставить любое число. Однако если речь идет о площади квадрата S как функции его стороны a , то областью определения этой функции является множество положительных чисел (рис. 5.16).

В заключение заметим, что само слово «функция» вы наверняка встречали в обычном языке в словосочетаниях типа: «В функции дежурного по классу входит...» или «В мои функции это не входит». Эти слова и математический термин «функция» очень близки по значению. В самом деле, слово «функция» происходит от латинского *functio* — «исполнение, служебная обязанность», так что его значение в русском языке в точности соответствует латинскому. А в математическом языке оно употребляется в переносном смысле, с элементом метафоры: функция «исполняет» инструкции. Например, равенство $f(x) = 2x - 1$ есть форма задания инструкции: значение аргумента x умножить на 2 и от результата отнять 1.

А

737. а) Автомобиль должен проехать 600 км. Двигаясь со скоростью v км/ч, он затратит на этот путь t ч. Задайте формулой время движения t как функцию скорости v . Найдите время движения, если скорость движения равна 40 км/ч; 60 км/ч; 80 км/ч. Найдите скорость движения, если время движения равно 5 ч; 6 ч; 8 ч.
- б) Бассейн наполняется водой с помощью насоса, через который вода поступает со скоростью 20 л в минуту. За t мин в бассейн наливается V л воды. Задайте формулой зависимость V от t . Найдите значение функции V при значении аргумента t , равном 5; 10; 12,5. Найдите значение аргумента t , которому соответствует значение функции V , равное 60; 150; 340.

738. а) Имелось 100 кг муки. Ежедневно расходовали 3 кг муки. Через x дней осталось y кг муки. Задайте формулой зависимость y от x . Найдите значение функции y при значении аргумента x , равном 3; 10; 33. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно 40; 55; 85. Укажите область определения функции.

б) Нужно купить карандаши по 5 р. за штуку. Всего имеется 50 р. После покупки n карандашей останется s р. Задайте формулой зависимость s от n . Составьте таблицу значений аргумента n и функции s . Постройте соответствующие точки в координатной плоскости. Сколько точек получилось? Какова область определения функции?

739. а) Число диагоналей p выпуклого многоугольника является функцией числа его вершин n . Задайте эту функцию формулой. Какова ее область определения? Заполните таблицу, в которой даны некоторые значения аргумента n и функции p :

n	5		10	
p		14		54

Проинтерпретируйте полученные результаты на геометрическом языке.

б) Среди учащихся восьмых классов школы провели шахматную олимпиаду, в которой каждый участник сыграл с каждым другим участником по одной партии. Число сыгранных партий r является функцией числа участников олимпиады m . Задайте эту функцию формулой. Какова область определения этой функции? Заполните таблицу:

m	5	6		
r			28	55

Как можно прокомментировать данные таблицы?

740. Найдите значение функции, заданной формулой:

а) $y = 3x + 5$ для значения аргумента, равного -2; -1; 0; 3;

б) $y = 2x^2 - 10x$ для значения аргумента, равного -1; 0; 2; 3;

в) $y = x^3 - 3$ для значения аргумента, равного -1; -2; 0; 1; 2;

г) $y = \frac{2}{3+x}$ для значения аргумента, равного -5; -1; 0; 5.

741. Дана функция $y = 1 - x^3$. Заполните таблицу:

x	-3			0		2	
y		9	2		0		-26

742. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 + 4$.

а) Как обозначить значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 10? 0? -8? Вычислите эти значения функции.

б) Используя функциональную символику, запишите следующее утверждение: если значение аргумента равно 5, то значение функции равно 29. Верно ли это утверждение?

в) Запишите на символическом языке утверждение: функция принимает равные значения при $x = -2$ и $x = 2$. Верно ли это утверждение?

743. (Задание с выбором ответа.) Дана функция $\varphi(x) = 1 - 3x^3$. Найдите $\varphi(2)$.

А. $\varphi(2) = 23$. Б. $\varphi(2) = 25$. В. $\varphi(2) = -25$. Г. $\varphi(2) = -23$.

744. Дана функция $f(x) = -\frac{1}{x} + 5$. Найдите:

а) $f(-1)$; б) $f\left(\frac{1}{4}\right)$; в) $f(-0,1)$; г) $f(2)$.

745. Известно, что $f(x) = 0,5x^2 - 4$. Сравните:

а) $f(-5)$ и $f(4)$; б) $f(1)$ и $f(-1)$; в) $f(\sqrt{8})$ и $f(-\sqrt{10})$.

746. Найдите значение аргумента, при котором:

а) функция $f(x) = -1,5x$ принимает значение, равное 9;

б) функция $f(x) = -5x - 20$ принимает значение, равное 15;

в) функция $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$ принимает значение, равное 2;

г) функция $f(x) = \frac{1}{x}$ принимает значение, равное 10.

747. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = 5x - 12$; в) $y = \frac{5}{x+1}$; д) $y = \frac{x}{4x^2 - 9}$;

б) $y = 2x^2 - 3x + 2$; г) $y = \frac{10}{4+x^2}$; е) $y = \frac{x^2 - 25}{10}$.

748. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x > 0 \\ 5, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Найдите значение этой функции при значении аргумента, равном -3; -2; 0; 0,1; 5.

749. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6, & \text{если } x \geq 3 \\ 6 - x^2, & \text{если } x < 3. \end{cases}$$

Найдите значение этой функции при значении аргумента, равном:

а) $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{10}$; б) $2 - \sqrt{3}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $2\sqrt{3}$.

750. Дана функция $f(x) = x^2 + 4$. Найдите: $f(a)$; $f(-a)$; $f(a + 1)$.

751. Даны функции $f(x) = \frac{x-5}{x+4}$ и $g(x) = 8 + \frac{1}{x}$. Покажите, что:

а) $f(-5) = g\left(\frac{1}{2}\right)$; б) $f(-2) < g(-0,1)$.

752. Существуют ли значения аргумента, при которых:

- а) функция $y = x^2 + 7x + 15$ принимает значение, равное 5;
- б) функция $y = x^2 - 1$ принимает значение, равное -4;
- в) функция $y = x^4 + 3x^2 - 1$ принимает значение, равное 3;
- г) функция $y = \frac{1}{3}x^3 + 1$ принимает значение, равное -10?

753. Найдите область определения каждой из функций:

а) $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{5}{\sqrt{x}}$; б) $y = \frac{1}{|x-2|}$ и $y = \frac{1}{|x|-2}$.

754. 1) Пусть символом $a(x)$ обозначено количество сестер человека по имени x , а символом $b(x)$ — количество его братьев.

- а) Найдите $a(x)$, $b(x)$, если x — это вы.
- б) Что означает запись $a(x) + b(x) + 1$? (x — это вы.)
- в) Найдите $a(x)$, $b(x)$ и $a(x) + b(x) + 1$, если x — это ваш сосед по парте.

2) Пусть $m(x)$ — мать человека x , $o(x)$ — отец человека x . Как называют человека, который закодирован символом:

- а) $o(m(x))$; б) $m(o(x))$; в) $m(m(x))$; г) $o(o(x))$?

755. Пусть $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x}$. Найдите:

- а) $f(4) - g(4)$; в) $f(g(100))$;
- б) $f(1) + g(1) + 1$; г) $g(f(19))$.

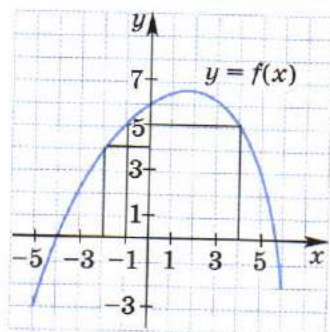


Рис. 5.17

Когда вы будете работать с графиками функций, вам постоянно придется иметь дело с числовыми промежутками. Например, на рисунке 5.17 изображен график функции $y = f(x)$, областью определения которой является отрезок от -5 до 6 . До сих пор числовые промежутки вы записывали с помощью неравенств. Однако существуют и другие способы обозначения промежутков, которые часто бывают более удобными.

Числовые промежутки

Название	Изображение	Неравенство	Обозначение
Отрезок		$a \leq x \leq b$	$[a; b]$
Интервал		$a < x < b$	$(a; b)$
Полуинтервал		$a < x \leq b$	$(a; b]$
		$a \leq x < b$	$[a; b)$
Замкнутый луч		$x \geq a$	$[a; +\infty)$
		$x \leq b$	$(-\infty; b]$
Открытый луч		$x > a$	$(a; +\infty)$
		$x < b$	$(-\infty; b)$

Обратите внимание на разницу обозначений отрезка и интервала, замкнутого луча и открытого луча: если граничная точка принадлежит промежутку, то это показывается с помощью квадратной скобки, если нет — ставится круглая скобка. Символы $+\infty$ и $-\infty$ читаются так: «плюс бесконечность» и «минус бесконечность».

Вы, конечно, увидели, что для интервала от a до b принято такое же обозначение, как и для точки с координатами a и b . Здесь

вы имеете дело с ситуацией, которая часто встречается и в обычном языке: слова-омонимы, такие, как «коса», «ключ», чрезвычайно распространены. Однако из контекста всегда можно понять, о чем идет речь.

Вернемся к графику функции, изображенному на рисунке 5.17. Каждой точке графика соответствует пара чисел: абсцисса точки — это значение аргумента, а ее ордината — соответствующее значение функции. С помощью этого графика по значению аргумента можно найти соответствующее значение функции $y = f(x)$ и, наоборот, по известному значению функции найти значения аргумента, которым оно соответствует.

Найдем, например, значение функции при $x = -2$. Для этого через точку оси x с абсциссой, равной -2 , проведем к этой оси перпендикуляр. Точка пересечения перпендикуляра с графиком функции имеет координаты $(-2; 4)$. Значит, $f(-2) = 4$.

Найдем теперь по графику значения аргумента, при которых значение функции равно 5. Для этого проведем через точку оси y с ординатой, равной 5, прямую, перпендикулярную этой оси. Эта прямая пересекает график функции в двух точках: $(-1; 5)$ и $(4; 5)$. Это означает, что значение, равное 5, функция принимает дважды: при $x = -1$ и при $x = 4$.

Пусть функция задана формулой $y = 4 - x^2$. Эту формулу можно рассматривать как уравнение с двумя переменными. График этого уравнения и является графиком функции $y = 4 - x^2$.

Чтобы построить этот график, составим таблицу, в которой укажем некоторые пары значений аргумента x и функции y .

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	-0,5	-1	-1,5	-2	-2,5	-3
y	4	3,75	3	1,75	0	-2,25	-5	3,75	3	1,75	0	-2,25	-5

Отметим точки, указанные в таблице, на координатной плоскости и соединим их плавной линией (рис. 5.18). Мы получили линию, название которой вам уже известно, — это парабола.

Обратите внимание: функция $y = 4 - x^2$ принимает одинаковые значения при противоположных значениях аргумента, поэтому можно было бы сократить таблицу и использовать при построении графика симметрию относительно оси y .

Не всякое уравнение с двумя переменными задает функцию. Возьмем, например, уравнение $y^2 = x$. Его графиком является парабола, изображенная на рисунке 5.19. Проведем к оси x перпендику-

ляр через точку с абсциссой 4. Он пересечет параболу в двух точках: $(4; 2)$ и $(4; -2)$, т. е. одному значению x , равному 4, в этом случае соответствуют сразу два значения y . Значит, это не функция.

Этот вывод можно было бы сделать и не обращаясь к графику. В самом деле, из уравнения $y^2 = x$ однозначно выразить y через x невозможно.

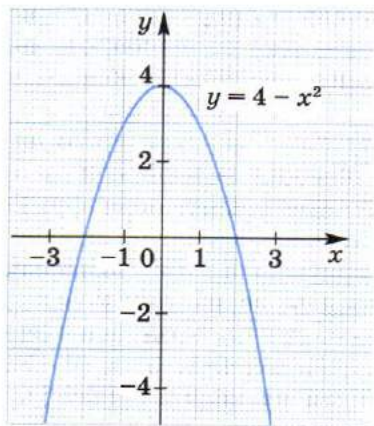


Рис. 5.18

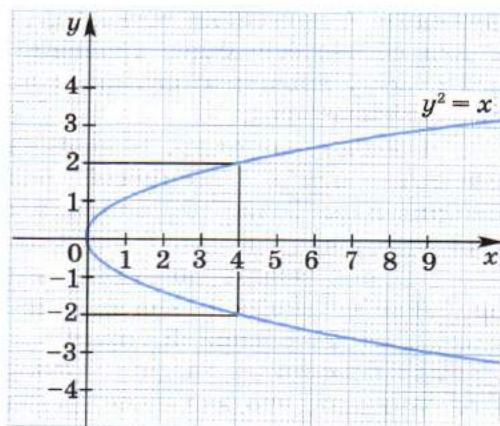


Рис. 5.19



756. Изобразите указанный промежуток на координатной прямой и запишите его обозначение:

- а) $-3 \leq x \leq 2$; г) $x \geq 4$;
 б) $-8 < x < 0$; д) $x \leq 5$;
 в) $-5 \leq x < 5$; е) $x < 0$.

757. На рисунке 5.20 изображен график некоторой функции. Найдите по этому графику:

- а) значение функции, соответствующее значению аргумента, равному -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 4 ;
 б) значение аргумента, при котором значение функции равно -3 ; -1 ; 0 ; 1 ; $1,5$.

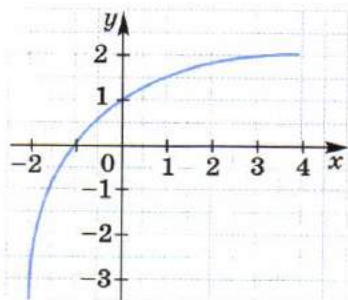


Рис. 5.20

758. На рисунке 5.21 изображен график функции $y = f(x)$. Найдите по этому графику:

- а) $f(0)$; $f(-3)$; $f(1)$;
 б) значения x , при которых $f(x) = 2$;
 $f(x) = 0$; $f(x) = -3$.

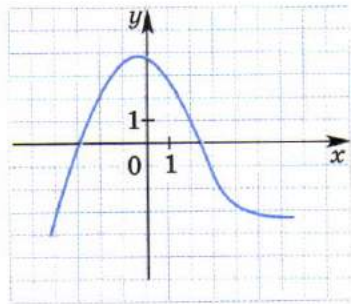


Рис. 5.21

759. Маша посадила подсолнух и в течение 12 недель вела наблюдение за его ростом, измеряя длину стебля в конце каждой недели. Результаты ее наблюдений представлены в следующей таблице:

t , нед.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
h , см	20	37	73	100	140	175	200	225	240	250	255	260

Постройте график функции $h = f(t)$, где t — время (нед.), h — длина стебля (см). Используя график, ответьте на вопросы:

- а) Какой примерно была длина стебля через 3,5 недели? через 6,5 недели?
 б) Примерно на какой день длина стебля достигла 50 см; 210 см?
 в) В какую неделю подсолнух рос быстрее всего, а в какую — медленнее всего?
 г) Когда рост растения был интенсивнее — в первые четыре недели или в следующие четыре недели?
 д) Когда подсолнух перерос Машу, если ее рост 152 см?

760. Велосипедист въехал на небольшую гору. За первую минуту он преодолел при подъеме 250 м, за вторую минуту — 200 м, за третью минуту — 150 м, за четвертую минуту — 130 м, за пятую минуту — 100 м, за шестую минуту — 80 м. Расстояние s (в метрах), на котором находился велосипедист от основания горы, является функцией времени движения t (в минутах). Постройте график этой функции. Используя график, ответьте на вопросы:

- а) На каком примерно расстоянии от подножия горы находился велосипедист через 2,5 мин? через 4,5 мин? через 6 мин?
 б) За какое примерно время он преодолел расстояние, равное 350 м; равное 800 м?

761. а) На рисунке 5.22 изображен график некоторой функции. Составьте по графику таблицу значений функции на промежутке $[-1; 2]$ с шагом 0,5. Воспроизведите этот график в тетради.

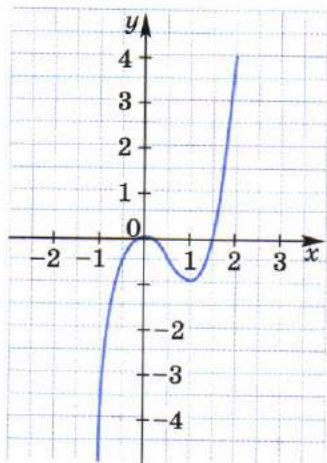


Рис. 5.22

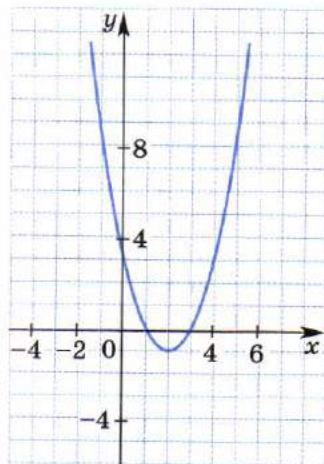


Рис. 5.23

б) Функция задана графиком (рис. 5.23). Составьте таблицу значений функции на промежутке $[-1; 5]$ с шагом 0,5. Воспроизведите этот график в тетради.

- 762.** Составьте таблицу значений функции и постройте ее график:
- $y = x^2 - 1$, где $-3 \leq x \leq 3$;
 - $y = 5 - x^2$, где $-4 \leq x \leq 4$.
- 763.** Постройте график функции:
- $y = x^2 - 2x$, где $-2 \leq x \leq 4$;
 - $y = -x^2 - 2x + 2$, где $-4 \leq x \leq 2$.
- 764.** а) Какие из точек $(-1; 10)$, $(0; 4)$, $(2; -1)$, $(3; -2)$ принадлежат графику функции $y = -3x + 7$? Запишите координаты еще двух каких-либо точек, одна из которых принадлежит этому графику, а другая нет.
- б) Какие из точек $A(0; -5)$, $B(-1; 3)$, $C(-3; 23)$, $D(2; -3)$ принадлежат графику функции $y = 2x^2 + 1$? Запишите координаты еще двух каких-либо точек, одна из которых принадлежит этому графику, а другая нет.
- 765.** Пересекает ли график функции ось x , и если пересекает, то в каких точках:
- $y = x^2 + x - 12$;
 - $y = x^2 + x + 1$;
 - $y = x - x^3$;
 - $y = x^4 + 1$?
- 766.** В каких точках график функции пересекает координатные оси:
- $y = 20x + 75$;
 - $y = -8x + 1$;
 - $y = x^2 - 16$;
 - $y = 2 - x^2$?

767. (Задание с выбором ответа.) Известно, что значение функции $y = f(x)$ равно 0 при значениях аргумента, равных 2 и -3. Какое из следующих высказываний верно?

- А. График функции пересекает ось y в точках (0; 2) и (0; -3).
- Б. График функции пересекает ось x в точках (2; 0) и (-3; 0).
- В. $f(2) = -3$.

768. Дана функция $y = f(x)$. Известно, что $f(5) = 0$ и $f(0) = -4$. Сформулируйте эти факты на геометрическом языке.

769. Функции заданы формулами

$$y = x^2 + 5, \quad y = x^2 + 5x, \quad y = \frac{x}{x+1}, \quad y = \frac{x+1}{x}.$$

В каждом случае определите, проходит ли график функции через начало координат. Задайте формулой еще какую-нибудь функцию, график которой проходит через начало координат.

770. Какие из графиков (рис. 5.24) могут служить графиками функций?

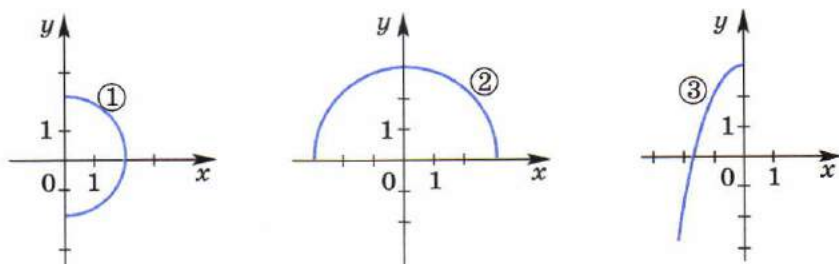


Рис. 5.24

771. Составьте таблицу значений функции и постройте ее график:

- а) $y = x^3 - 3x$; б) $y = 3x^2 - x^3$.

772. а) Постройте график функции, заданной формулой $y = x^2 + 1$.
б) Начертите кривую, симметричную этому графику относительно оси x . Эта кривая — график некоторой функции. Задайте эту функцию формулой.

773. Докажите, что график функции:

- а) $y = 3x^2 + 4$ целиком расположен в верхней полуплоскости;
- б) $y = \frac{x^2 + 5}{x - 5}$ не пересекает ось x ;
- в) $y = 3 - \frac{1}{x}$ не пересекает ось y .

774. На рисунке 5.25 изображены графики функций

$$y = \frac{1}{x^2+1}, \quad y = -\frac{1}{x^2+1}, \quad y = \frac{3}{x^2+1} \quad \text{и} \quad y = -\frac{3}{x^2+1}.$$

Для каждого графика укажите соответствующую формулу.

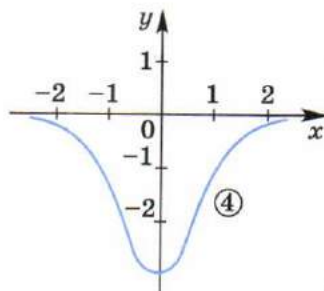
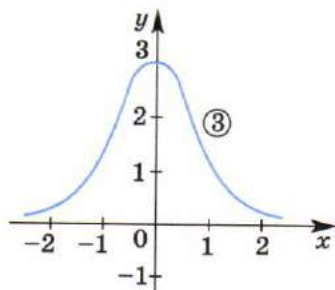
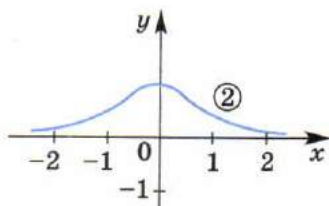
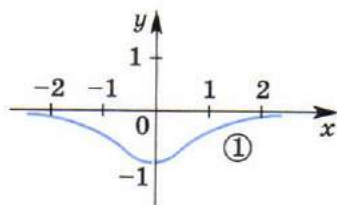


Рис. 5.25

775. а) На рисунке 5.26 изображен график функции

$$y = x^3 + 3x^2 - x - 3.$$

Найдите координаты точек A, B и C.

б) На рисунке 5.27 изображен график функции $y = x^4 - 6x^2 + 5$.

Найдите координаты точек A, B, C и D.

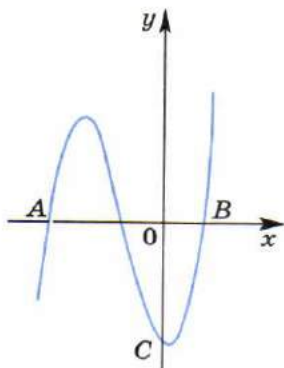


Рис. 5.26

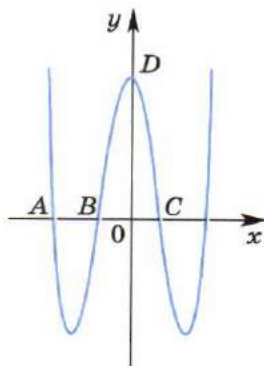


Рис. 5.27

5.4 Свойства функций

Вспомним, как мы считываем информацию с графиков реальных зависимостей. Например, если мы имеем дело с графиком температуры (см. рис. 5.6), то ищем на нем верхнюю и нижнюю точки — в результате узнаем наибольшее и наименьшее значения температуры. Кроме того, смотрим, где график располагается выше горизонтальной оси, а где — ниже. Тем самым получаем информацию о том, когда температура была положительной, а когда — отрицательной. Наконец, нас интересуют промежутки, на которых график поднимается вверх или опускается вниз — им соответствуют периоды повышения и понижения температуры.

Точно так же график всякой функции, являясь ее геометрическим изображением, наглядно отражает все ее свойства. На рисунке 5.28 изображен график функции $y = f(x)$, областью определения которой является промежуток $[-4; 8]$. Посмотрим, о каких свойствах этой функции говорит ее график.

У графика есть нижняя точка и верхняя точка. Значит, у функции $y = f(x)$ есть *наибольшее и наименьшее значения*. Наименьшее значение этой функции равно -3 , а наибольшее значение равно 5 .

В точках с абсциссами -2 и 4 график пересекает ось x . А это означает, что $f(x) = 0$ при $x = -2$ и $x = 4$. Значения аргумента, при которых функция обращается в нуль, называют *нулями функции*. В данном случае нули функции — это числа -2 и 4 .

При $-4 < x < -2$ и при $4 < x < 8$ график расположен выше оси абсцисс, а при $-2 < x < 4$ он расположен ниже оси абсцисс. Значит, на промежутках $(-4; -2)$ и $(4; 8)$ значения функции *положительны*, а на промежутке $(-2; 4)$ значения функции *отрицательны*.

Если двигаться по оси x слева направо, то можно увидеть, что с увеличением x от -4 до 2 график функции «идет вниз», т. е. значения функции уменьшаются. Говорят, что на промежутке $[-4; 2]$ функция *убывает*. С увеличением x от 2 до 6 график «идет вверх», т. е. значения функции увеличиваются. Говорят, что на промежутке $[2; 6]$ функция *возрастает*. На промежутке $[6; 8]$ функция снова убывает.

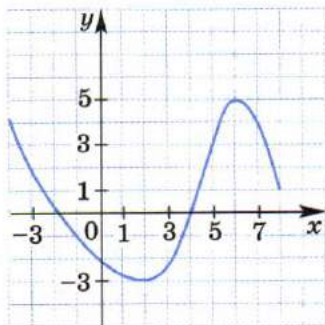


Рис. 5.28

На рисунке 5.29 изображен график некоторой функции. Как видим, эта кривая при движении слева направо все время поднимается вверх. Функция возрастает на всей области определения. Такие функции называют *возрастающими*. Функции, которые убывают на всей области определения, называют *убывающими*.

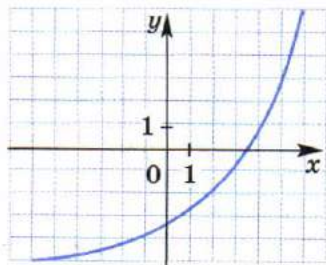


Рис. 5.29

A

776. На рисунке 5.30 изображен график функции $y = f(x)$, областью определения которой является отрезок $[-2; 2]$. Используя график, ответьте на вопросы:

- 1) Есть ли у функции наибольшее или наименьшее значение, и если есть, то чему оно равно? При каком значении аргумента функция принимает это значение?
- 2) Укажите нули функции.
- 3) Укажите промежутки, на которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения.
- 4) Укажите промежутки, где функция возрастает; убывает.

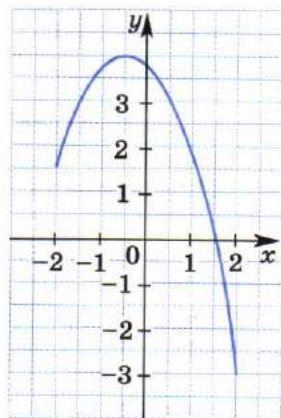


Рис. 5.30

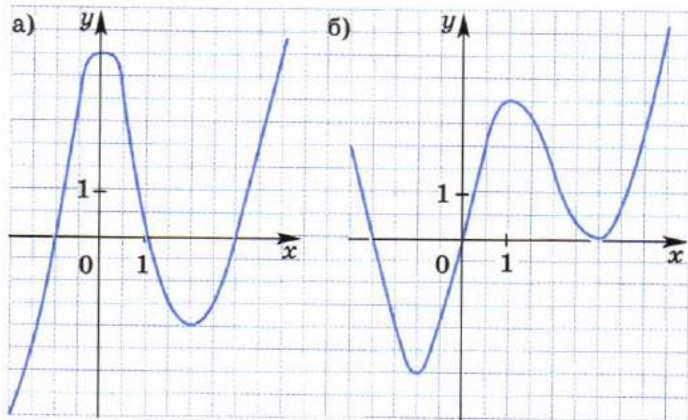


Рис. 5.31

777. На рисунке 5.31 изображены графики функций, определенных на множестве всех чисел. Какие свойства каждой из функций можно выяснить с помощью ее графика?

778. Нулями функции $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$ являются числа -3 ; 5 ; $0,5$. Убедитесь в справедливости этого утверждения. Сформулируйте этот факт другими способами, используя слова «график», «значение функции», «уравнение».
779. Среди графиков, изображенных на рисунке 5.32, найдите график функции, которая возрастает при $x \leq 2$ и убывает при $x \geq 2$.

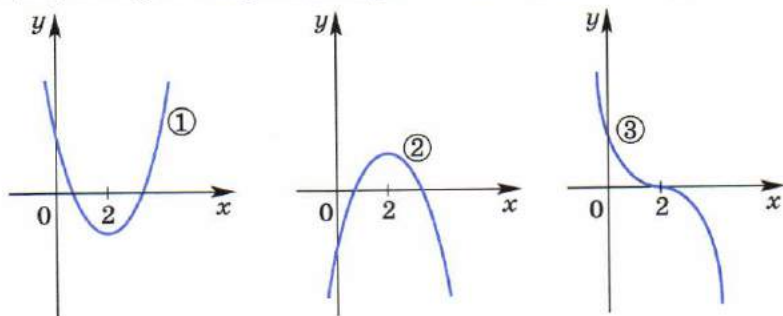


Рис. 5.32

Найдите нули функции (780—781):

780. а) $y = x^2 - 2x - 8$; в) $y = 3x^2 + x - 2$;
 б) $y = x^2 - 9x$; г) $f(x) = 10 - x^2$.
781. а) $f(x) = (x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$; в) $f(x) = 10x^4 - 250x^2$;
 б) $f(x) = x^2(x + 0,5)(2x - 3)$; г) $y = 3x^3 - 108x^2$.
782. Начертите график какой-нибудь функции, нулями которой являются числа:
 а) $-3,5$; 0 ; 4 ; б) -5 ; -1 ; $2,5$; $4,5$.
 Для каждой функции укажите промежутки, на которых ее значения положительны; отрицательны.
783. Постройте график функции и прочитайте по графику ее свойства:
 а) $y = x^2$; б) $y = -x^3$; в) $y = |x|$; г) $y = \sqrt{x}$.



784. Начертите график какой-нибудь функции, обладающей следующими свойствами:
 а) при $x \geq -1$ функция возрастает, а при $x \leq -1$ функция убывает; нулями функции являются числа -2 и 1 ;
 б) функция возрастает при $x \leq 2$ и при $5 \leq x \leq 7$; убывает при $2 \leq x \leq 5$ и при $x \geq 7$; при $x = 2$ она принимает наибольшее значение;

в) значения функции положительны при $x < -3$ и при $x > 5$; отрицательны при $-3 < x < 5$; при $x = 0$ она принимает наименьшее значение.

785. Найдите нули функции:

а) $y = 5x - x^3$; г) $y = x^3 - x^2 + x - 1$;

б) $y = 2x^3 - 6x^2 - 8x$; д) $y = 8x^4 - 125x$;

в) $y = x^3 - x^2 - x + 1$; е) $y = 2x^5 + 54x^2$.

786. На рисунке 5.33 построены графики квадратных трехчленов: $f(x) = x^2 - 4x + 4$, $g(x) = x^2 - 2x + 4$, $h(x) = 2x^2 - 6x + 4$. Соотнесите каждый график с формулой.

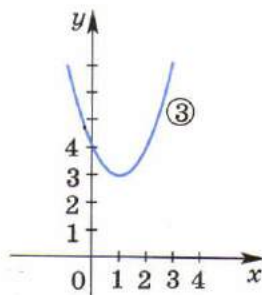
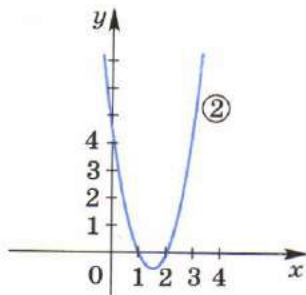
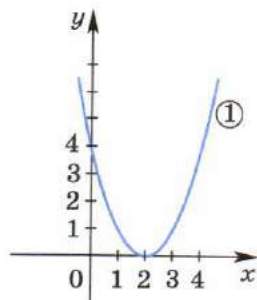


Рис. 5.33

787. Задайте формулой какую-нибудь функцию, нулями которой являются числа:

а) $-3; 1; 7$; б) $-4; \frac{5}{2}; \frac{1}{3}$.

788. График какой из функций изображен на рисунке 5.34?

$f(x) = 2(x + 2)(x - 1)(x - 3)$,

$g(x) = 2(x + 2)(1 - x)\left(x - \frac{7}{2}\right)$,

$h(x) = 2(x + 2)(x - 1)\left(x - \frac{7}{2}\right)$,

$p(x) = (x + 2)(x - 1)\left(x - \frac{7}{2}\right)$.

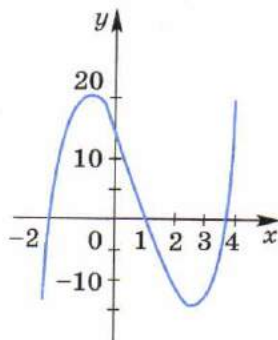


Рис. 5.34

789. Постройте график функции и перечислите ее свойства:

а) $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } |x| \leq 1 \\ 1, & \text{если } |x| > 1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -8, & \text{если } x < -2 \\ x^3, & \text{если } -2 \leq x \leq 2 \\ 8, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

■ Пример 1. На стоянке такси висит табличка:

Посадка — 10 р.
Поездка — 20 р./км

Обозначим стоимость поездки (в р.) через c , а расстояние (в км) через s . Зависимость стоимости c от расстояния s выражается формулой

$$c = 20s + 10.$$

■ Пример 2. Если тело движется с постоянным ускорением $0,2 \text{ см/с}^2$, а его начальная скорость равна 4 см/с , то зависимость скорости движения v (в см/с) от времени движения t (в с) выражается формулой

$$v = 4 + 0,2t.$$

■ Пример 3. В баке легкового автомобиля 50 л бензина. На каждый километр пути в среднем расходуется $0,07 \text{ л}$. Количество литров бензина r , которое останется в баке после $s \text{ км}$ пути, выражается формулой

$$r = 50 - 0,07s.$$

Формулы, которые мы сейчас записали, по существу различаются только буквами и числовыми коэффициентами. А по структуре они одинаковы.

Таким образом, величины совсем разной природы фактически связаны между собой одной и той же зависимостью. Эти, а также многие другие процессы описываются *линейной функцией*, которая является их общей математической моделью.

Функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + l$, где k и l — некоторые числа, называется линейной.

Линейная функция — самая простая модель описания реальных процессов. Вы наверняка уже поняли, что представляет собой ее график. Так как геометрический образ линейного уравнения $y = kx + l$ на координатной плоскости — это прямая, то

| графиком линейной функции является прямая.

Если $l = 0$, то мы получаем формулу $y = kx$. График функции $y = kx$ — это прямая, проходящая через начало координат.

Если $k > 0$, то линейная функция является возрастающей (рис. 5.35, а). Если $k < 0$, то линейная функция является убывающей (рис. 5.35, б).

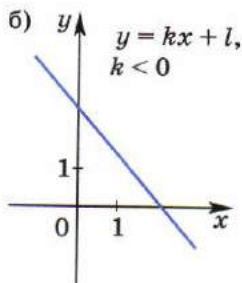
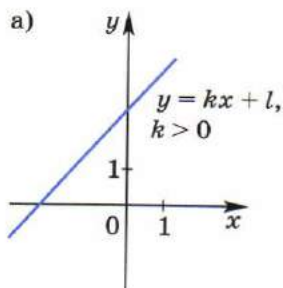


Рис. 5.35

Многие известные вам реальные процессы описываются этим видом линейной функции. Так, зависимость стоимости ткани p от ее длины l выражается формулой $p = cl$, где c — цена одного метра ткани. Зависимость массы тела m от его объема V выражается формулой $m = \rho V$, где ρ — плотность.

Зависимость пути s , пройденного телом с постоянной скоростью за время t , выражается формулой $s = vt$.

Во всех приведенных примерах величины связаны прямо пропорциональной зависимостью. Поэтому и линейную функцию $y = kx$, где $k \neq 0$, называют *прямой пропорциональностью*.

Если $k = 0$, то формула $y = kx + l$, задающая линейную функцию, имеет вид $y = l$. Такая линейная функция принимает одно и то же значение при любом x . Она называется *постоянной функцией* или *константой* (от латинского слова constants — постоянная). График постоянной функции, как вы можете понять, это прямая, параллельная оси x (или сама ось x).

Выясним важное свойство линейной функции. Для этого обратимся к уже знакомому вам графику роста мальчика с рождения до 12 лет (см. рис. 5.1). Возьмем фрагмент этого графика, показывающий, как рос мальчик с 6 до 10 лет (рис. 5.36, а).

Из графика видно, что скорость его роста не была постоянной: в первые два года он рос быстрее, чем в следующие два. С 6 до 8 лет он вырос на 12 см, а с 8 до 10 лет — только на 6 см.

А как выглядел бы график, если бы с 8 до 10 лет мальчик рос с такой же скоростью, как и с 6 до 8 лет? Нетрудно догадаться, что в этом случае вместо ломаной, состоящей из двух звеньев, мы получили бы отрезок прямой (рис. 5.36, б). Вообще

любой процесс, протекающий с постоянной скоростью, описывается линейной функцией.

И все точки графика, изображающего этот процесс, лежат на прямой.

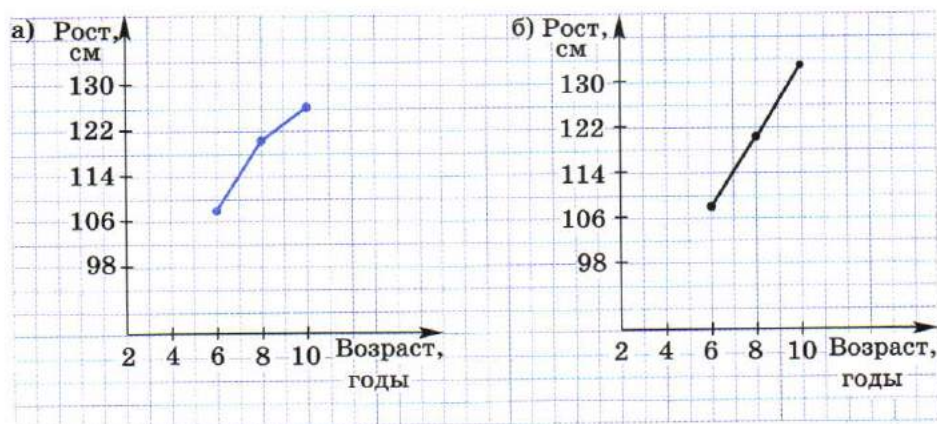


Рис. 5.36

Линейную функцию часто используют в статистике. Например, понятно, что нет жесткой связи между весом и ростом человека — ведь и при одинаковом росте вес может быть разным. Но все же общая тенденция такова: чем выше человек, тем больше его вес.

На рисунке 5.37 представлены данные о весе и росте двадцати мужчин. По оси абсцисс отложен рост (в см), а по оси ординат — вес (в кг).

Хотя точки достаточно разбросаны, все же можно провести прямую, около которой группируется значительная их часть. Это мож-

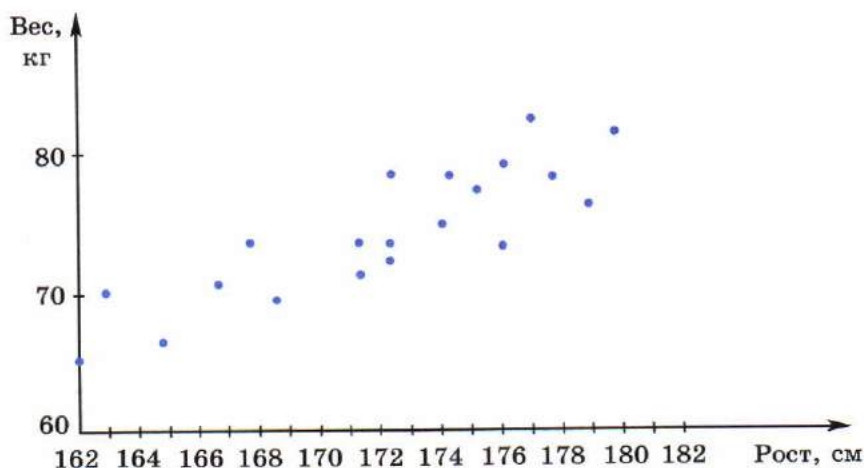


Рис. 5.37

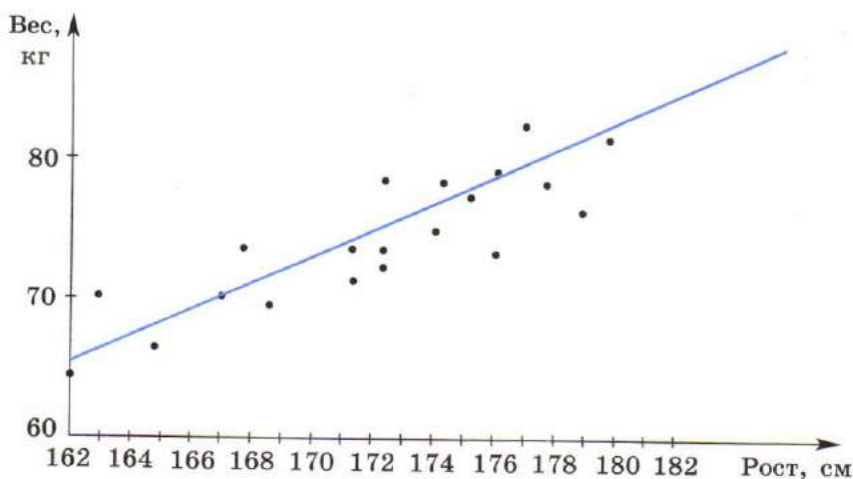


Рис. 5.38

но сделать, просто приложив к чертежу линейку и расположив ее при этом каким-либо подходящим способом (рис. 5.38).

Проведенная прямая позволяет, например, прогнозировать наиболее типичный вес при данном росте мужчины.

Такие прямые часто называют *аппроксимирующими* (от латинского слова *proxima* — приближение). Заметим, что в математике существуют специальные методы расчетов аппроксимирующих прямых, однако и прием, с которым вы познакомились, дает вполне разумное приближение.

- 790.** Сумма углов выпуклого многоугольника, имеющего n сторон, вычисляется по формуле $M = 180n - 360$. Объясните, почему эта функция является линейной. Укажите область определения функции. Возрастающей или убывающей является функция? Найдите сумму углов выпуклого многоугольника при $n = 3$; 4; 10.
- 791.** Николай заработал в каникулы 1000 р., работая на почте. Он потратит эти деньги в среднем по 25 р. в день. Запишите формулу, выражающую зависимость оставшейся у него суммы денег y от числа прошедших дней x . Объясните, почему эта функция является линейной. Укажите область определения функции. Возрастающей или убывающей является функция? Найдите значение функции при $x = 1$; 10; 25. В каждом случае объясните с точки зрения условия, что вы находите.

792. Дана линейная функция $f(x) = 100x - 2$.
 а) Найдите $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(0,3)$, $f(-2,4)$.
 б) Найдите значение x , при котором $f(x) = 100$, $f(x) = -1$, $f(x) = 0$, $f(x) = -5$.
793. Найдите значение линейной функции $f(x) = -3x + 0,5$ при указанных значениях аргумента и заполните таблицу:

x	-2,5	-1	0	1,5	8	10
$f(x)$						

794. Постройте график линейной функции. В каждом случае укажите:

- 1) возрастающей или убывающей является функция;
 2) при каких значениях x значения функции равны 0; больше 0; меньше 0.

- а) $y = -0,3x + 2$; в) $y = -0,7x$; д) $y = 1,5x - 2$;
 б) $y = -2x + 1,5$; г) $y = 1,2x$; е) $y = -0,5x - 1$.

795. Постройте график функции:

- а) $y = 3x - 1$, где $-3 \leq x \leq 3$;
 б) $y = -2x + 4$, где $x \geq 0$;
 в) $y = 0,5x + 3$, где $-6 \leq x \leq 2$;
 г) $y = -3x - 2$, где $x \leq -\frac{2}{3}$.

796. На рисунке 5.39 изображены графики линейных функций. Соотнесите каждую из них с одной из формул:

$$y = 2x + 3; \quad y = -2x; \quad y = \frac{1}{2}x + 3; \quad y = -2x + 3.$$

797. В одной системе координат постройте графики линейных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и определите значения x , при которых $f(x) = g(x)$; $f(x) > g(x)$; $f(x) < g(x)$:

а) $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$;

б) $f(x) = x + 3$, $g(x) = -\frac{1}{3}x$.

798. а) У вас имеется 10 р. и есть два способа увеличивать эту сумму: ежедневно добавлять к ней 5 р. или ежедневно добавлять к ней 2 р. Составьте для каждого случая формулу зависимости имеющейся суммы денег y от числа дней x . В каком случае сумма будет увеличиваться быстрее? В одной системе координат постройте прямые, которым принадлежат точки графика каждой из функций, и отметьте эти точки для $1 \leq x \leq 7$.

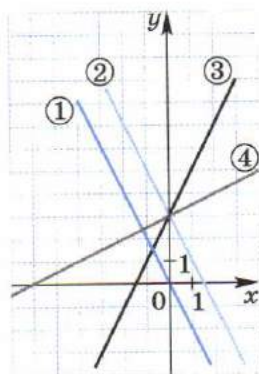


Рис. 5.39

б) Андрей планирует поработать во время летних каникул, и у него есть две возможности. На работе *A* он будет получать 50 р. в день. На работе *B* он в первый день получит 25 р., а затем ежедневно будет получать 50 р. Какой вариант выгоднее? Составьте формулу зависимости полученной суммы денег y от числа рабочих дней x для вариантов *A* и *B*. В одной системе координат постройте прямые, которым принадлежат точки графика каждой из функций, и отметьте эти точки для $1 \leq x \leq 5$. Существуют ли значения x , при которых значения y равны?

799. На рисунке 5.40 изображен график некоторого процесса. Какая часть графика соответствует:
- самому быстрому росту;
 - самому медленному росту;
 - самому быстрому убыванию;
 - самому медленному убыванию;
 - нулевой скорости изменения?

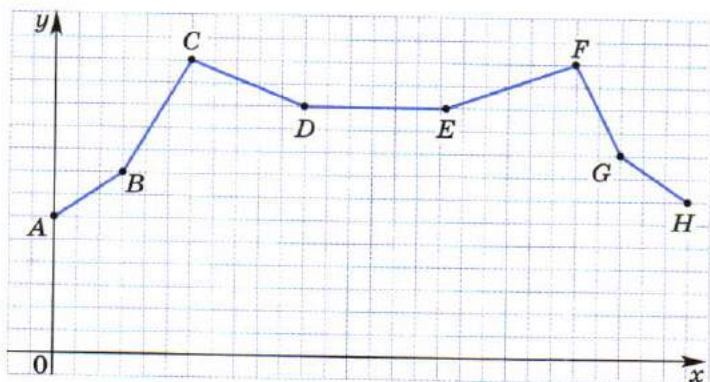


Рис. 5.40

800. На рисунке 5.41 изображен график следующего процесса: ванну наполнили водой и через некоторое время воду слили. Опишите по графику, как протекал процесс. Для каждого прямолинейного участка графика определите, с какой скоростью наливалась или выливалась вода.

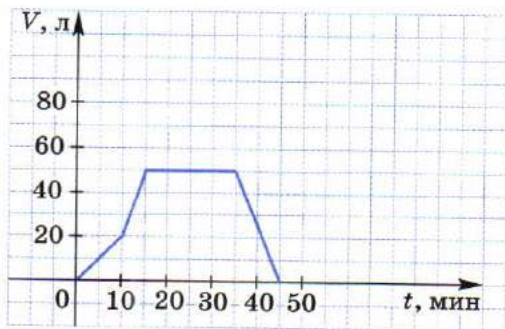


Рис. 5.41

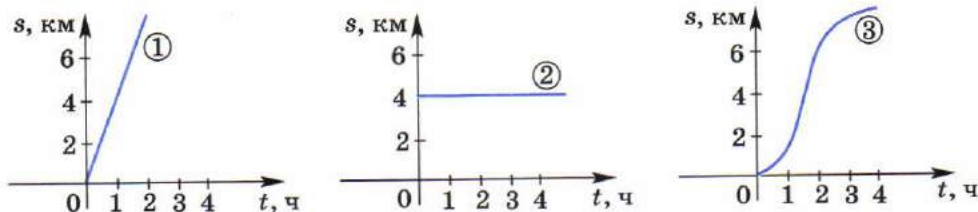


Рис. 5.42

801. На каком из рисунков (рис. 5.42) изображен график движения пешехода, который шел с постоянной скоростью? Найдите скорость движения этого пешехода.
802. Изобразите график описанного процесса: «Альпинист поднимается по отвесной скале. Он начал подъем на высоте 4 м от земли. В течение 3 мин он поднимался со скоростью 0,5 м/мин, затем в течение 2 мин спускался со скоростью 0,3 м/мин, а затем в течение 2 мин поднимался со скоростью 1,5 м/мин».
803. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & \text{если } x \leq 0 \\ 2x, & \text{если } x > 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leq 1 \\ 2x, & \text{если } x > 1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \leq 0 \\ -x+1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} -x-1, & \text{если } x \leq 1 \\ -2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

Б

804. Муравей ползет по шесту для флага, воткнутому вертикально в землю. Длина шеста 4 м. Муравей начал свой путь в 20 см от земли и ползет вверх с постоянной скоростью 40 см/мин.
- а) Задайте формулой расстояние s , на котором находится муравей от земли, как функцию времени его движения t .
- б) Укажите область определения этой функции.
- в) Постройте график функции, выбрав удобные единицы на осях.
- г) Определите по графику, на какой высоте от земли муравей будет через 3 мин и через сколько минут он доползет до вершины шеста.
805. Скорость звука в воздухе примерно 0,3 км/с. Во время грозы вы сначала видите молнию и лишь через некоторое время слышите гром. Задайте формулой функцию $y = f(x)$, где:
- а) y — расстояние, на котором вы находитесь от места удара молнии, x — время между вспышкой молнии и громом;

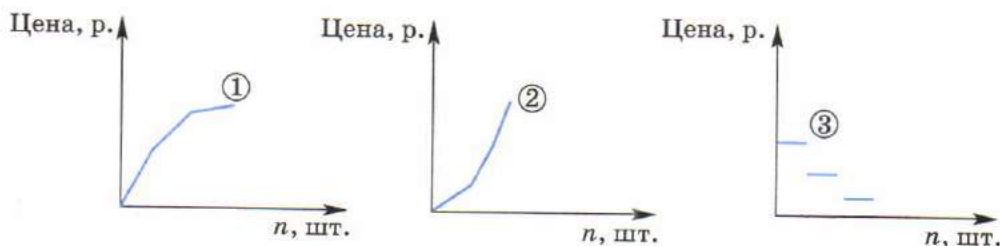


Рис. 5.43

б) y — время между вспышкой молнии и громом, x — расстояние, на котором вы находитесь от места удара молнии. Постройте график каждой функции.

806. Оптовый магазин продает тетради, устанавливая цену одной тетради таким образом: при покупке от 1 до 50 тетрадей — 2 р. за тетрадь, следующие 50—100 тетрадей — 1,5 р. за тетрадь и, наконец, каждая тетрадь сверх 100 штук — 1 р. за тетрадь. Какой из графиков (рис. 5.43) может быть использован для определения стоимости покупки n тетрадей?

807. Постройте график функции:

$$\text{а) } y = \begin{cases} -\frac{x}{3}, & \text{если } x \leq -1 \\ \frac{1}{3}, & \text{если } -1 < x \leq 1 \\ \frac{x}{3}, & \text{если } x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} \frac{x-2}{2}, & \text{если } x \leq -2 \\ -2, & \text{если } -2 < x \leq 2 \\ \frac{x-6}{2}, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

808. На рисунке 5.44 построен график функции

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 3, & \text{если } x \leq 2 \\ x - 4, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Стрелка, поставленная на одном из лучей, означает, что точка $(2; -2)$ не принадлежит графику. Ответьте на вопросы:

- Какова область определения функции?
- Чему равно значение функции при $x = -1; 0; 1; 2; 3$?
- Сколько нулей имеет функция?
- На каких промежутках функция возрастает? убывает?
- На каких промежутках функция положительна? отрицательна?

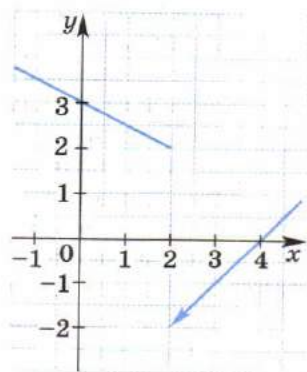


Рис. 5.44

809. Постройте график функции и опишите ее свойства:

а) $y = \begin{cases} 2x + 3, & \text{если } x \geq 0 \\ -x + 1, & \text{если } x \leq 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 1 - 3x, & \text{если } x \leq 1 \\ x + 2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

810. а) Самолет начал снижение на высоте 8500 м. На графике (рис. 5.45) показано изменение его высоты над землей в первые 20 мин снижения. Перечертите график в тетрадь и подберите прямую, вокруг которой укладываются эти точки. Определите, сколько примерно минут длилось снижение самолета и какова была средняя скорость снижения (в м/мин).

б) На графике (рис. 5.46) показаны данные о числе туристов, для которых фирма «Отпуск» организовала путешествие за период с 1998 по 2008 г. Перечертите этот график в тетрадь и проведите прямую, аппроксимирующую эти данные. Если эта тенденция сохранится, то сколько путешествий можно ожидать в 2010 г.?

811. Для каких из изображенных на рисунке 5.47, а—г множеств точек можно подобрать аппроксимирующую прямую, а для каких нельзя?

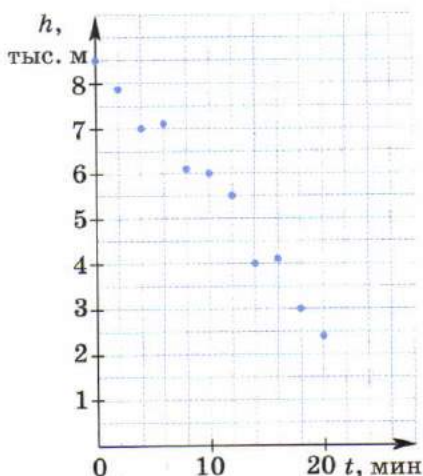


Рис. 5.45

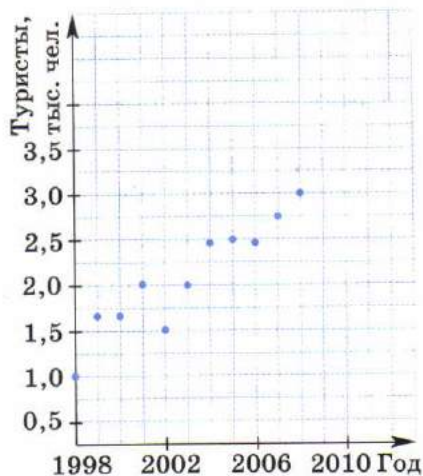


Рис. 5.46

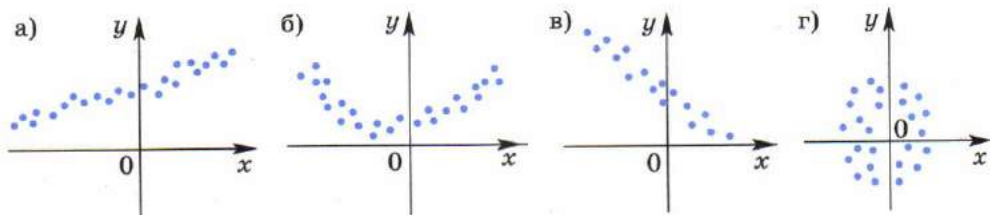


Рис. 5.47

■ Пример 1. Пешеходу надо пройти 12 км. Если он будет идти со скоростью v км/ч, то зависимость времени t (в ч), которое он затратит на весь путь, от скорости движения выражается формулой

$$t = \frac{12}{v}.$$

■ Пример 2. Площадь прямоугольника равна 60 см^2 , а одно из его измерений равно a см. Тогда второе измерение можно найти по формуле

$$b = \frac{60}{a}.$$

■ Пример 3. Количество товара m , которое можно купить на одну и ту же сумму денег в 500 р., зависит от его цены P (в р.). Эта зависимость выражается формулой

$$m = \frac{500}{P}.$$

Все перечисленные формулы имеют вид $y = \frac{k}{x}$, где k — число, отличное от нуля. И общей моделью таких и многих других реальных процессов является функция, которая задается этой формулой.

Вы, конечно, заметили, что в приведенных выше примерах величины связаны обратно пропорциональной зависимостью. Следовательно, и функцию, которая задана формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют *обратной пропорциональностью*.

Выражение $\frac{k}{x}$ имеет смысл при всех $x \neq 0$, поэтому область определения функции $y = \frac{k}{x}$ — множество всех чисел, кроме 0.

Выясним, что представляет собой график функции $y = \frac{k}{x}$. Рассмотрим отдельно случаи, когда $k > 0$ и когда $k < 0$. Построим, например, график функции $y = \frac{12}{x}$. Таблицу значений функции составим в два этапа: сначала возьмем несколько положительных значений аргумента, а затем несколько противоположных им отрицательных значений.

x	1	1,5	2	3	4	6	8	12
y	12	8	6	4	3	2	1,5	1

x	-1	-1,5	-2	-3	-4	-6	-8	-12
y	-12	-8	-6	-4	-3	-2	-1,5	-1

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых помещены в таблице, и соединим их плавными линиями — по отдельности для положительных и для отрицательных значений аргумента. Получим график функции $y = \frac{12}{x}$ (рис. 5.48).

Вы видите, что график состоит из двух ветвей. Одна из них расположена в первой координатной четверти, а другая — в третьей.

Обратите внимание: график функции $y = \frac{12}{x}$

не пересекает координатные оси; на графике нет ни точки с абсциссой $x = 0$, ни точки с ординатой $y = 0$.

Укажем еще одну важную особенность графика. Чем больше по модулю значение аргумента, тем меньше отличаются от нуля значения функции $y = \frac{12}{x}$. Например, если $x = 10$, то $y = 1,2$; если $x = 100$, то $y = 0,12$; если $x = 1000$, то $y = 0,012$. Поэтому ветви графика все больше приближаются к оси x , однако никогда не сливаются с ней.

Чем ближе к нулю значения аргумента, тем больше по модулю значения функции $y = \frac{12}{x}$. Например, если $x = 0,1$, то $y = 120$; если $x = 0,01$, то $y = 1200$; если $x = 0,001$, то $y = 12\,000$. Поэтому ветви гиперболы все больше приближаются к оси y , но никогда с ней не сливаются.

Такой же вид имеет график функции $y = \frac{k}{x}$ при любом $k > 0$.

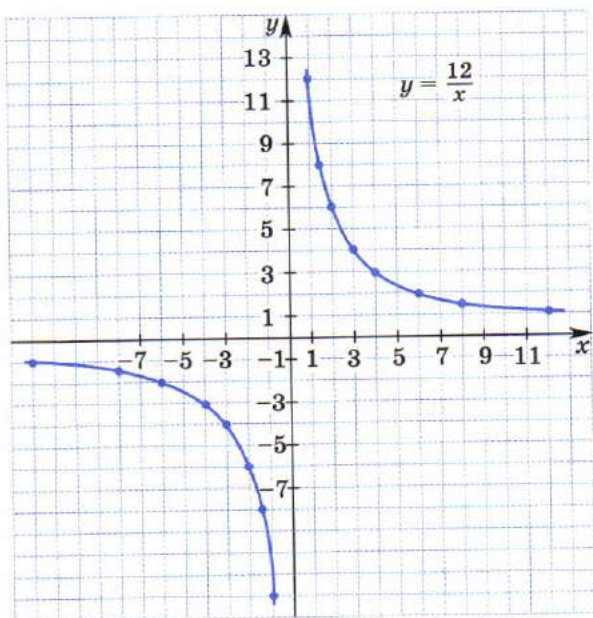


Рис. 5.48

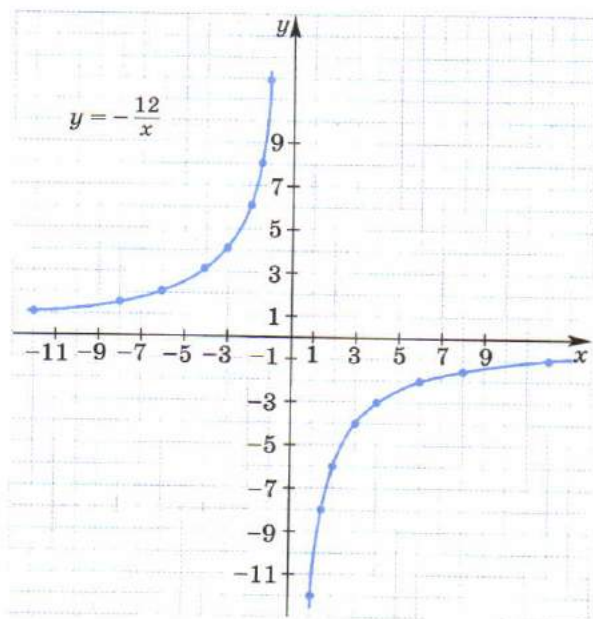


Рис. 5.49

Теперь построим график функции $y = \frac{k}{x}$, для $k < 0$, например график функции $y = -\frac{12}{x}$. Он тоже состоит из двух ветвей, но в этом случае они расположены во второй и четвертой координатных четвертях (рис. 5.49). График функции $y = \frac{k}{x}$ при любом $k < 0$ имеет такой же вид, что и график функции $y = -\frac{12}{x}$. График функции $y = \frac{k}{x}$ называется *гиперболой*. Гипербола состоит из двух ветвей.

Если $k > 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на каждом из двух промежутков области определения. Если $k < 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ на каждом из этих промежутков возрастает.

А

812. Функция задана формулой $y = \frac{6}{x}$.

а) Заполните таблицу:

x	1	2	3	4	6	-1	-2	-3	-4	-6
y										

б) Постройте график функции.

в) Определите промежуток, на котором значения функции положительны; отрицательны.

813. Функция задана формулой $f(x) = -\frac{6}{x}$.

а) Заполните таблицу:

x	1	2	3	4	6	-1	-2	-3	-4	-6
$f(x)$										

б) Постройте график функции.

в) Определите промежуток, на котором $f(x) > 0$; $f(x) < 0$.

814. Постройте график функции $y = \frac{8}{x}$. По графику определите:

а) возрастает или убывает функция при $x > 0$; при $x < 0$;

б) на каком промежутке значения функции отрицательны;

в) значение y при $x = 2,5$; $-2,5$;

г) значение x , при котором $y = 5$; -5 .

815. Постройте график функции $f(x) = -\frac{4}{x}$. По графику определите:

а) $f(5)$; $f(-5)$; $f(8)$; $f(-8)$;

б) значение x , при котором $f(x) = 8$; $f(x) = -8$; $f(x) = 6$; $f(x) = -6$;

в) возрастает или убывает функция при $x > 0$; при $x < 0$;

г) на каком промежутке значения функции положительные.

816. Графиком какой из функций: $y = \frac{1}{3}x$, $y = \frac{x}{3}$, $y = \frac{3}{x}$ — является гипербола? Постройте эту гиперболу.

817. В одной системе координат постройте графики функций:

$$y = \frac{1}{x}; y = \frac{4}{x}; y = -\frac{2}{x}; y = -\frac{8}{x}.$$

818. (Задание с выбором ответа.) При $k > 0$ график функции $y = \frac{k}{x}$ расположен:

А. В первой и третьей координатных четвертях.

Б. Во второй и четвертой координатных четвертях.

В. В первой и второй координатных четвертях.

819. В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их точек пересечения:

$$\text{а) } y = -\frac{1}{x} \text{ и } y = -x; \text{ б) } y = \frac{2}{x} \text{ и } y = x + 1.$$

820. Не выполняя построения, определите, какие из точек $(5; 3)$, $(10; -2)$, $(-0,3; -50)$, $(-0,4; 50)$ принадлежат графику функции:

$$\text{а) } y = \frac{15}{x}; \text{ б) } y = -\frac{20}{x}.$$

821. Пусть a и b — стороны прямоугольника, площадь которого равна 10 см^2 . Задайте формулой зависимость стороны a от стороны b . Постройте график зависимости a от b .

822. Найдите координаты точек с равными абсциссой и ординатой, через которые проходит график функции: а) $y = \frac{16}{x}$; б) $y = \frac{3}{x}$.
823. Известно, что точка $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$ принадлежит графику функции $y = \frac{k}{x}$. Найдите значение k . Принадлежит ли этому графику точка $\left(\sqrt{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$? $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$? $\left(2\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$?
824. Найдите координаты точки, в которых гипербола $y = \frac{12}{x}$ пересекается с прямой: а) $y = 0,5$; б) $y = -0,3$.
825. Найдите координаты какой-нибудь точки, принадлежащей графику функции $y = \frac{5}{x}$ и находящейся от оси x на расстоянии, меньшем чем 0,1; 0,01.
826. Пользуясь графиком на рисунке 5.49, определите, при каких значениях x : а) $y > 4$; б) $y \geq -6$; в) $y < 3$; г) $y \leq -3$; д) $-1 \leq y \leq 1$.
827. а) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{если } x \leq 2 \\ \frac{8}{x}, & \text{если } x > 2, \end{cases} \quad \text{и определите, при каких значениях } a$$

прямая $y = a$ имеет с графиком одну общую точку.

б) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & \text{если } x \leq 2 \\ -\frac{6}{x}, & \text{если } x > 2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях a прямая $y = a$ имеет с графиком две общие точки.

5.7

Целая и дробная части числа

(Для тех, кому интересно)

Среди графиков функций встречаются очень красивые и необычные. Прежде чем познакомиться с двумя интересными графиками, уточним, что же мы называем *целой частью числа* и *дробной частью числа*.

Ясно, например, что целая часть числа $3,7$ равна 3 , а дробная часть этого числа равна $0,7$. Понятно также, что целая часть числа 9 равна 9 , а дробная часть этого числа равна 0 . А что считать целой и дробной частью отрицательного числа, например числа $-4,8$?

Определение

Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x .

Из определения следует, что целая часть отрицательного числа $-4,8$ равна -5 , а целая часть числа 0 равна 0 .

Целая часть числа x имеет специальное обозначение: $[x]$. Используя это обозначение, запишем рассмотренные примеры:

$$[3,7] = 3; [9] = 9; [0] = 0; [-4,8] = -5.$$

Определение

Дробной частью числа x называют разность между числом x и его целой частью.

Дробная часть числа x тоже имеет специальное обозначение: $\{x\}$. Таким образом, $\{x\} = x - [x]$.

Найдем дробную часть числа $-4,8$. По определению будем иметь $\{-4,8\} = -4,8 - [-4,8] = -4,8 - (-5) = -4,8 + 5 = 0,2$.

А теперь посмотрим, как выглядят графики функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$.

Сначала построим график функции $y = [x]$. Если $0 \leq x < 1$, то $[x] = 0$. Значит, на промежутке $[0; 1)$ график функции $y = [x]$ совпадает с прямой $y = 0$. Однако $[1] = 1$, значит, при $x = 1$ график совершает скачок. Чтобы показать это, на графике ставят стрелку (рис. 5.50, а).

Далее, если $1 \leq x < 2$, то $[x] = 1$, т. е. на промежутке $[1; 2)$ значения y снова будут постоянны, а при $x = 2$ будет новый скачок графика.

Так, рассматривая последовательно промежутки области определения, мы построим график функции $y = [x]$, состоящий из горизонтальных «ступенек» (рис. 5.50, б).

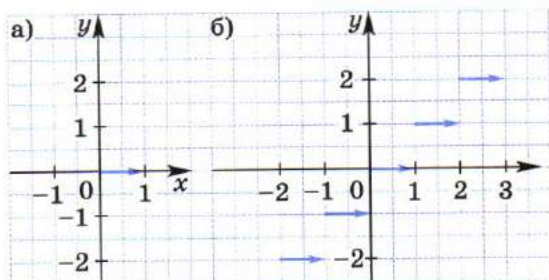


Рис. 5.50

А что представляет собой график функции $y = \{x\}$? Построим его тоже «по кусочкам», воспользовавшись тем, что $\{x\} = x - [x]$.

Если $0 \leq x < 1$, то $[x] = 0$. Значит, при $0 \leq x < 1$ $\{x\} = x - 0$, и график на этом промежутке совпадает с прямой $y = x$ (рис. 5.51, а).

Если $1 \leq x < 2$, то $[x] = 1$. Значит, при $1 \leq x < 2$ $\{x\} = x - 1$, и график на этом промежутке совпадает с прямой $y = x - 1$.

Продолжая рассуждения, мы каждый раз будем получать одинаковые отрезки прямых (со стрелкой в правом конце), исходящие

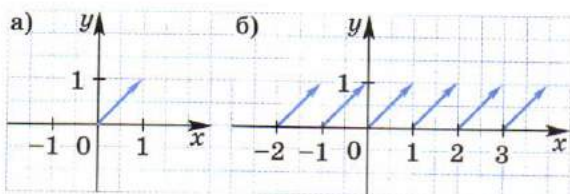


Рис. 5.51

из целых точек на оси x , наклоненные к оси под углом 45° . (Проверьте это самостоятельно не только для положительных, но и для отрицательных промежутков области определения.) Получился очень неожиданный график (рис. 5.51, б).

828. а) Найдите целую часть числа: 7,5; 25,11; -14; $3\frac{1}{3}$.

б) Найдите дробную часть числа: 19,25; $2\frac{5}{7}$; -3,9; $-45\frac{2}{7}$; 120.

829. Найдите $[x]$ и $\{x\}$, если $x = 6$; 10,8; -10,8; $-6\frac{3}{4}$; -30.

830. При каких значениях x :

а) $[x] = 5$;

б) $[x] = -3$?

831. Укажите несколько значений x , для которых $\{x\} = \frac{1}{2}$.

Постройте график функции (832—835):

832. а) $y = [x - 1]$; в) $y = [2x]$;

б) $y = [x] - 2$; г) $y = [x] + \frac{1}{2}$.

833. а) $y = -[x]$; б) $y = [-x]$; в) $y = [|x|]$.

834. а) $y = -\{x\}$; б) $y = \{-x\}$.

835. $y = [x] + \{x\}$.

Реальные зависимости

836. Туристы ездили на экскурсию из города A в город B . График движения экскурсионного автобуса изображен на рисунке 5.52. В какой из промежутков времени — первые два часа, следующие два часа или последние два часа поездки — скорость автобуса была наибольшей?

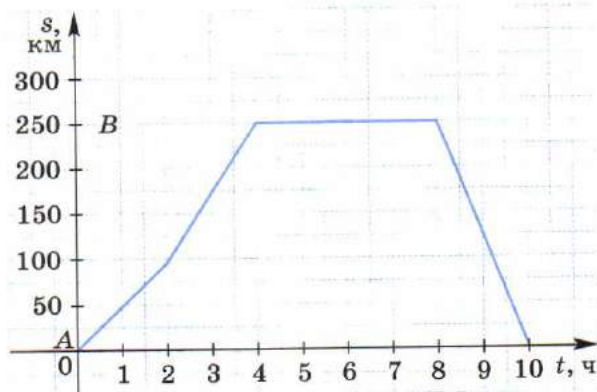


Рис. 5.52

837. На шоссе, ведущем в гору, через каждые 5 км установлен знак с отметкой высоты над уровнем моря. В таблице приведены данные на первые 20 км этой дороги.

Расстояние от начала подъема, км	0	5	10	15	20
Высота над уровнем моря, м	685	688	688	695	690

- Отметьте указанные точки в координатной плоскости.
- Укажите промежутки, на которых высота растет; не изменяется; снижается.
- На каком участке шоссе высота над уровнем моря увеличивается с наибольшей скоростью? Какова средняя скорость ее увеличения на этом участке (число метров на каждый километр пути)?

838. Два спортсмена, Петр и Иван, во время тренировки пробежали 20 км. Графики их бега представлены на рисунке 5.53. Используя графики, определите:
- на сколько меньше времени затратил на всю дистанцию Иван;
 - сколько километров пробежал каждый из них за 30 мин тренировки; за 50 мин тренировки;
 - кто из них бежал быстрее на отрезке дистанции от 8-го до 16-го километра;
 - кто из них бежал быстрее в течение второго получаса тренировки;

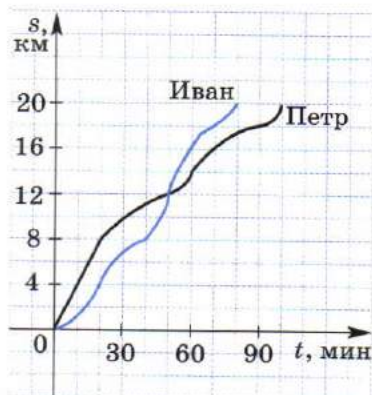


Рис. 5.53

839. Телефонная компания предлагает на выбор две различные схемы начисления ежемесячной платы за разговоры (рис. 5.54). При одной схеме — поминутная оплата, без абонентской платы; при другой схеме — абонентская плата плюс поминутная оплата разговоров.

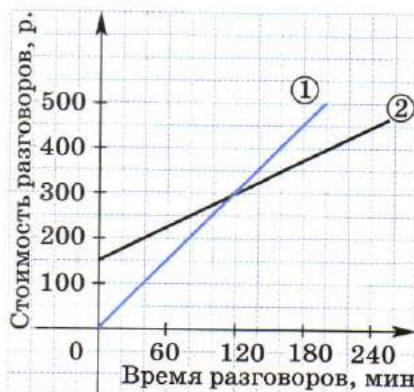


Рис. 5.54

Используя график, ответьте на вопросы:

- Какая из предложенных схем включает абонентскую плату, а какая не включает?
 - При какой схеме оплаты стоимость минуты разговора меньше?
 - Какой из этих двух схем выгоднее воспользоваться, если абонент планирует расходовать на телефонные разговоры ежемесячно не более 200 р.? от 350 до 400 р.? 300 р.?
 - Какой из этих двух схем выгоднее воспользоваться, если абонент планирует разговаривать по телефону в месяц более 3 ч? не более 1 ч? 2 ч?
840. На рисунке 5.55 изображен график нормального кровяного давления человека, которое периодически меняется от систолического (в момент выталкивания крови из сердца в артерии) до диастолического (при поступлении крови из вен в сердце).

Используя график, определите:

- максимальный уровень давления;
- минимальный уровень давления;
- разницу между систолическим и диастолическим давлением;
- за какое время происходит одно полное колебание давления; какое время проходит между двумя соседними максимальными значениями давления;
- сколько полных колебаний давления совершается за одну минуту (число таких колебаний соответствует пульсу).

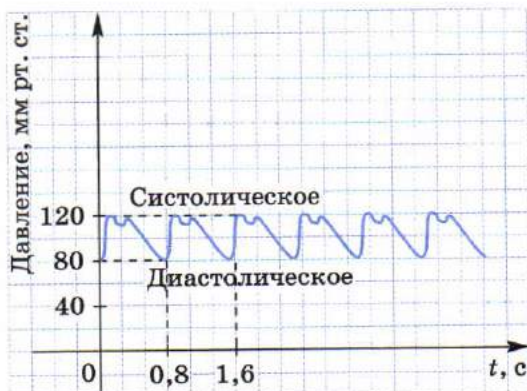


Рис. 5.55

Функции и графики

841. Зависимость массы m (в г) деревянного куба от длины x (в см) его ребра выражается формулой $m = 0,7x^3$. Постройте график этой зависимости. По графику найдите:

- примерную массу куба, ребро которого равно 2,5 см;
- примерную длину ребра куба, масса которого 8 г.

842. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 5.56). Расположите в порядке возрастания ее значения: $f(-3)$, $f(0)$, $f(2,5)$, $f(4,5)$.

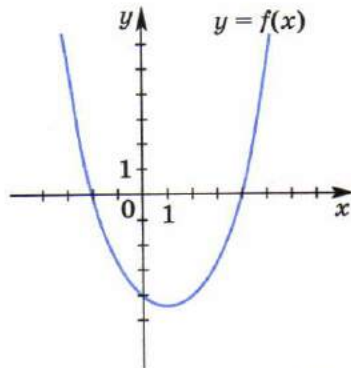


Рис. 5.56

843. Какие из графиков (рис. 5.57) могут служить графиками функций?

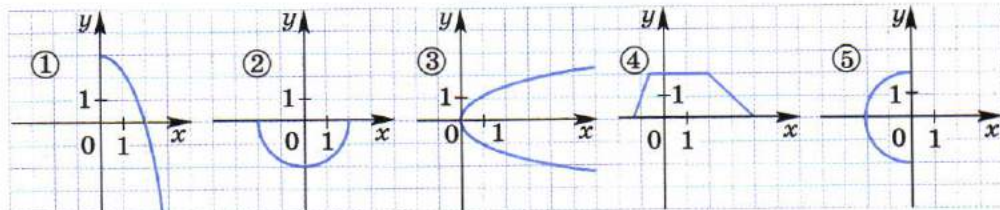


Рис. 5.57

844. Найдите область определения функции:

$$y = \frac{1}{x^4 - 4x^2}; \quad y = \sqrt{2x}; \quad y = \sqrt{-2x}; \quad y = \frac{1}{|4-x|}.$$

845. Есть ли на графике функции $y = x^2 - 4x + 3$ точка, ордината которой равна: 7; 15? Если есть, то чему равна ее абсцисса?

846. Существуют ли такие значения a , при которых точка M принадлежит графику функции $y = 2x^2 - 3$? Если существуют, то найдите их:

а) $M(a; -1)$; б) $M(2,5; a)$; в) $M(a; -3)$; г) $M(1,5; a)$.

847. Пересекает ли прямая $y = 12$ график функции:

а) $y = x^2 + 4$; б) $y = 2 - x^2$?

848. При каких значениях x функция $y = \frac{7-5x}{2}$ принимает отрицательные значения? неотрицательные значения?

849. Постройте в одной системе координат графики функций $y = 2x - 6$ и $y = 0,5x + 3$. Используя графики, определите:

а) при каких значениях x значения функций равны;

б) при каких значениях x значения функции $y = 2x - 6$ больше значений функции $y = 0,5x + 3$;

в) при каких значениях x значения функции $y = 2x - 6$ меньше значений функции $y = 0,5x + 3$;

г) при каких значениях x обе функции принимают положительные значения;

д) при каких значениях x обе функции принимают отрицательные значения.

850. Выбрав удобные единицы на осях, постройте график функции:

а) $y = 0,05x - 0,01$; б) $y = -50x + 100$.

851. Изучая зависимость между высотой сосны и диаметром ее ствола, ученые выявили тенденцию увеличения диаметра ствола с увеличением высоты сосны. Некоторые данные приведены в таблице:

Диаметр, см	12	15	20	24	26	30	32	34	40	45
Высота, м	19	20	18	24	25	23	26	25	25	27

Отметьте соответствующие точки в координатной плоскости. Проведите прямую, аппроксимирующую эти данные. Определите, чему примерно равна высота сосны, если ее диаметр равен 35 см; 50 см.

852. Имеют ли общие точки графики данных функций? Если имеют, то сколько?

а) $y = \frac{10}{x}$ и $y = 10x$; б) $y = \frac{10}{x}$ и $y = -10x$;

в) $y = -\frac{10}{x}$ и $y = 0,1x$; г) $y = -\frac{10}{x}$ и $y = -0,1x$.

853. Определите координаты точек, в которых:

а) биссектриса I и III координатных углов пересекает график функции $y = \frac{6}{x}$;

б) биссектриса II и IV координатных углов пересекает график функции $y = -\frac{15}{x}$.

854. При каком значении a : равном 1; 100 или $-0,1$ — график функции $y = \frac{a}{x}$ не пересекает график функции $y = \sqrt{x}$?

855. Постройте график функции:

а) $y = \frac{6}{|x|}$; б) $y = -\frac{6}{|x|}$.

856. Постройте график функции:

а) $y = \frac{12}{x} + 1$; б) $y = \frac{12}{x} - 1$.



Вопросы для повторения к главе 5

1. Рассмотрите зависимость объема куба V от длины его ребра a . В этом примере переменная _____ является функцией, а переменная _____ является аргументом. Задайте эту функцию формулой. Укажите область определения данной функции.
2. Используя текст учебника, приведите примеры задания функции графиком, таблицей, формулой.
3. Прочитайте запись $f(x) = x + 3$. Что означает запись $f(-5)$? Найдите $f(-5)$.
4. На примере функции $y = \frac{5}{x-1}$ объясните, как находят область определения функции, заданной формулой.
5. На рисунке 5.58 изображен график функции, заданной на промежутке $[-5; 5]$. По графику определите:
 - а) значение y при $x = -1$; 0; 3;
 - б) значения x , при которых $y = 0$; 1; -1 .
6. С помощью графика функции (рис. 5.58) опишите ее свойства.

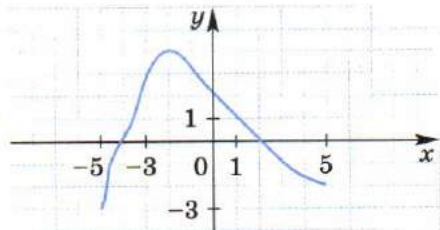


Рис. 5.58

7. Сформулируйте определение линейной функции. Приведите пример конкретной формулы, задающей линейную функцию.
8. Что является графиком линейной функции?
9. При каких значениях k функция $y = kx + 1$ является возрастающей? убывающей? Приведите пример возрастающей линейной функции; убывающей линейной функции. В каждом случае изобразите схематически ее график.
10. Укажите область определения функции $y = \frac{k}{x}$. Что является графиком функции $y = \frac{k}{x}$?
11. Как расположен на координатной плоскости график функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$? при $k < 0$?



Задания для самопроверки к главе 5

(Обязательные результаты обучения)

1. В таблице приведены данные температуры воздуха 10 апреля в городе Гривове.

Время, ч	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Температура, °С	1	0	-2	-3	-2	0	6	10	10	7	4	3	2

Постройте график температуры и определите:

- а) в какое время суток температура равнялась 0°C ;
- б) в какое время суток температура возрастала; убывала; была положительной; была отрицательной;
- в) каково максимальное значение температуры, каково ее минимальное значение;
- г) в каких границах менялась температура в течение суток;
- д) чему равнялась температура в 17 ч;
- е) в какое время суток температура равнялась 8°C .
2. Функция задана формулой $y = x^2 - 4$.
 - а) Найдите значение функции при $x = 0$; -3 .
 - б) При каких значениях x значение функции равно -3 ?
3. Функция задана формулой $f(x) = 2x - 5$.
 - а) Найдите $f(0)$, $f(-1,5)$.
 - б) Найдите значения x , при которых $f(x) = 18$; $f(x) = 0$.
4. Определите нули функции $y = x^2 + 3x$.

5. По графику функции (см. рис. 5.30) определите:
- нули функции;
 - значения аргумента, при которых функция положительна;
 - промежуток, на котором функция убывает;
 - наибольшее значение функции.
6. От Москвы до Ржева 240 км. Автобус выходит из Москвы и едет во Ржев со средней скоростью 60 км/ч. Расстояние y , которое остается проехать до Ржева, — это функция времени x движения автобуса.
- Задайте эту функцию формулой.
 - Какое расстояние останется проехать автобусу через 1 ч после начала движения? через 2 ч? через 4 ч?
 - Через какое время автобус будет находиться в 100 км от Ржева? в 80 км от Ржева?
 - Что является графиком данной функции?
 - Возрастающей или убывающей является функция?
 - Постройте график данной функции.
7. Постройте график функции:
- $y = -\frac{1}{3}x$;
 - $y = 1,5x + 6$;
 - $y = -0,5x + 1$.
8. Постройте график функции $y = -2x - 0,5$ и ответьте на вопросы:
- При каких значениях x значения функции равны 0? больше 0? меньше 0?
 - Возрастающей или убывающей является функция?
9. Постройте график функции $y = \frac{6}{x}$.
- Укажите область определения этой функции.
 - При каких значениях x значения функции больше нуля? меньше нуля?
 - Возрастает или убывает функция при $x < 0$? при $x > 0$?
10. Постройте график функции $f(x) = -\frac{8}{x}$. С помощью графика найдите приближенно: а) $f(3)$, $f(-6)$; б) значение x , при котором $f(x) = 5$, $f(x) = -7$.

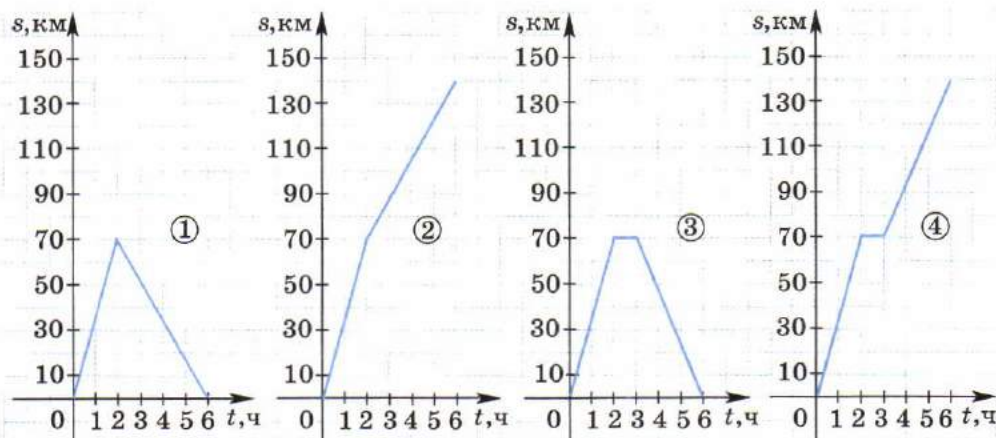


Тест к главе 5

1. Расстояние между городами 800 км. Поезд идет из одного города в другой со средней скоростью 70 км/ч. Задайте формулой зависимость расстояния s , которое поезду осталось пройти, от времени движения t .

Ответ. _____

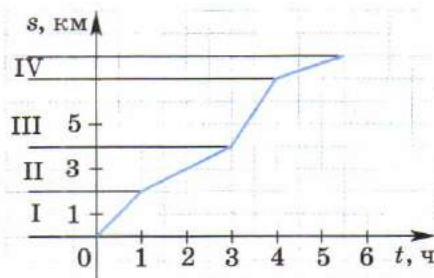
2. Автобус отправился из города в поселок и вернулся обратно, сделав в поселке остановку на один час. Какой из графиков описывает зависимость пройденного автобусом расстояния от времени движения?



А. 1. Б. 2. В. 3. Г. 4.

3. По реке плывет плот. На рисунке изображен график его движения. На каком из участков пути скорость течения наибольшая?

А. На первом.
Б. На втором.
В. На третьем.
Г. На четвертом.



4. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 3 - 2x^3$. Найдите $f(-2)$.

А. -19. Б. -13. В. -9. Г. 19.

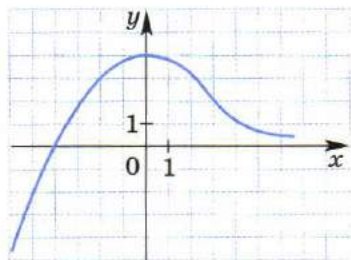
5. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x < 2 \\ x - 6, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$. Найдите $f(-10)$.

А. -100. Б. 100. В. -16. Г. 16.

6. Найдите область определения функции $y = \frac{x-3}{3x^2-12}$.

Ответ. _____

7. Функция задана графиком на отрезке $[-6; 6]$. Для каждого значения x из верхней строки укажите соответствующее ему значение y .



1) $x = 0$; 2) $x = 3$; 3) $x = -4$; 4) $x = -5$.

а) $y = 0$; б) $y = -2$; в) $y = 4$; г) $y = 2$.

Ответ. 1) _____ ; 2) _____ ;

3) _____ ; 4) _____

8. Укажите наибольшее значение функции (см. рисунок к заданию 7).

Ответ. _____

9. Укажите нули функции (см. рисунок к заданию 7).

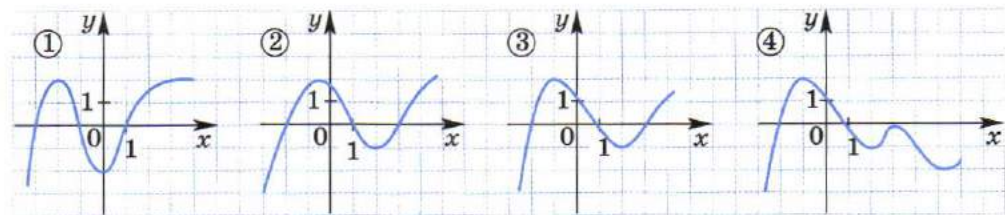
Ответ. _____

10. Какой из графиков, изображенных на рисунке, может служить графиком функции, обладающей свойствами:

$y > 0$ при $-2 < x < 1$;

функция убывает на промежутке $[-1; 2]$;

функция возрастает на промежутке $[2; +\infty)$?



А. 1.

Б. 2.

В. 3.

Г. 4.

11. Какая функция не является линейной?

А. $y = \frac{x}{3}$. Б. $y = 1 - 5x$. В. $y = \frac{4}{x}$. Г. $y = -0,2x$.

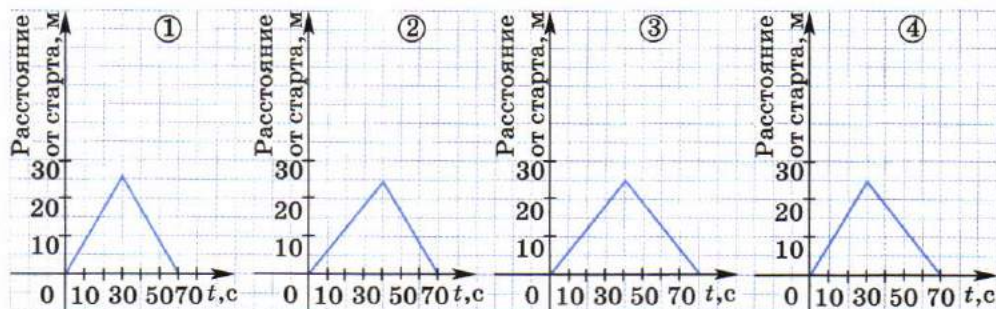
12. Какие из данных линейных функций являются возрастающими функциями?

1) $y = -4x + 2$; 2) $y = 4x$; 3) $y = 2x - 7$; 4) $y = -7x$.

Выпишите соответствующие номера.

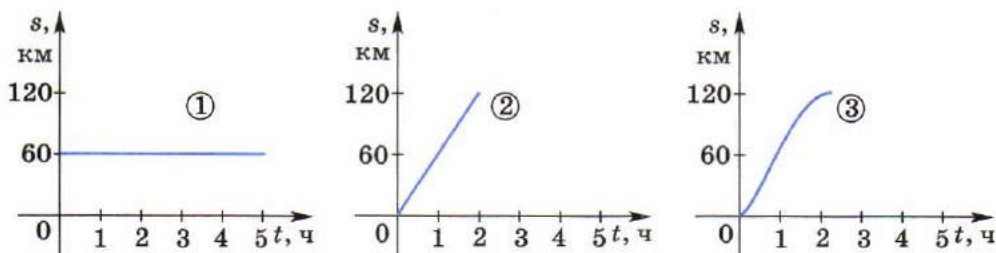
Ответ. _____

13. Оля, Ира, Зоя и Аня соревновались в плавании на дистанции 50 м в 25-метровом бассейне. Графики их заплывов показаны на рисунке. Укажите график заплыва для каждой девочки, если Оля плыла быстрее всех, Ира плыла дольше всех, Зоя первые 25 м плыла быстрее, чем Аня.



Ответ. Оля _____ ; Ира _____ ; Зоя _____ ; Аня _____

14. На каком из рисунков показан график движения автобуса, который шел с постоянной скоростью?



А. 1. Б. 2. В. 3.

15. Графиком какой функции является гипербола?

А. $y = -\frac{x}{2,5}$. Б. $y = -\frac{2,5}{x}$. В. $y = -2,5x$. Г. $y = \frac{1-2,5x}{2}$.

16. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = -\frac{10}{x}$?

А. В I и II. Б. В I и III. В. Во II и IV. Г. В III и IV.

17. Какая из данных прямых имеет с гиперболой $y = -\frac{10}{x}$ единственную общую точку, расположенную в IV координатной четверти?

А. $y = -100x$. Б. $y = 0,1x$. В. $y = 100$. Г. $x = 0,1$.



Вероятность и статистика

6.1

Статистические характеристики

Вспомним, какие статистические характеристики вам известны. Для этого рассмотрим следующий пример.

В течение года медицинский кабинет школы вел учет числа заболеваний каждого из учеников. В результате по 8А классу были получены такие данные:

Фамилия	Число заболеваний за год	Фамилия	Число заболеваний за год
Амиров	2	Клементьев	0
Антоненко	4	Леонидов	2
Борисов	3	Михайлова	4
Владимиров	2	Николаев	4
Григорьева	5	Петрова	2
Дмитриева	3	Родионов	1
Егорова	4	Сергеев	4
Емельянов	1	Степанян	3
Иванов	6	Тарасова	6
Ильина	3	Шварц	5

На первый взгляд приведенные в таблице сведения дают очень мало информации об этой группе школьников. Но более детальное рассмотрение показывает, что наибольшее число заболеваний у учащихся 8А класса равно 6, а наименьшее — 0. Как вы уже знаете, разность между наибольшим и наименьшим значениями ряда данных называется *размахом*. В данном случае он равен 6.

Можно найти и *среднее арифметическое* этого ряда чисел. Для этого все указанные числа надо сложить и получившуюся сумму разделить на число учеников. Получим $\frac{64}{20} = 3,2$, т. е. среднее арифметические числа заболеваний в 8А классе равно 3,2.

Однако, как несложно заметить, многие числа в этом ряду повторяются. Для таких рядов есть более удобный способ нахождения среднего арифметического, основанный на использовании *частоты* появления наблюдаемых событий.

Абсолютной частотой, или просто частотой случайного события, называют число, которое показывает, сколько раз данное событие наблюдалось в серии экспериментов.

Составим *таблицу частот*. В первом ее столбце поместим наблюдаемые события — числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; второй столбец будем использовать для регистрации появлений каждого из этих событий; в третий столбец занесем частоты событий.

Число заболеваний	Подсчеты	Частота	Число заболеваний	Подсчеты	Частота
0	/	1	4	///	5
1	//	2	5	//	2
2	////	4	6	//	2
3	////	4			

Теперь мы знаем, сколько раз в рассматриваемом ряду повторяется каждое из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Поэтому при нахождении среднего арифметического каждую сумму равных слагаемых можно заменить произведением этого слагаемого на его частоту. Получим

$$\frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2}{1 + 2 + 4 + 4 + 5 + 2 + 2} = \frac{64}{20} = 3,2.$$

Итак, мы получили тот же самый результат, но за меньшее количество действий, что особенно важно, если ряд «длинный».

Из таблицы частот сразу можно найти и *моду* ряда данных. Напомним, что мода — это наиболее часто встречающееся в ряду

число. Мода этого ряда равна 4, поскольку число 4 встречается в ряду 5 раз и никакое другое число ряда не встречается в нем 5 или более раз.

Различные *средние* используются в статистике для того, чтобы наиболее точно, или, как говорят, адекватно, описывать разные жизненные ситуации. Познакомимся с еще одним показателем среднего в ряду данных — статистической характеристикой, называемой *медианой*. Для этого рассмотрим следующий пример.

В конце года 11 учеников 8 класса сдавали норматив по бегу на 100 метров. Были зафиксированы следующие результаты:

Имя ученика/ ученицы	Результат, с	Имя ученика/ ученицы	Результат, с
Данила	15,3	Петя	16,9
Лена	21,8	Оксана	18,4
Стас	16,1	Лейла	25,1
Оля	19,9	Боря	15,5
Ашот	14,7	Наташа	20,2
Миша	15,4		

После того как все ребята пробежали дистанцию, к преподавателю подошел Петя и спросил, какой у него результат.

«Самый средний результат: 16,9 секунды», — ответил учитель. И пояснил: «Твой результат средний, потому что пять человек пробежали лучше, чем ты, и пять — хуже, то есть ты как раз посередине».

На языке статистики такой результат, как у Пети, и называют медианой ряда данных. Обычно медиану ищут в случае, когда числа в ряду являются какими-либо показателями и надо найти, например, человека, показавшего *средний* результат, фирму со *средней* годовой прибылью, авиакомпанию, предлагающую *средние* цены на билеты, и т. д.

Для того чтобы найти медиану ряда чисел, нужно сначала их упорядочить. В нашем примере упорядоченный ряд выглядит так:

$$\underbrace{14,7; 15,3; 15,4; 15,5; 16,1}_{\text{пять чисел, меньших, чем } 16,9} \quad \underbrace{16,9}_{\text{медиана}} \quad \underbrace{18,4; 19,9; 20,2; 21,8; 25,1}_{\text{пять чисел, больших, чем } 16,9}$$

Поскольку чисел всего 11, то медианой является 6-е число, т. е. 16,9.

Теперь найдем средний результат у девочек. Для этого выпишем результаты всех девочек в порядке возрастания:

18,4; 19,9; 20,2; 21,8; 25,1.

Медианой в данном случае является число 20,2, т. е. результат Наташи.

И наконец, найдем средний результат у мальчиков. Упорядоченный ряд их результатов выглядит так:

14,7; 15,3; 15,4; 15,5; 16,1; 16,9.

В этом ряду четное количество чисел; два средних числа — 15,4 и 15,5. Медианой в таком случае считают среднее арифметическое этих двух чисел, т. е. их полусумму: $\frac{15,4 + 15,5}{2} = 15,45$.

Таким образом, медиана — это число, которое разделяет ряд данных на две части, одинаковые по количеству членов.

Чтобы найти медиану произвольного ряда чисел, их прежде всего надо упорядочить — записать по возрастанию. Тогда медианой упорядоченного ряда, состоящего из нечетного числа членов, является число, которое находится посередине; медианой упорядоченного ряда, состоящего из четного числа членов, является среднее арифметическое двух чисел, находящихся посередине.

А

857. В таблице приведены расходы студента за 6 учебных дней недели.

День недели	Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница	Суббота
Расходы, р.	38	40	35	40	27	24

Определите, какая статистическая характеристика находится в каждом случае:

а) $38 + 40 + 35 + 40 + 27 + 24 = 204$,

$204 : 6 = 34$,

$\square = 34$ р.;

б) 24, 27, 35, 38, 40, 40,

$(35 + 38) : 2 = 36,5$,

$\square = 36,5$ р.;

в) 38, 40, 35, 40, 27, 24,

□ = 40 р.;

г) $40 - 24 = 16$,

□ = 16 р.

858. Найдите медиану следующего ряда чисел:

а) 12; 16; 19; 25; 30; 32; 33; 38; 40;

б) 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27; 29; 31; 33;

в) 12; 8; 7; 14; 25; 6; 19; 18;

г) 2,5; 1,3; 1,5; 0,9; 1,7; 2,1.

859. Столбчатая диаграмма, изображенная на рисунке 6.1, показывает, сколько

книг прочитал каждый из ребят за летние каникулы. Ответьте на вопросы:

а) Кто из ребят прочел больше всего книг?

б) Кто за летние каникулы не прочел ни одной книги?

в) Найдите размах этих данных.

г) Найдите среднее арифметическое этого ряда данных.

д) Найдите медиану этого ряда данных.

860. В таблице зафиксирована посещаемость выставки прикладного искусства северных народов в течение одной недели.

День недели	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
Число посетителей	711	690	670	539	840	986	1024

Для полученного ряда данных найдите:

а) размах; б) среднее арифметическое; в) медиану.

861. В магазине «Каль-куль» представлено несколько моделей калькуляторов по следующим ценам:

Тип	A	B	C	D	E	F	G	H
Цена, р.	119,95	149,95	169,95	149,95	219,95	149,95	129,95	169,95

а) Какова самая распространенная цена на калькуляторы в этом магазине? (Найдите моду данного ряда.)

б) Сколько должен стоить «средний» калькулятор? (Найдите медиану данного ряда.)

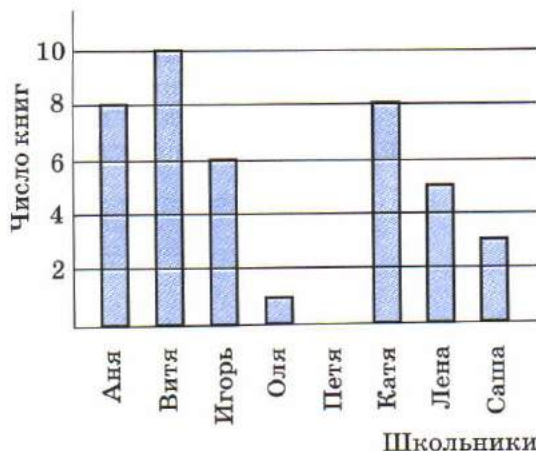


Рис. 6.1

- в) Сколько в среднем стоит калькулятор в этом магазине? (Найдите среднее арифметическое данного ряда.)
862. В течение года Лена получила следующие оценки за контрольные по алгебре: одну двойку, четыре тройки, шесть четверок и три пятерки. Занесите эти данные в таблицу частот.

Оценка	Частота
2	...
...	...
...	...
...	...

Найдите среднее арифметическое, моду и медиану ряда оценок. Какую из полученных характеристик Лена предпочла бы иметь в качестве годовой оценки?

863. Маша, Саша, Катя, Лена, Ваня и Миша пошли в пиццерию. Ваня съел 5 кусков пиццы, Миша, Саша и Лена — по 3 куска, Катя — 2 куска, Маша — 1 кусок. Найдите все известные вам средние этих данных. Если бы Ваня съел не 5, а 7 кусков пиццы, как бы изменились эти величины?

Б

864. Президент компании получает 1000000 р. в год, четверо его заместителей получают по 200000 р. в год, а 20 служащих компании получают по 100000 р. в год. Найдите все средние (среднее арифметическое, моду, медиану) зарплат в компании.
865. У группы из 20 восьмиклассников спросили, сколько примерно часов в день они тратят на приготовление домашних заданий. Ответы школьников представлены на диаграмме, изображенной на рисунке 6.2.
- Представьте эти данные в виде таблицы частот.
 - Сколько времени в день в среднем тратит ученик из этой группы на приготовление домашних заданий? (Найдите среднее арифметическое этого ряда данных.)
 - Сколько времени тратит средний ученик на приготовление домашних заданий? (Найдите медиану этих данных.)
 - Сколько времени тратит на приготовление домашних заданий большинство из этих 20 ребят? (Найдите моду этих данных.)



Рис. 6.2

- 866.** (Задача-исследование.) Постройте ряд из четырех или более чисел (не все из которых равны между собой), у которого:
- среднее арифметическое равно медиане;
 - среднее арифметическое равно моде;
 - среднее арифметическое, медиана и мода равны между собой.

6.2

Вероятность равновозможных событий

В 7 классе вы учились оценивать вероятность случайного события, исходя из статистических данных. Эта вероятность приближенно равна относительной частоте наступления интересующего нас события при проведении большого числа одинаковых случайных экспериментов.

Однако какой бы длинной ни была серия экспериментов, подсчитанная частота даст только приближенное значение вероятности. И, кроме того, далеко не всегда такую серию экспериментов можно реально осуществить. Чтобы вычислить вероятность выпадания орла, английский математик Карл Пирсон провел, как вы могли прочитать в учебнике для 7 класса, 24 000 экспериментов по бросанию монеты. Но мы не можем, например, провести десятки тысяч испытаний для экспериментального вычисления возможности выигрыша в лотерею. Нам просто не хватит денег.

К счастью, во многих ситуациях существуют более «экономичные» способы расчета вероятностей. Если все исходы случайного эксперимента *равновозможны*, то вероятность каждого такого исхода можно подсчитать, не проводя экспериментов.

Самый простой из примеров такого рода — уже упомянутое подбрасывание монеты. Этот эксперимент имеет два исхода — орел и решка. Статистическим путем, проводя эксперименты, мы установили, что вероятность появления орла равна вероятности появления решки и равна $\frac{1}{2}$. Но этот результат нетрудно было и предугадать.

Если монета «правильная», то нет никаких оснований считать один исход вероятнее другого. И так как оба исхода равновозможны, то вероятность каждого из них равна $\frac{1}{2}$.

Точно так же при бросании «правильного» кубика возможны шесть исходов, и все они равновероятны. Поэтому вероятность каждого исхода равна $\frac{1}{6}$.

Однако если кубик «неправильный» (например, к одной из его граней изнутри приклеили пластилин), то исходы эксперимента при его подбрасывании неравновозможны, и поэтому без проведения опытов найти вероятность какого-либо из них не удастся.

Рассмотрим примеры определения вероятности случайного события в экспериментах с равновероятными исходами.

■ Пример 1. Для проведения экзамена приготовили 24 билета. Андрей не выучил один билет и очень боится его вытянуть. Какова вероятность того, что Андрею достанется несчастливый билет?

Всего у данного эксперимента «вытянуть наугад один билет» 24 исхода, все они равновероятны. У Андрея один шанс из 24 вытянуть несчастливый билет. Поэтому вероятность того, что Андрею достанется несчастливый билет, равна $\frac{1}{24}$.

■ Пример 2. Какова вероятность того, что при бросании правильного игрального кубика выпадет четное число очков?

Мы знаем, что при бросании игрального кубика возможны шесть равновероятных исходов. При этом только три из них (выпадение двух очков, четырех очков и шести очков) приводят к наступлению события «выпало четное число очков». Таким образом, для наступления этого события есть 3 шанса из 6, и поэтому его вероятность равна $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

■ Пример 3. В лотерее 10 выигрышных билетов и 240 билетов без выигрыша. Какова вероятность выиграть в эту лотерею, купив один билет?

В лотерее разыгрывается всего $10 + 240 = 250$ билетов, любой из них можно купить с одинаковой вероятностью. Есть 10 шансов из 250 выиграть, и, следовательно, вероятность выигрыша равна $\frac{10}{250} = \frac{1}{25}$.

В общем случае рассмотрим случайный эксперимент, который может завершиться одним из n возможных исходов, причем все n исходов равновероятны. Пусть ровно m из этих n исходов приводят к наступлению события A (будем называть такие исходы *благоприятными* для события A). Тогда вероятность события A считают равной дроби $\frac{m}{n}$.

Если обозначить вероятность наступления события A символом $P(A)$, то можно записать формулу

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Для экспериментов с равновероятными исходами вероятностью случайного события называют отношение числа исходов, благоприятных для этого события, к числу всех возможных исходов эксперимента.

Такое определение вероятности было впервые дано в работах французского математика Лапласа, и обычно его называют *классическим*.

Воспользуемся этим определением для ситуаций, разобранных выше.

Эксперимент	Число n возможных исходов эксперимента	Событие A	Число m исходов, благоприятных для этого события	Вероятность наступления события A : $P(A) = \frac{m}{n}$
Бросаем монету	2	Выпал орел	1	$\frac{1}{2}$
Вытягиваем экзаменационный билет	24	Вытянули несчастливый билет	1	$\frac{1}{24}$
Бросаем кубик	6	На кубике выпало четное число очков	3	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
Играем в лотерею	250	Выиграли, купив один билет	10	$\frac{10}{250} = \frac{1}{25}$

A

867. Равновероятны ли события A и B :

- а) A : из 50 экзаменационных билетов вытянуть билет № 1;
 B : из 50 экзаменационных билетов вытянуть билет № 23;

б) А: при подбрасывании «правильного» кубика выпадает четное число очков;

В: при подбрасывании «правильного» кубика выпадает нечетное число очков;

в) А: попасть при выстреле в мишень;

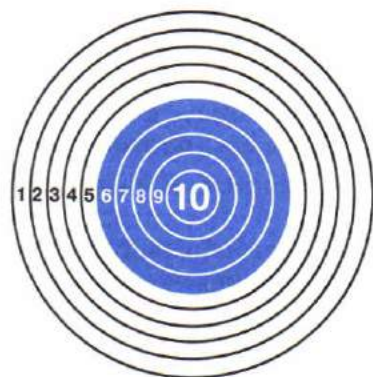
В: промахнуться при выстреле в мишень;

г) А: выиграть в лотерею;

В: проиграть в лотерею;

д) А: 1 июня будет солнце;

В: 1 июня будет дождь?



868. Для каждого из следующих экспериментов найдите число всех возможных исходов, число благоприятных исходов и вычислите вероятность.

а) На столе 12 кусков пирога. В трех «счастливых» из них запечены призы. Какова вероятность взять «счастливый» кусок пирога?

б) В урне 15 белых и 25 черных шаров. Из урны наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что он будет белым?

в) Для лотереи отпечатали 500 билетов, из них 25 выигрышных. Какова вероятность вытянуть невыигрышный билет?

869. Определите вероятность следующих событий:

А: при бросании кубика выпало три очка;

В: при бросании кубика выпало нечетное количество очков;

С: число очков, выпавших при бросании кубика, больше двух;

Д: число очков, выпавших при бросании кубика, больше шести;

Е: число очков, выпавших при бросании кубика, меньше семи.

870. Определите вероятность следующих событий:

А: карта, вытянутая наугад из колоды, оказалась дамой пик;

В: карта, вытянутая наугад из колоды, оказалась тузом;

С: карта, вытянутая наугад из колоды, оказалась красной масти;

Д: карта, вытянутая наугад из колоды, оказалась не королем.

871. Наугад выбрано двузначное число. Какова вероятность того, что оно окажется:

а) кратным 5;

б) простым?

872. На трехместную скамейку произвольным образом садятся двое мужчин и женщина. Какова вероятность того, что мужчины окажутся рядом?

Указание. Обозначьте женщину буквой Ж, а мужчин буквами M_1 и M_2 . Выпишите все возможные варианты их размещения на скамейке.

873. а) В урне находятся красный, зеленый и желтый шары. Их, не глядя, вынимают один за другим. Какова вероятность того, что шары будут вынуты в такой последовательности: желтый, красный, зеленый?

б) Чтобы открыть чемодан, нужно в некотором порядке набрать четыре цифры: 3, 5, 7 и 9. Хозяин помнит цифры, но забыл их последовательность. Какова вероятность того, что он сумеет открыть чемодан с первой попытки?

в) Мама дала маленькой девочке, не умеющей читать, кубики с буквами «о», «к», «т» и предложила сложить из них какое-нибудь слово. Какова вероятность того, что у девочки случайным образом получится слово КОТ?

Указание. Число всех возможных исходов равно числу перестановок из заданных элементов; для их подсчета можно воспользоваться формулой $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Б

874. Грани кубика окрашены в красный или желтый цвет. Вероятность выпадания красной грани равна $\frac{1}{6}$, вероятность выпадания

желтой грани равна $\frac{5}{6}$. Сколько красных и сколько желтых граней у этого кубика?

875. В ящике лежит 8 красных, 2 синих и 20 зеленых карандашей. Вы наугад вынимаете один карандаш. Какова вероятность того, что этот карандаш красный? желтый? не зеленый? Какое наименьшее количество карандашей нужно вынуть, чтобы с вероятностью, равной 1, среди них оказался зеленый карандаш?

876. В урне находятся 3 шара: желтый, синий, зеленый. Их, не глядя, вынимают один за другим. Какова вероятность того, что: а) первым будет вынут синий шар; б) последним будет вынут зеленый шар; в) вначале будут вынуты синий и желтый шары (в любом порядке)?

877. а) Слово «алгебра» написали на полоске картона и разрезали полоску на буквы. Найдите вероятность того, что если эти кусочки картона перемешать и снова составить их в ряд случайным образом, то опять получится слово «алгебра».

б) На полоске картона написали слово «перестановка», разрезали полоску на буквы и кусочки картона перемешали. Какова

вероятность того, что если их снова случайным образом составить в ряд, то опять получится слово «перестановка»?

878. Наугад выбрано натуральное число от 1 до 1 000 000. Какова вероятность того, что оно окажется полным квадратом?

879. Даны отрезки длиной 2, 5, 6 и 10 см. Какова вероятность того, что из выбранных наудачу трех отрезков можно составить треугольник?

Указание. Чтобы найти благоприятные исходы, воспользуйтесь неравенством треугольника.

6.3 Сложные эксперименты

В задачах на вычисление вероятности в классической модели, как вы могли уже понять, очень полезным оказывается знание комбинаторики. Рассмотрим примеры использования комбинаторных приемов в ситуациях, когда случайный эксперимент состоит из нескольких испытаний, производимых одновременно или последовательно.

■ Пример 1. (Задача Даламбера.) Какова вероятность того, что при двух бросаниях монеты хотя бы один раз выпадет орел?

Изобразим дерево возможных исходов (рис. 6.3). Эксперимент имеет 4 равновероятных исхода; в первых трех из них происходит интересующее нас случайное событие. Поэтому вероятность того, что при двух бросаниях монеты хотя бы один раз выпадет орел, равна $\frac{3}{4}$.

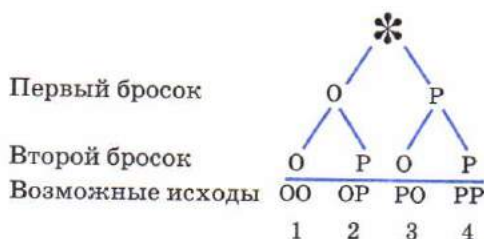


Рис. 6.3

■ Пример 2. Какова вероятность того, что при подбрасывании двух кубиков — черного и белого — на первом выпадет больше очков, чем на втором?

Сначала подсчитаем общее количество исходов эксперимента. Для этого мы их просто все выпишем, составив соответствующую таблицу:

Черный кубик \ Белый кубик	1	2	3	4	5	6
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

Каждый исход обозначен двузначным числом, первая цифра которого показывает, сколько очков выпало на черном кубике, а вторая — сколько очков выпало на белом кубике. Всего исходов 36, и в 15 из них происходит интересующее нас событие. Значит, вероятность события «на черном кубике выпало больше очков, чем на белом» равна $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

■ **Пример 3.** Одновременно бросают три кубика. Какова вероятность следующих событий?

A: на всех кубиках выпало одинаковое число очков;

B: на всех кубиках число очков различно.

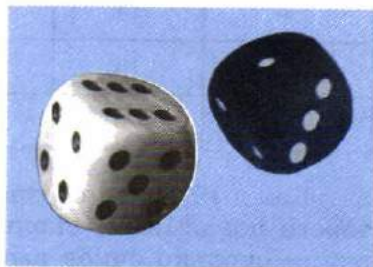
Вычислим сначала общее число исходов этого эксперимента. Бросок каждого кубика может привести к шести различным исходам — может выпасть от 1 до 6 очков. Поэтому по правилу умножения общее число исходов равно $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$. (Все исходы мы считаем равновероятными.)

Теперь найдем число исходов, благоприятных событию **A**. На всех кубиках одновременно может появиться 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков, значит, благоприятных исходов всего 6. Поэтому $P(A) = \frac{6}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{36}$.

Теперь найдем число исходов, благоприятных событию **B**. На одном кубике может появиться любое число очков от 1 до 6, т. е. для первого кубика возможны 6 исходов. Так как на всех кубиках количество очков должно быть разным, то для второго кубика остается только 5 исходов, а для третьего кубика — только 4 исхода. Тогда число всех исходов, благоприятных событию **B**, равно $6 \cdot 5 \cdot 4$.

Следовательно, $P(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{9}$.

880. Какова вероятность того, что при двух бросаниях монеты:
- а) хотя бы один раз выпадет решка;
 - б) ни разу не выпадет орел;
 - в) она дважды упадет на одну и ту же сторону;
 - г) она упадет на разные стороны?
881. Монету бросают два раза подряд. Равновероятны ли события «дважды выпал орел» и «один раз выпал орел, один раз выпала решка»?
882. Бросают два кубика — черный и белый. Используя таблицу в примере 2, выясните, какова вероятность того, что:
- а) на кубиках выпало одинаковое количество очков;
 - б) на белом кубике очков выпало больше, чем на черном;
 - в) сумма очков на кубиках равна 9;
 - г) сумма очков на кубиках четная.
883. а) Какова вероятность того, что при двух бросаниях игрального кубика в сумме выпадет 2 очка; 3 очка; 4 очка; 10 очков; 11 очков; 12 очков?
- б) Даша и Маша бросают игральные кубики: Даша — черный, Маша — белый. Они договорились, что если сумма очков на кубиках окажется равной шести, то выигрывает Даша, а если сумма очков будет равна восьми, то выигрывает Маша. Справедлива ли эта игра или у одной из девочек шансов на выигрыш больше?
884. Чемодан открывается кодом 710. Цифра каждого из трех рядов при наборе кода может быть любой от 0 до 9. Человек рассеянный забыл код своего чемодана. Сколько попыток в худшем случае ему придется сделать, чтобы открыть свой чемодан? Какова вероятность того, что, набрав произвольно номер из трех цифр, он сможет сразу открыть чемодан?



885. В урне находятся 5 шаров: красный, желтый, синий, зеленый и белый. Их, не глядя, вынимают один за другим. Какова вероятность того, что:
- а) первым будет вынут белый шар, а последним — зеленый;

- б) сначала будут вынуты желтый и зеленый шары (в любом порядке);
 в) красный и синий шары будут вынуты друг за другом (в любом порядке)?
886. Если пять раз подбрасывать монету, какова вероятность того, что:
 а) все пять раз выпадет орел; б) ни разу не выпадет орел?
887. Три раза подряд бросили монету. Найдите вероятности следующих событий:
 А: хоть раз выпал орел;
 В: хоть раз выпала решка;
 С: все три исхода одинаковые;
 D: не все исходы одинаковые;
 Е: все три исхода разные.
888. Одновременно бросают два кубика. Какое значение суммы выпавших очков наиболее вероятно?
889. Замок на сейфе открывается набором определенной комбинации из пяти цифр, каждая из которых может быть любой от 0 до 9. С какой вероятностью мы откроем сейф в течение часа, если будем тратить на набор каждой новой комбинации около секунды?

6.4 Геометрические вероятности

Как оценить вероятность того, что при стрельбе в мишень стрелок попадет в десятку? Как оценить, насколько вероятнее футболист попадет мячом в большие ворота, чем в маленькие, при тех же расстоянии и силе удара?

При ответе на такие вопросы можно по-другому подойти к определению вероятности случайного события — из геометрических соображений.

■ **Пример.** На квадратном столе выделен черный квадрат (рис. 6.4). Какова вероятность того, что фишка попадет в черный квадрат, если ее бросить на стол наугад (например, с закрытыми глазами)?

Легко понять, что эта вероятность равна отношению площади черного квадрата к площади поверхности стола. Если, например, площадь стола равна $0,6 \text{ м}^2$, а площадь черного квадрата — $0,04 \text{ м}^2$, то

$$P = \frac{0,04}{0,6} = \frac{1}{15}.$$

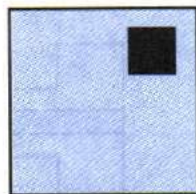


Рис. 6.4

В рассмотренном примере мы пренебрегли геометрическими размерами самой фишки, поскольку иначе она могла бы попасть и на стол, и на квадрат одновременно. Вообще в задачах на геометрические вероятности обычно считается, что размеры предмета (фишки, пули, мяча, шайбы и т. п.) очень маленькие по сравнению с размерами места, куда он должен попасть (стол, мишень, ворота и т. д.).

Также принято считать, что, например, брошенная фишка с одинаковой вероятностью попадает в любое место стола, пуля с одинаковой вероятностью попадает в любое место мишени, а мяч или шайба — в любое место ворот. Исходя из этого, можно понять, почему искомая вероятность равна отношению соответствующих площадей. Ведь, например, в рассмотренной задаче черный квадрат представлял благоприятные исходы, а стол — общее количество возможных исходов.

A

890. Стрелок, не целясь, стреляет в треугольную мишень (рис. 6.5) и попадает в нее. Какова вероятность того, что он попадает в тройку? в двойку? в единицу?

891. Брошенная наугад точка попадает в фигуру, изображенную на рисунке 6.6. Сделав необходимые измерения и вычисления, найдите вероятность того, что точка попадет в закрашенную часть фигуры.

892. Фишку наугад бросают в квадрат, изображенный на рисунке 6.7. Какова вероятность того, что фишка попадет:

- а) в черный квадрат;
- б) в квадрат $ABCD$;
- в) в закрашенную рамку?

893. Брошенная наугад фишка попадает в фигуру, изображенную на рисунке 6.8. Какова вероятность того, что она попадет при этом в закрашенную часть фигуры?



Рис. 6.5

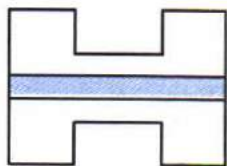


Рис. 6.6

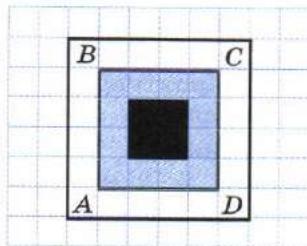


Рис. 6.7

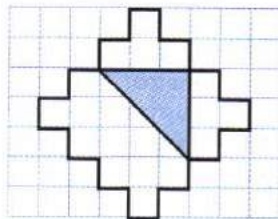


Рис. 6.8

894. Фишку наугад бросают в квадрат со стороной 1, и она попадает в некоторую точку M . Какова вероятность того, что:

а) расстояние от точки M до ближайшей стороны квадрата не превосходит 0,25;

б) расстояние от точки M до ближайшей диагонали квадрата не превосходит 0,25?

Указание. Отметьте на квадрате ту часть, попадание в которую является благоприятным исходом, и найдите ее площадь.

895. Фигура Φ задана на координатной плоскости следующими условиями: $|x| \leq 5$ и $|y| \leq 5$. Известно, что центр квадрата со сторонами, параллельными осям координат, принадлежит фигуре Φ . Сторона квадрата равна 2. Какова вероятность того, что квадрат целиком содержится в фигуре Φ ?

Указание. Фигура Φ — это квадрат со стороной 10 и центром в начале координат. Квадрат не будет содержаться в фигуре Φ целиком, если расстояние от его центра до границ фигуры Φ меньше 1. Покажите штриховкой часть фигуры Φ , соответствующую благоприятным исходам.

6.5

Размещения и сочетания

(Для тех, кому интересно)

Некоторые комбинации, которые часто встречаются при решении комбинаторных задач, имеют специальные названия. Вы знаете, например, что каждое расположение заданных элементов в определенном порядке называют *перестановкой*. Теперь вы познакомьтесь с другими специальными видами комбинаций.

Решим две задачи, условия которых очень похожи.

■ Задача 1. В классе 25 учеников. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя?

Ответ на этот вопрос, как вы знаете, можно получить с помощью правила умножения. Для выбора старосты имеется 25 способов, а его заместителя (при каждом выборе старосты) — 24 способа. Значит, всего имеется $25 \cdot 24 = 600$ способов.

■ Задача 2. В классе 25 учеников. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных?

Так как в отличие от предыдущей ситуации дежурные в каждой паре равноправны, то число способов в данном случае оказывается вдвое меньшим: $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$.

Давайте внимательнее разберемся в том, почему в таких похожих задачах мы получаем разные ответы. Пусть в обеих ситуациях выбрали учеников A и B . Когда выбирают старосту и его заместителя, то пара AB , где A — староста, B — заместитель, и пара BA , в которой B — староста, A — заместитель — это разные варианты выбора. Здесь важны не только элементы, из которых составляется пара, но и их порядок. А когда выбирают дежурных, то порядок не важен. Пары AB и BA — это, по сути, один и тот же вариант выбора, т. е. каждые две пары, отличающиеся только порядком элементов, заменяются в данном случае одной. Вот почему во второй задаче вариантов вдвое меньше.

В общем виде эти задачи выглядят так: требуется найти число способов, которыми из множества, содержащего n элементов, можно выбрать k элементов. Прежде всего, из условия задачи необходимо понять, важен ли порядок в этом наборе из k элементов или нет.

Если по смыслу задачи порядок важен (как в случае со старостой и заместителем), то говорят о нахождении *числа размещений из n по k* . Это число обозначается символом A_n^k (читается «а из эн по ка») — от французского слова *arrangement* — размещение, расстановка, приведение в порядок. Два размещения считаются различными, если они отличаются или самими элементами, или порядком их расположения. Если же порядок элементов не важен (как в случае с парой дежурных), то говорят о нахождении *числа сочетаний из n по k* . Это число обозначается символом C_n^k (читается «це из эн по ка») — от французского слова *combinaison* — сочетание, комбинация. Два сочетания считаются разными, только если они отличаются своими элементами.

При решении задач на нахождение числа размещений и числа сочетаний самое главное — научиться различать эти комбинации.

■ **Задача 3.** В турнире участвуют 12 команд. Сколькими способами они могут занять пьедестал победителей?

Ясно, что для каждой команды очень важно не только войти в призовую тройку, но и занять как можно более высокое место (а еще лучше стать чемпионом). Конечно, в такой ситуации порядок важен. Поэтому если, например, призерами стали команды A , B и C , то все возможные тройки, различающиеся только порядком этих команд, т. е. ABC , ACB , BAC , BCA , CAB , CBA , — это разные варианты. Таким образом, для ответа на вопрос задачи нужно найти A_{12}^3 — число размещений из 12 по 3. Воспользовавшись правилом умножения, получим

$$A_{12}^3 = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320.$$

■ **Задача 4.** В турнире участвуют 12 команд. Цель первого круга — определение тройки финалистов. Сколькими способами могут быть отобраны три команды, вошедшие в финал турнира?

Понятно, что любая команда на этом этапе турнира ставит одну цель — войти в финальную тройку, а какое место она займет на этом предварительном этапе — значения не имеет. Таким образом, в этом случае порядок при выборе троек не важен, т. е. мы должны найти C_{12}^3 — число сочетаний из 12 по 3.

Для этого можно использовать результат предыдущей задачи. Шесть вариантов выбора, которые мы рассмотрели выше, отличающиеся только порядком элементов, теперь должны рассматриваться как один набор из трех элементов: A, B, C . Отсюда ясно, что в данном случае общее число вариантов должно быть в 6 раз меньше:

$$C_{12}^3 = \frac{1320}{6} = 220.$$

Обратите внимание: число 6, на которое мы разделили результат первой задачи, — это количество перестановок из трех элементов ($P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$). Поэтому решение задачи 4 можно было бы записать так: $C_{12}^3 = \frac{A_{12}^3}{P_3}$. Эта формула верна и в общем случае:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

■ **Задача 5.** На общем собрании жильцов дома нужно выбрать домовый комитет в составе трех человек. В списке кандидатов оказалось восемь человек. Сколько есть способов для выбора домового комитета?

В задаче ничего не сказано о распределении обязанностей между членами комитета, а значит, их следует считать равноправными. Поэтому нужно найти C_8^3 :

$$C_8^3 = \frac{A_8^3}{P_3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Выясните, какие комбинации рассматриваются в задаче — размещения или сочетания, и ответьте на вопрос (896—898):

896. а) Сколькими способами можно сплести трехцветный флаг с тремя горизонтальными полосами, если имеется материал 12 различных цветов?
- б) Сколькими способами можно выбрать 3 краски из имеющихся 12 различных красок?

897. а) В команде 10 спортсменов. Сколькими способами тренер может выбрать четырех спортсменов, чтобы расставить их по этапам эстафеты 4×100 м?
 б) В команде 10 спортсменов. Сколькими способами тренер может выбрать четырех спортсменов, которые побегут стометровку?
898. а) В шахматном кружке занимаются 15 человек. Сколькими способами тренер может набрать из них команду для игры на первой, второй, третьей, четвертой, пятой досках в турнире?
 б) В шахматном кружке занимаются 15 человек. Сколькими способами тренер может набрать из них команду из 5 человек для турнира?

Запишите ответ к задаче в общем виде, используя обозначения для числа размещений, сочетаний, перестановок (899—904):

899. Сколькими способами можно зачеркнуть 5 номеров из 36 в билете «Спортлото: 5 из 36»?
900. На плоскости отмечено 4 точки. Сколькими способами их можно обозначить буквами латинского алфавита? (В латинском алфавите 26 букв.)
901. На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
902. Сколькими способами из 30 учеников можно выбрать двоих для участия в математической олимпиаде? троих? четверых?
903. Сколькими способами можно выбрать 2 яблока и 3 груши из вазы с фруктами, в которой лежит 7 яблок и 5 груш?
904. В футбольной секции 24 человека. Сколькими способами можно выбрать из них футбольную команду (11 человек) так, чтобы Женя и Сережа не входили в команду одновременно?

Определите вероятность рассматриваемого события (905—907):

905. а) Пять друзей: Коля, Саша, Ваня, Петя и Толя — достали два билета на новый фильм. Кто пойдет в кино, решили определять по жребию. Какова вероятность того, что это будут Коля и Саша?
 б) Кодовый замок имеет десять кнопок с цифрами от 0 до 9. Он открывается одновременным нажатием трех определенных кнопок. Какова вероятность того, что человек, не знающий кода, откроет замок с первого раза?
906. В урне находятся 4 синих и 2 красных шара, одинаковые на ощупь. Не глядя, из нее вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что все они синие?

907. 1) В математике есть формула для нахождения числа размещений: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Используя эту формулу, решите еще раз задачи 896 (а), 897 (а), 898 (а). Получился ли у вас тот же ответ?

2) Используя формулы для числа размещений и числа перестановок, докажите формулу для нахождения числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Д3

Дополнительные задания к главе 6

Статистические характеристики среднего

908. На стадионе «Локомотив» была зафиксирована следующая посещаемость четырех футбольных матчей: 24 000, 18 000, 22 000, 24 000 зрителей.

а) Каково было среднее арифметическое посещаемости этих матчей?

б) Сколько зрителей должно посетить следующий матч, чтобы среднее арифметическое посещаемости выросло?

909. В таблице приведены данные о возрастном составе участников детского хора:

Возраст, годы	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Число участников	3	6	5	1	2	3	2	2	1

Найдите среднее арифметическое, моду и медиану возрастов участников хора.

910. В таблице показан расход электроэнергии в квартирах одного из подъездов четырехэтажного дома за март:

Номер квартиры	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Расход электроэнергии, кВт · ч	120	98	137	85	142	103	95	92	110	146	107	82

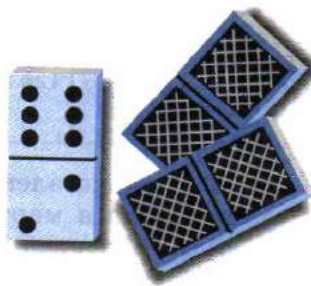
а) Сколько электроэнергии в среднем потребили жители этого подъезда в марте? (Найдите среднее арифметическое ряда.)

б) Каков средний расход электроэнергии в квартирах этого подъезда в марте? (Найдите медиану ряда.)

911. Сколько членов в числовом ряду, если его медианой служит:
а) десятый член; б) среднее арифметическое десятого и одиннадцатого членов?
912. а) Среднее арифметическое ряда, состоящего из девяти чисел, равно 12. К нему приписали число 2. Чему равно среднее арифметическое нового ряда?
б) Среднее арифметическое ряда, состоящего из шести чисел, равно 15. Из него вычеркнули число 10. Чему равно среднее арифметическое нового ряда?
913. Среднее арифметическое некоторых семи чисел равно 12, а среднее арифметическое других трех чисел равно 22. Найдите среднее арифметическое всех десяти чисел.
914. а) Каждый член некоторого числового ряда увеличили на 10. Изменится ли и как его среднее арифметическое? мода? медиана?
б) Каждый член некоторого числового ряда увеличили в 10 раз. Изменится ли и как его среднее арифметическое? мода? медиана?

Вероятность равновозможных событий

915. В лототроне находятся шары с номерами от 1 до 100. Шары были тщательно перемешаны, после чего один шар выпал. Какова вероятность того, что:
а) выпавший номер оказался двузначным;
б) выпавший номер кратен трем;
в) выпавший номер не делится на четыре;
г) выпавший номер не содержит цифру 5?
916. Слово «вероятность» написали на полоске картона, затем разрезали на буквы, перевернули и наугад вытянули одну букву. Какова вероятность того, что она будет гласной? что это будет буква «о»?
917. На стол выложили костяшки домино, перевернув их очками вниз; всего 28 штук. Наугад берут одну из них.
1) Какова вероятность того, что:
а) взятая костяшка содержит 6 очков;
б) взятая костяшка не содержит 1 очко;
в) сумма очков на костяшке равна 5?



2) Докажите, что равновероятны события:

А: взята костяшка, на которой есть 4 очка;

В: взята костяшка, на которой есть 5 очков.

918. 1) Для школьного новогоднего вечера напечатали 125 пронумерованных пригласительных билетов, между которыми будет разыгран главный приз. Какова вероятность того, что счастливый номер оканчивается:

а) цифрой 3; б) цифрой 9?

2) У Маши пригласительный билет с номером 33, а у Саши — с номером 99. Верно ли, что у Маши больше шансов получить главный приз, чем у Саши?

919. В урне находятся белые и синие шары, одинаковые на ощупь, всего 20 штук. Вероятность того, что вынутый наугад шар окажется белым, составляет 35%. Сколько в урне синих шаров?

920. 1) В корзине яблоко и груша. Из нее наугад вынимают один фрукт. Какова вероятность того, что это яблоко?
2) В корзине 2 яблока и груша. Из нее наугад вынимают один фрукт. Какова вероятность того, что это яблоко?
3) В корзине 3 яблока и груша. Из нее наугад вынимают один фрукт. Какова вероятность того, что это яблоко?
4) В корзине n яблок и груша. Из нее наугад вынимают один фрукт. Какова вероятность того, что это яблоко?

Указание. В задачах 1—3 посчитайте число всех возможных исходов, не забыв при этом, что каждое яблоко надо учитывать отдельно. Чтобы ответить на вопрос задачи 4, нужно подметить закономерность.



Вопросы для повторения к главе 6

1. Какие средние, используемые в статистике для изучения и обработки ряда данных, вы знаете?
2. Как найти медиану для ряда данных из нечетного числа элементов? из четного числа элементов? Найдите медиану ряда: 12; 17; 13; 9; 19; 15; 20; 9.
3. Запишите формулу вычисления вероятности случайного события в классической модели. Поясните, что означает каждая буква в этой формуле. Какому условию должны удовлетворять исходы эксперимента, чтобы можно было воспользоваться классическим определением вероятности?



Задания для самопроверки к главе 6

(Обязательные результаты обучения)

1. На заводе, выпустившем партию телевизоров новой марки, изучили, по каким ценам продают телевизоры этой серии в магазинах города. Получился следующий ряд данных: 5320 р., 5300 р., 4290 р., 5300 р., 5350 р., 4280 р., 5300 р., 5320 р., 5400 р., 5290 р. Определите все средние и размах цен на телевизоры новой марки в магазинах города.
2. В классе учатся 12 девочек и 18 мальчиков. По жребию выбирается один дежурный. Какова вероятность того, что дежурным окажется мальчик?
3. Фишку бросают наугад в прямоугольник со сторонами 6 см и 10 см. Какова вероятность того, что она попадет:
 - а) в квадрат со стороной 2 см, целиком лежащий в прямоугольнике;
 - б) в точку, расположенную от меньшей стороны прямоугольника на расстоянии, не превосходящем 1 см?



Тест к главе 6

1. Петя, готовясь к зачету по английскому языку, в течение двух недель ежедневно записывал, сколько новых слов он выучил. Получился следующий ряд данных:
12, 12, 14, 20, 28, 8, 14, 10, 15, 12, 14, 12, 10, 15.
Для каждой статистической характеристики этого ряда укажите ее значение:
1) среднее арифметическое; 2) размах; 3) мода; 4) медиана.
а) 12; б) 13; в) 14; г) 20.
Ответ. 1) _____; 2) _____; 3) _____; 4) _____
2. Сергей в течение учебного года в 8 классе получил следующие оценки по алгебре (без четвертных и годовых):

Оценка	2	3	4	5
Частота	/// (3)	/// / (6)	/// /// // (12)	/// /// (8)

Найдите среднее арифметическое, моду и медиану оценок Сергея.

Ответ. _____ — среднее арифметическое; _____ — мода;
_____ — медиана.

3. Для ряда, все члены которого — натуральные числа, нашли:
 I. Моду. III. Среднее арифметическое.
 II. Медиану. IV. Размах.
 Какие из этих статистических характеристик не могут выражаться дробными числами?
 А. Только I. В. I и IV.
 Б. I, II и III. Г. Все четыре.
4. Какое из чисел, являющееся статистической характеристикой ряда данных, всегда есть среди членов ряда?
 А. Среднее арифметическое. В. Медиана.
 Б. Мода. Г. Размах.
5. В упорядоченном ряду содержится 99 членов. Укажите номер члена, являющегося медианой этого ряда.
 А. Такого члена в ряду нет. В. 50.
 Б. 49. Г. 51.
6. В урне 3 красных и 7 синих шаров, одинаковых на ощупь. Не глядя, вынимают один шар. Укажите отношение, которое выражает вероятность того, что вынут синий шар.
 А. $\frac{7}{3}$. Б. $\frac{3}{7}$. В. $\frac{3}{10}$. Г. $\frac{7}{10}$.
7. В урне находятся красный, желтый и синий шары, одинаковые на ощупь. Их, не глядя, вынимают один за другим. Какова вероятность того, что синий шар будет вынут раньше красного?
 А. $\frac{2}{3}$. Б. $\frac{1}{2}$. В. $\frac{1}{3}$. Г. $\frac{1}{6}$.
8. В библиотеке у Ани есть сборники стихов шести любимых поэтов. Чтобы выбрать стихотворение к праздничному вечеру, она сняла их с полки, а затем случайным образом поставила обратно. Какова вероятность того, что сборники окажутся на полке в алфавитном порядке?
 Ответ. _____
9. Грани кубика желтого, красного и синего цвета. Вероятность выпадения желтой грани при подбрасывании кубика равна $\frac{1}{6}$, красной — $\frac{1}{2}$. Сколько у кубика желтых, красных и синих граней?
 Ответ. Желтых — _____, красных — _____, синих — _____

- ГЛАВА 1**
4. а) $-\frac{5}{12}$; б) 1; в) 0; г) $-2,9$. 6. а) $\frac{3}{2}$; б) $-\frac{2}{3}$; в) $2\frac{1}{4}$; г) $\frac{4}{9}$. 12. а) $\frac{3}{16}$; б) $1\frac{2}{3}$; в) $2\frac{1}{12}$; г) $-0,11$. 18. а) $c = \frac{S-ab}{a+b}$; б) $h = \frac{S}{2\pi r} - r$.
28. а) $x - 3y$; б) $\frac{1}{a+2b}$; д) $\frac{2a}{b-3}$; е) $\frac{5n}{n-2}$. 29. а) y ; в) $\frac{m-n}{n}$; д) $3 - a$; е) $\frac{c}{a+b}$. 30. а) $\frac{x-y}{x+y}$; в) $\frac{x-3}{x+3}$. 35. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{4}$. 36. а) $x + y$; в) $\frac{a-b}{2}$; д) $p + 1$; е) $\frac{1}{a-b}$. 38. а) $\frac{a}{a+b}$; б) $\frac{m-p}{p}$; в) $\frac{a+1}{a}$; г) $\frac{x+y}{b+c}$; д) $x + y - z$; е) $\frac{a-b+c}{a+b+c}$. 40. д) $\frac{a}{b}$; е) $\frac{b}{b-c}$. 41. а) $-\frac{y}{y+1}$; г) $-\frac{5a}{b}$; д) $\frac{m+n}{m-n}$; е) $\frac{z}{z-3}$; з) $-a$; и) $\frac{n-p}{n}$. 43. а) $\frac{b-a}{2}$; б) $\frac{m+n}{4(m-n)}$. 50. б) $\frac{3a^2+5}{a^2+a}$; г) $\frac{mn+n^2}{mn-m^2}$; д) $\frac{c^2+d^2}{q^2-pq}$. 52. а) $\frac{3n-7}{10n}$; б) $\frac{y+1}{xy}$; в) $\frac{1}{y^5}$; г) $\frac{a-z}{axyz}$; д) $\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}$; е) $\frac{a+1}{a^2bc}$. 54. а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{x}{12(x-1)}$; в) $\frac{1}{ab}$; г) $\frac{3x-3y}{xy}$. 56. а) $\frac{2b}{a^2-b^2}$; б) $\frac{5}{c-5}$; г) $\frac{y}{(y-1)^2}$; д) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$. 57. а) $\frac{4}{x-5}$; в) $\frac{a-c}{a}$; д) $\frac{2}{ab}$; д) $\frac{1}{xy}$. 61. а) $\frac{a+ab}{b}$; г) $\frac{a+b-ab}{ab}$; д) $\frac{(b-c)^2}{bc}$; е) $\left(\frac{p-1}{p}\right)^2$. 62. а) $\frac{10x-5y}{x-y}$; г) $\frac{16c}{c-8}$; е) $\frac{mn+1}{n}$; з) $\frac{ab+1}{ab}$. 63. а) 1; б) $\frac{2}{a+b}$; в) $\frac{1}{y}$; г) $a + b$. 65. а) $\frac{2a}{a^2-x^2}$; б) $\frac{4b}{b^2-a^2}$; в) $\frac{4}{m^2-n^2}$; г) $\frac{x-y}{xy+y^2}$. 66. в) $\frac{x+1}{x(x-1)^2}$; г) $\frac{mn}{m^3+n^3}$. 67. б) $\frac{1}{a^2-a}$; в) $\frac{a+b}{ab}$; д) $\frac{3x}{(3+x)^2}$; е) $\frac{1}{(y-1)^2}$. 68. а) 1; в) $\frac{a}{4-a^2}$; г) $\frac{2}{(1-x)^2}$. 69. а) $\frac{2xy-x}{y}$; г) $\frac{36+b^2}{6+b}$; д) $\frac{8}{x-2}$. 78. а) $\frac{x^2}{a^2}$; б) $\frac{b+c}{b-c}$; в) $\frac{5x}{x-y}$; д) $\frac{a+b}{ab+b}$. 80. а) $-10x$; б) $-\frac{a+c}{c}$; в) $-\frac{a+b}{ab}$; г) $\frac{y-x}{y+x}$. 84. б) $2a - 4$; д) $\frac{n+2}{3n-6}$; е) $x + z$; з) $\frac{1}{a(a-b)^2}$. 85. а) $\frac{a^2}{x}$; б) $\frac{2b}{5a}$; в) $\frac{x^5}{y}$; г) $\frac{a^2b^2}{c}$; д) $3y^2$; е) $\frac{1}{3n^2}$. 86. а) $\frac{(x-3)(x+5)}{x^2}$; б) $\frac{d(b-a)}{a^2}$; в) $\frac{2(x-y)}{x^2}$; г) $\frac{a(a+2)}{6}$. 87. а) $\frac{d^2(d-c)}{(c+d)^2}$; б) $\frac{b-a}{3(a+b)}$; в) $-\frac{2y+2z}{(2y-2z)^2}$; г) $\frac{9}{8(2-x)}$. 88. а) $-\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$;

- б) $-\frac{2(x+z)^2}{x^2}$; в) $\frac{p^2+pq+q^2}{p^2-q^2}$; г) $\frac{x^2+4}{x^2-2x+4}$. 91. а) $\frac{x+y}{xy}$; в) $\frac{a-2}{a}$; г) u^3+uv ;
 е) ab^2-a^2b . 92. а) $\frac{b-a}{ab}$; б) x^2y-xy^2 ; в) $\frac{x-y}{xy}$; г) a^2b^2 . 93. а) $\frac{a-b}{b-1}$;
 в) $\frac{an}{n+a}$. 94. а) $\frac{uv}{u^2-v^2}$; б) $-\frac{z}{x}$; в) $\frac{a+b}{a-b}$; г) $\frac{2}{y}$. 96. а) $c^2+\frac{1}{c^2}$; б) -8 ; в) 2 ;
 г) $4a+4$. 97. б) $\frac{3q+p}{3q-p}$; г) $\frac{x-y}{x+y}$; д) $\frac{b}{a}$; е) v . 99. а) $\frac{1-x}{x}$; б) $5-a$;
 в) $\frac{y}{y^2-x^2}$; г) $\frac{2b}{4-b^2}$. 100. а) $m-3$; б) $-\frac{1}{n+1}$; в) $\frac{x^2+xy}{y}$; г) $\frac{uv}{u-v}$.
 103. а) $-\frac{z+1}{z^2}$; б) $10-2a$; в) $\frac{(a^2-b^2)^2}{4(a^2-b^2)}$; г) $\frac{x-1}{(x+y)^2}$. 120. а) $1,5$; б) 2 ;
 в) $\frac{2}{9}$; г) $\frac{1}{4}$. 129. а) $10,2$ млн шт.; б) $13\,980$ тыс. км². 131. 460 тыс. телеграмм.
 132. а) 86 чашек; б) 9 книг; в) 8 человек на 1 км². 138. а) $a^{-3} < a^{-2}$; б) $a^{-3} > a^{-2}$. 139. а) $0,1$; $\frac{10}{11}$; 5 ; б) 10 ; $\frac{1}{11}$; $\frac{1}{20}$; в) 1 ;
 $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. 140. а) 510 млн км²; б) 1082 млрд км². 142. За $8,3$ мин и за $4,3$ года.
 143. 11% . 150. а) x^{-11} ; б) a^{-4} ; г) y^{28} ; д) c^{-7} ; з) $0,01b^2$; и) $2x^{-6}$.
 151. а) $\frac{1}{25}$; в) $0,01$; г) $\frac{1}{27}$; е) 32 . 153. а) a^{-2} ; $0,01$; в) a^{-4} ; $\frac{81}{16}$.
 155. а) $36\,000\,000$; б) 1260 ; г) $0,0016$; д) $0,06$; ж) $0,0005$. 156. а) $2^{2(x+y)}$; $2^{3(x-y)}$; 2^{-2xy} ; б) 2^{2n} ; 2^{24n} ; 2^{6n} . 157. а) 9 ; б) 5 ; в) $\frac{1}{9}$;
 г) $40,5$. 158. а) $2a$; б) $4a$; в) $2a^2$; г) $\frac{a}{2}$. 159. а) $\frac{5}{3}$; б) $\frac{4}{49}$; в) $\frac{3}{2}$; г) $\frac{5}{2}$.
 161. а) $0,3$; б) $99,99$; в) 24 . 166. а) $x=33$; б) $x=-20$; в) $x=-0,4$; г) $x=8$.
 167. а) $x=-3$; б) $x=1,5$; в) $x=3$; г) $x=-2$. 168. в) $x=3$; г) $x=5$. 169. 3500 р. 171. 1200 м. 172. 10 км. 173. В 196 км от А.
 175. 3300 р. 177. а) $x=-8$; б) $x=1$; в) $x=4$; г) $x=-1,5$. 178. На $3,75$ км. 180. 280 соток. 181. 160 страниц. 182. 14 км. 183. 20 г.
 185. 32 г. 187. 64 г. 188. В первом слитке 12 г серебра, во втором — 8 г. 192. Существуют; $n=0$ и $n=-1$. 193. а) $n=-3$; 0 ; 1 ; 4 ; б) $n=0$; 1 ; 3 ; 4 . 196. а) $n=3k+1$, $k \in \mathbb{N}$; б) $n=3k-4$, $k \in \mathbb{N}$. 199. а) $6,5$;
 б) $-2\frac{1}{3}$; в) -9 ; г) $100,25$. 204. а) $\frac{x+y}{a+y}$; б) $\frac{m+1}{m-1}$; в) $y+1$; г) $\frac{p-q}{p+q}$;
 д) $\frac{x-y}{x+y}$; е) $x+y$. 206. а) $\frac{2x^4}{(x^2-2)^3}$; б) $\frac{3a^2}{a^3-c^3}$; в) $\frac{a^2+a+1}{a(3-a)}$; г) $\frac{a+b}{a-b}$.
 207. а) 3 ; б) $\frac{a+b}{a-b}$. 217. а) $x=7$; б) $x=5$; в) $x=-110$; г) $x=-13$.
 218. $7,5$ км. 219. 30 км. 220. 37 км. 222. 45 г.

Тест к главе 1. 1. Б. 2. 1) — в); 2) — б); 3) — а); 4) — г). 3. Б.
 4. $\frac{a+x}{x}$. 5. Г. 6. $\frac{2x^2+18}{x^2-9}$. 7. В. 8. $\frac{x+y}{2xy}$. 9. $\frac{a+b}{b-a}$. 10. Б. 11. А. 12. В.
 13. В. 14. Б. 15. Г. 16. 1) — в); 2) — а); 3) — б).

ГЛАВА

2

265. а) $a = \sqrt{2S}$; $a \approx 4,5$ см; б) примерно 4 с. 270. а) $H = \frac{3V}{\pi R^2}$;
 $R = \sqrt{\frac{3V}{\pi H}}$; б) $h = \frac{3V}{2\pi R^2}$; $R = \sqrt{\frac{3V}{2\pi h}}$. 271. г) Перебором натуральных чисел,
 не превосходящих $\sqrt{a}$. 274. $\approx 5,6$ м. 278. 100 см. 279. 30 см и 40 см.
 282. $r \approx 4,2$ см. 283. а) $AB = 10$; б) $AB = 13$; в) $AB = 5$. 284. Нельзя.
 285. а) $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. 287. в) Указание. Используйте следующие
 равенства: $\sqrt{10} = \sqrt{9+1}$; $\sqrt{13} = \sqrt{9+4}$; $\sqrt{17} = \sqrt{16+1}$. 304. а) 4; 0;
 б) 2; 0; в) $5 + \sqrt{2}$; $5 - \sqrt{2}$; д) $10 + \sqrt{2}$; $10 - \sqrt{2}$; е) 5; -3. 305. а) $a + b = 10$;
 $a - b = 4$ или $a - b = -4$; г) $a + b = 3$ или $a + b = -3$; д) 4. 307. а) $\sqrt{8}$;
 б) $2\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $3\sqrt{2}$. 314. а) $0,5^2 < 0,5 < \sqrt{0,5}$; б) $\sqrt{12,5} < 12,5 < 12,5^2$.
 316. В. 322. а) $\frac{3}{20}$; б) $\frac{16}{21}$; в) $\frac{7}{8}$; г) $5\frac{17}{20}$. 326. в) 1500; г) 3600; д) 9,6;
 е) 0,009. 331. г) 44; д) 6; е) $\frac{1}{5}$; з) $\frac{10}{3}$; к) $\frac{1}{2}$; л) 36; м) $\frac{1}{15}$. 339. ж) $\sqrt{0,5}$;
 з) $\sqrt{10}$. 342. г) $2\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; д) $5\sqrt{\frac{3}{5}} = 3\sqrt{\frac{5}{3}}$; е) $\frac{1}{3}\sqrt{20} > \frac{1}{2}\sqrt{8}$. 344. а) $2\sqrt{3}$;
 б) $-\sqrt{2}$; в) $\frac{1}{18}$; г) -18; д) $27\sqrt{2}$; е) $-2\sqrt{2}$. 348. а) $300\sqrt{2}$; б) $540\sqrt{3}$;
 в) $720\sqrt{3}$; г) $2400\sqrt{7}$. 349. а) $12a^3$; д) $6m^2\sqrt{2m}$; е) $3\sqrt{6n}$.
 350. в) $-2\sqrt{\frac{1}{2}} < -\sqrt{0,6} < \frac{3}{5} < 2\sqrt{0,2} < 1$; г) $\frac{5}{12} < \frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{\sqrt{2}}{3}$. 354. д) $2\sqrt{2}$; е) $7\sqrt{3}$;
 ж) $2\sqrt{2}$; з) $\sqrt{5} - 4\sqrt{3}$. 355. а), г) Рациональным; б), в) иррациональ-
 ным. 357. д) $30 - 5\sqrt{5}$; е) $2\sqrt{66}$. 358. в) $2\sqrt{3}$; г) $1 - 2\sqrt{6}$.
 359. б) $2\sqrt{5} - 5$; в) $2\sqrt{5} - 5$; г) $-2\sqrt{5} - 5$. 360. б) $\frac{1}{4}$ и $-2\sqrt{3}$; в) $\frac{3}{2\sqrt{6}}$
 и $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; г) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ и $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 362. а) $3\sqrt{2} - 2$ см²; б) $10 + \sqrt{2}$ см². 365. Г.
 368. в) $-3\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$; г) $10(\sqrt{15} - 6)$. 369. б) $0,1(\sqrt{m} - \sqrt{n})$. 370. а) $\frac{2}{3}$;
 б) $-\frac{1}{4}$. 371. б) -76; г) $-17 - 4\sqrt{6} - 10\sqrt{2}$. 372. б) 3; г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 374. а) 38;
 б) $4\sqrt{5} - 4$. 375. а) В; б) В. 376. а), б), г) Верно; в) неверно.

377. а) $2\sqrt{6}$; б) $-4\sqrt{6}$. 378. а) -1 ; б) $\frac{17}{64}$. 381. а) $\frac{5+\sqrt{5}+\sqrt{30}}{10}$;
 б) $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}$. 382. а) $\frac{\sqrt{ab}}{b}$; б) $\frac{2\sqrt{y}}{y}$. 384. а) $-9a$; б) $2x\sqrt{6}$;
 в) $0,4ac$; г) $-2\sqrt{2}mn$. 386. б) y^{2n} ; в) $|x^n|$. 387. а) Это график зависи-
 мости $y = |x|$; б) эту зависимость можно задать равенством $y = x$,
 где $x \geq 0$. 390. в) 5 и 6; г) 6 и 7. 391. а) 1,260; б) 2,154; в) 3,302;
 г) 0,464; д) 4,031; е) 0,368. 396. 4 дм. 398. $a = \sqrt[3]{4\sqrt{3}V}$. 399. ≈ 10 м.
 401. 4) $\sqrt{0,51} < \sqrt{0,96} < \sqrt[3]{0,96} < 1 < \sqrt[3]{5,1} < \sqrt[3]{7,4} < \sqrt{7,4} < \sqrt{10}$.
 402. а) $5 + \sqrt{2}$; б) $2 + \sqrt{5}$. 403. а) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$; б) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; в) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$;
 г) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$. 404. а) $3 - 2\sqrt{2}$; б) $10 + \sqrt{2}$. 406. а) $1 + \sqrt{11}$; б) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$.
 407. $\sqrt{57 - 2\sqrt{15}} = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$. 409. б) $s = \frac{at^2}{2}$; $a = \frac{2s}{t^2}$; $v_1 = \frac{\sqrt{v_2^2 m_2}}{m_1}$;
 $v_2 = \frac{\sqrt{v_1^2 m_1}}{m_2}$; $m_1 = \frac{v_2^2 m_2}{v_1^2}$; $m_2 = \frac{v_1^2 m_1}{v_2^2}$. 412. а) 0,03; б) 8; в) -3; г) 4,8.
 413. а) 5; б) $6\sqrt{2}$; в) 1; г) $\sqrt{3}$. 418. а) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{2-\sqrt{7}}$; в) $\frac{21}{2+\sqrt{10}}$;
 г) $-\frac{6\sqrt{15}}{11}$. 419. а) $\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; б) $\sqrt{ab}$; в) $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$; г) $\frac{2-\sqrt{a}}{2+\sqrt{a}}$; д) $1 + \sqrt{a} + a$;
 е) $\frac{1}{3+\sqrt{x}}$. 420. а) $\frac{1-\sqrt{a}}{3}$; б) $\frac{1-\sqrt{x}}{3}$. 421. а) $-3a^3b^3$; б) $4a^3b\sqrt{b}$.

Тест к главе 2. 1. 1. 2. В. 3. А. 4. Б. 5. Б. 6. В. 7. Г. 8. 1) — б);
 2) — в); 3) — а). 9. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 10. В. 11. $0,3 < \sqrt{0,3} < \sqrt{1,5} < 1,5$.
 12. 60. 13. Г. 14. 6. 15. Б. 16. $\frac{4}{3}$. 17. А. 18. $2\sqrt{15}$. 19. $\frac{1}{3}$. 20. А.

ГЛАВА

3

429. б) -12; -2; г) нет корней. 431. а) $-\frac{2}{3}$; -2; г) нет
 корней; е) $\frac{3}{2}$. 438. в) $-\frac{3}{5}$; 1; д) 3; $3\frac{1}{2}$; з) $-\frac{2}{7}$; 1.
 439. в) $-1\frac{2}{3}$; -1; г) $-1\frac{1}{2}$; 2. 441. д) $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; ж) $6-3\sqrt{2}$; $6+3\sqrt{2}$.
 445. б) $-1\frac{1}{2}$; 0; $1\frac{1}{5}$; г) 0; $1\frac{1}{2}$. 446. б) -4; $\frac{2}{3}$; 1; г) -5; $-1\frac{1}{2}$; 3.
 450. г) 4; 14; е) -1; 2; з) -2; 14. 451. е) $-\frac{7}{10}$; $\frac{1}{2}$; з) -6; $1\frac{1}{2}$.
 454. б) -1; 2; в) $\frac{2}{3}$; 4. 456. б) $-\sqrt{7}$; г) $-\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$. 457. в) -1; 1; г) нет

корней. 459. в) 1; 9; г) 16; 25. 460. а) $\frac{1-\sqrt{41}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{41}}{2}$; -1; 2; б) $2-\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$. 465. а) -15 и -14; 14 и 15; б) 17 и 19. 466. а) -7; -6; б) 7; 9. 467. а) 21 см и 30 см; б) 11 м и 15 м. 468. 20 м и 30 м; 10 м и 60 м. 469. 70 см. 470. 5 см, 12 см, 13 см. 471. 12 км/ч, 16 км/ч. 474. а) 3,4 с; б) 9,2 с. 475. а) 1 с и 2 с. 476. 0,6 с и 1,4 с. 477. 12 дм и 18 дм. 479. 1,5 м. 480. 0,5 м. 481. Да; 6, 8, 10. Нет. 483. 6 человек. 484. 17 учащихся. 485. 16 шахматистов. 486. 15 точек. 487. На 30%. 488. На 20%. 489. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$. 493. в) $-2\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$; д) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 496. г) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; д) 0; 5. 497. в) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 0; д) 0; 5. 498. а) 5 и 6; б) 7 и 8. 499. а) 2,4 дм; б) 240 см². 501. 5×15 см и 5×10 см. 502. а) 2 с; б) 2,4 с. 503. а) $-\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $2\sqrt{6}$; $-2\sqrt{6}$; в) 0; 3; г) $-\sqrt{\frac{7}{3}}$; $\sqrt{\frac{7}{3}}$. 505. а) -1; 1; б) 0; 1; 3; в) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; -2; 2; г) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; 5. 510. Указание. Введите замену: а) $y = 6 - 3x$; б) $y = 5x - 8$. 511. а) 3 и 4; б) 6 и 8. 512. ≈ 2 см и ≈ 4 см. 523. б) $x = -\frac{2}{3}$; $p = 8$. 524. б) $x = -\frac{9}{2}$; $q = -27$. 527. а) $y^2 - 183y - 222 = 0$; б) $y^2 + 185y - 1814 = 0$. 528. б) $x^2 - 2x - 3 = 0$ и $x^2 + 2x - 3 = 0$. 535. в) $(3-z)(4z+1)$; е) $(n+1)(7n+2)$. 538. в) $\frac{y-3}{2y}$; е) $\frac{n+1}{n+4}$. 539. в) $x(x-8)(x-4)$; г) $x^2(x-2)(x+3)$. 543. б) $k = 4$; г) $k = -12$. 544. д) $\frac{2x-5}{2x-1}$; е) $-\frac{3x+2}{x+3}$. 545. г) $(a-2)(a+2)(a+1)(3a-1)$. 547. е) $(x+1)(x+3)$. 550. б) 3; -7; -1; в) -1; 5; д) -1; 1; -2; 2; 3. 551. а) 1; -2; б) -1; 2; 11; в) -1; 3; $\frac{3}{2}$; г) 1; 10; $-\frac{1}{5}$. 552. а) $(x+1)(x-1)^3$; б) $(x+1)^2(x+2)(x-3)$; в) $(x-1)(x+5)(4x+5)$. 555. а) $\pm\sqrt{2}$; ± 2 ; б) ± 1 ; в) $\pm\frac{1}{3}$; ± 3 ; г) нет решений. 556. а) 1; 25; в) $\frac{1}{25}$; 1. 557. а) 0; б) 0. 559. б) 10 см и 14 см. 560. а) 12 и 14; б) 2 решения: 4 и 5; -5 и -4. 562. Да; -2; -1; 0; 1; 2. 563. 20 школьников. 564. На 150 книг. 565. а) $ax^2 + mbx + m^2c = 0$. 570. а) $\frac{-a-2}{a^2+a+1}$; б) $\frac{2a-14}{a^2-2a+4}$.

Тест к главе 3. 1. 3; 3,5. 2. 1) — б); 2) — в); 3) — а). 3. -7 и 3. 4. А. 5. -48. 6. Г. 7. В. 8. В. 9. $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. 10. Г. 11. 0; 0,5; -0,5. 12. Г. 13. -3; 3. 14. В. 15. Б. 16. Б. 17. 3; 8 и -4; 1. 18. Г.

573. В. 577. в) (1; 8), (2; 6), (3; 4), (4; 2); г) (2; 5), (4; 4), (6; 3), (8; 2), (10; 1). 578. Г. 580. а) 8; б) 8; в) бесконечное множество; г) бесконечное множество.

582. Пятиугольников и шестиугольников соответственно 2 и 15, 8 и 10, 14 и 5, 20 и 0. 583. 8 решений; по алгебре и геометрии соответственно: 4 и 22, 8 и 19, 12 и 16, 16 и 13, 20 и 10, 24 и 7, 28 и 4, 32 и 1. 584. 4 решения: 18 ч и 0 тарелок, 19 ч и 5 тарелок, 20 ч и 10 тарелок, 21 ч и 15 тарелок. 585. 3 решения: 5 и 12 задач, 10 и 8 задач, 15 и 4 задачи. 593. В. 599. а) (5; 15); б) (1; 6). 600. 45 кв. ед. 601. а) $a = 2$; б) $b = 3$. 603. а) (3; 3), (6; 2), (9; 1); если считать, что координатной четверти принадлежат и оси, то надо добавить еще точки (0; 4) и (12; 0); б) 3 точки; если считать и точки на координатных осях, то 5 точек. 605. (0; 0), (1; 0), (-1; 0), (0; -2). 606. (1; 0), (-3; 0), (0; $\sqrt{3}$), (0; $-\sqrt{3}$). 627. а) Прямые не пересекаются; б) точка пересечения (-2; 3); в) точка пересечения (4; 1); г) прямые не пересекаются. 628. а) $y = 20 - 9x$; б) $y = 1,5 - 0,2x$; на высоте 0,7 м; через 7,5 ч. 630. в) $y = \frac{2}{3}x + 5$. 639. а) (0; 0); б) (7; -5); в) (0,8; -1,3); г) $\left(\frac{6}{7}; \frac{1}{7}\right)$; д) $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$; е) (-0,6; 3). 640. а) (3; -1); б) (6; -2); в) (57; 48); г) (1; 2); д) (2; -1); е) (2; -2). 641. а) $x = 4$, $y = -5$; б) $x = 10$, $y = 11$; в) $x = \frac{4}{11}$, $y = 1\frac{7}{11}$; г) $x = -0,6$, $y = -4,2$. 645. а) $x = 8$, $y = 6$; б) $u = 2,5$; $v = 3$; в) $p = 17,5$, $q = -14$; г) нет решений. 646. а) $x = -3,5$, $y = 7,5$; б) $a = 12,5$, $b = -2,5$. 647. До оси x 0,8, до оси y 0,6, до начала координат 1. 652. а) (5; -2); б) (1; -1); в) (-47; 125); г) (-5; -7); д) (1; -3); е) (2; 1). 653. а) (4; -5), IV четверть; б) (10,5; 12,5), I четверть; в) (-13,5; -33), III четверть; г) (-6; 24), II четверть. 654. а) (-4; -3) и (4; 3); б) (4; 2) и (2; 4); в) (3; -2) и (-3; 2); г) ($\sqrt{8}$; $\sqrt{8}$) и ($-\sqrt{8}$; $-\sqrt{8}$). 655. а) Пересекаются, точки пересечения: (-2; 4) и (1; 1); б) не пересекаются; в) пересекаются, точки пересечения: (3; -9) и (-1; -1). 656. а) (8; 4) и (4; 8); б) (-2; -6) и (6; 2); в) (0; 2) и (-4; -2); г) (-6; -2) и (2; 2); д) (7; 3) и (7; -3); е) (-2; 3) и (2; 3). 657. а) (2; -5); б) (-3; 4); в) (-18; 6). 658. а) $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$; б) (4; -4); в) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; г) $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right)$. 659. а) $x = 90$, $y = 120$, $z = 3$; б) $m = -10$, $n = 12,5$, $p = -2,5$; в) $a = 0$, $b = -3$, $c = -1$; г) $s = -1$, $u = -4$, $v = 1$. 660. а) $x = 2$, $y = 0$, $z = 1$; б) $x = 20$, $y = 5$, $z = 15$; в) $x = 6$, $y = 1$, $z = -4$; г) $x = 12$, $y = 2$, $z = -4$. 661. а) $x = -2$, $y = 0$, $z = 4$; б) $x = -1$,

$y = -2$, $z = 3$, $u = 4$. 662. а) $(-2; 4)$, $(3; -1)$; б) $(1; 1)$, $(-0,6; 1,8)$; в) $(7; 5)$, $(7; -5)$, $(-7; 5)$, $(-7; -5)$; г) $(3; 2)$, $(3; -2)$, $(-3; 2)$, $(-3; -2)$. 663. а) $x = 17$, $y = 15$; $x = 10$, $y = 6$; б) $x = 8$, $y = 7$; $x = 4$, $y = 1$; в) $x = 12$, $y = 10$. 667. а) 20 пятикопеечных и 5 десятикопеечных; б) 6 коробок по 250 г и 4 коробки по 150 г. 668. а) 24 р., 6 р.; б) 12 р. — цена пирожка, 10 р. — цена бутылки воды. 669. а) 800000 р. и 1000000 р.; б) 200 р. и 260 р. 670. а) По 600 р.; б) 420 девочек и 480 мальчиков. 671. а) Невозможна; б) возможна. 672. а) 6 и 14; б) 8 и 15. 673. а) 24 м и 30 м; б) 15 м и 25 м. 674. а) 8 см и 6 см; б) 5 см и 12 см. 675. 15 км. 676. 900 р. 677. а) 5 шестиугольников и 10 квадратов. 678. 750 г и 250 г. 679. а) 14 мл 60%-ного и 21 мл 80%-ного; б) 25 мл 4%-ного и 50 мл 10%-ного. 680. а) 4 ч 15 мин и 12 ч 45 мин; б) 3 ч со скоростью 70 км/ч и 1 ч со скоростью 90 км/ч. 681. 35 лет, 10 лет, 60 лет. 682. 25 км, 40 км, 60 км. 683. 3 кг, 3 кг, 2 кг. 688. а) $7x + 4y = 19$; б) $4x - 5y = 1$. 689. а) $(2; -2)$; не проходит; б) пересекаются. 690. а) $y = 1,5x + 1$; б) $y = -0,75x + 2,5$. 692. а) Да; б) нет. 693. При $k = 1$. 694. $(-3; 4)$; $(-5; -4)$; $(0; 2)$. 695. а) $y = \frac{1}{3}x + 1$; б) $y = \frac{1}{3}x - 1$; в) $y = -\frac{1}{3}x - 1$.

696. 5) б) $y = \frac{2}{3}x - 4$; в) $y = \frac{2}{3}x + 3$. 702. $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 4 \end{cases}$ (рис. 4.40); $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 2x \end{cases}$

(рис. 4.41); $\begin{cases} y \leq x + 2 \\ y \leq -x + 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ (рис. 4.42); $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2 \\ |x| \geq 1 \end{cases}$ (рис. 4.43). 704. а) При

$a = \pm 3$; б) при $b = \pm 2$. 705. а) При $c = 1$; б) при $a = 2$. 707. а) 1; б) -4.

711. Можно; возможные способы: 5 двухрублевых и 5 пятирублевых монет; 10 двухрублевых монет и 3 пятирублевые монеты; 15 двухрублевых монет и одна пятирублевая монета. 712. 2 маленьких и 7 больших. 713. а) $(1; 4)$, $(3; 3)$, $(5; 2)$, $(7; 1)$; б) $(-1; 6)$, $(-3; 3)$.

714. а) $(\frac{1}{4}; 2\frac{3}{4})$; б) $(4; 2)$; в) $(-1; 2)$; г) $(2; -1)$. 715. а) 4; б) 3. 716. а) 6;

б) 60. 717. а) Сестре 5 лет, брату 1 год; б) сестре 12 лет, брату 16 лет. 719. 15 заданий. 721. 400 г арахиса и 300 г лесных орехов. 722. 35 лет, 30 лет и 5 лет. 723. 35 л, 20 л, 25 л. 724. 30 км. 725. 1000 р.

Тест к главе 4. 1. Б. 2. В. 3. Г. 4. 1) — в); 2) — б); 3) — а); 4) — г). 5. Г. 6. Б. 7. 1) — в); 2) — б); 3) — г); 4) — а). 8. Г. 9. Г. 10. Г. 11. А. 12. $x = 1$, $y = -\frac{1}{3}$. 13. В. 14. Б.

735. а) Олег — 100 м/мин, Петр — 75 м/мин; б) Олег — 80 м/мин, Петр — ≈ 86 м/мин. 738. б) $c = 50 - 5n$,

n — натуральное число, $n \leq 10$. 739. а) $p = \frac{n(n-3)}{2}$, n — натуральное

число, $n \geq 4$; б) $r = \frac{m(m-1)}{2}$, m — натуральное число, $m \geq 2$. 743. Г.

746. в) $x = 12$; г) $x = 0,1$. 747. г) x — любое число; д) $x \neq -1,5$ и

$x \neq 1,5$. 749. б) $4\sqrt{3} - 1$; $5\frac{2}{3}$; 6. 752. в) $x = -1$ и $x = 1$; г) $x = \sqrt[3]{-33}$.

753. а) $x \geq 0$ и $x > 0$; б) $x \neq 2$ и $x \neq \pm 2$. 755. а) -1 ; б) 0 ; в) 7 ; г) 4 .

765. а) В точках $(-4; 0)$ и $(3; 0)$; б) нет; в) в точках $(0; 0)$; $(1; 0)$ и $(-1; 0)$; г) нет. 766. в) Ось x — в точках $(-4; 0)$ и $(4; 0)$, ось y —

в точке $(0; -16)$; г) ось x — в точках $(-\sqrt{2}; 0)$ и $(\sqrt{2}; 0)$, ось y — в точке $(0; 2)$. 772. б) $y = -x^2 - 1$. 775. а) $A(-3; 0)$; $B(1; 0)$; $C(0; -3)$;

б) $A(-\sqrt{5}; 0)$; $B(-1; 0)$; $C(1; 0)$; $D(0; 5)$. 780. в) -1 ; $\frac{2}{3}$; г) $-\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$.

781. в) -5 ; 0 ; 5 ; г) 0 ; 36 . 785. б) -1 ; 0 ; 4 ; в) -1 ; 1 ; г) 1 ; е) -3 ; 0 .

791. $y = 1000 - 25x$. 792. а) $f(0,3) = 28$; $f(-2,4) = -242$; б) $f(x) = 0$ при $x = 0,02$; $f(x) = -5$ при $x = 0,03$. 797. а) $f(x) = g(x)$ при $x = 4$;

$f(x) > g(x)$ при $x > 4$; $f(x) < g(x)$ при $x < 4$. 798. а) $y = 5x + 10$ и $y = 2x + 10$; б) $y = 50x$ и $y = 50x - 25$. 801. 1 ; 4 км/ч.

804. а) $s = 40t + 20$, где s — расстояние, см; t — время, мин; б) $0 \leq t \leq 9,5$. 805. а) $y = 0,3x$, где y — расстояние, км; x — время, с;

б) $y = \frac{x}{0,3}$, где y — время, с; x — расстояние, км. 806. 1. 819. а) $(1; -1)$

и $(-1; 1)$; б) $(1; 2)$ и $(-2; -1)$. 822. б) $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$ и $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

823. $k = -3$. 845. $(2 - 2\sqrt{2}; 7)$; $(2 + 2\sqrt{2}; 7)$; $(-2; 15)$; $(6; 15)$. 847. а) Да,

в точках $(-2\sqrt{2}; 12)$ и $(2\sqrt{2}; 12)$; б) нет. 848. $y < 0$ при $x > 1,4$; $y \geq 0$

при $y \leq 1,4$. 853. а) $(-\sqrt{6}; -\sqrt{6})$; $(\sqrt{6}; \sqrt{6})$; б) $(-\sqrt{15}; \sqrt{15})$; $(\sqrt{15}; -\sqrt{15})$.

Тест к главе 5. 1. $s = 800 - 70t$. 2. Г. 3. В. 4. Г. 5. А. 6. $x \neq -2$

и $x \neq 2$. 7. 1) — в); 2) — г); 3) — а); 4) — б). 8. 4. 9. $f(-4) = 0$.

10. В. 11. В. 12. 2), 3). 13. Оля — 1); Ира — 3); Зоя — 4);

Аня — 2). 14. Б. 15. Б. 16. В. 17. Г.

861. а) 149,95; б) 149,95; в) 157,45. 862. $\approx 3,8$; 4; 4.
 863. Среднее арифметическое $\approx 2,8$, мода и медиана 3.
 Среднее арифметическое увеличится, мода и медиана не изменятся.
 864. 152000; 100000; 100000. 865. б) 1,9; в) 2; г) 2. 867. а) Да;
 б) да; в) нет; г) нет; д) нет. 868. а) 0,25; б) $\frac{3}{8}$; в) 0,95. 869. $P(A) = \frac{1}{6}$;
 $P(A) = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{2}{3}$; $P(D) = 0$; $P(E) = 1$. 870. $P(A) = \frac{1}{36}$;
 $P(B) = \frac{1}{9}$; $P(C) = \frac{1}{2}$; $P(D) = \frac{8}{9}$. 871. а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{11}{45}$. 872. $\frac{2}{3}$. 873. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{24}$;
 в) $\frac{1}{6}$. 874. Одна красная и пять желтых. 875. $P_{\text{красный}} = \frac{4}{15}$, $P_{\text{желтый}} = 0$,
 $P_{\text{не зеленый}} = \frac{1}{3}$; 11 карандашей. 876. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{3}$. 877. а) $\frac{2}{7!}$; б) $\frac{2 \cdot 2}{12!}$.
 878. Так как квадраты, не превышающие 1000000, имеют 1000 чисел,
 то $P = 0,001$. 879. 0,5. 880. а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}$. 881. Нет.
 882. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{5}{12}$; в) $\frac{1}{9}$; г) $\frac{1}{2}$. 883. а) $\frac{1}{36}$; $\frac{1}{18}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{18}$; $\frac{1}{36}$; б) справед-
 лива. 884. а) 1000; б) $\frac{1}{1000}$. 885. а) $\frac{3!}{5!} = \frac{1}{20}$; б) $\frac{2 \cdot 3!}{5!} = \frac{1}{10}$; в) $\frac{2}{4!} = \frac{1}{12}$.
 886. а) $\frac{1}{32}$; б) $\frac{1}{32}$. 887. $P(A) = \frac{7}{8}$; $P(B) = \frac{7}{8}$; $P(C) = \frac{1}{4}$; $P(D) = \frac{3}{4}$; $P(E) = 0$.
 888. 7. 889. $\frac{60 \cdot 60}{10^5} = 0,036$. 890. $\frac{1}{16}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{9}{16}$. 892. а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{4}{9}$; в) $\frac{1}{3}$.
 893. 0,18. 894. а) 0,75; б) $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$. 895. 0,64. 896. а) $A_{12}^3 = 1320$;
 б) $C_{12}^3 = 220$. 897. а) $A_{10}^4 = 5040$; б) $C_{10}^4 = 210$. 898. а) $A_{15}^5 = 360360$;
 б) $C_{15}^5 = 3003$. 899. C_{36}^5 . 900. A_{26}^4 . 901. C_{10}^3 . 902. C_{30}^2 ; C_{30}^3 ; C_{30}^4 .
 903. $C_7^2 \cdot C_5^3$. 904. $2 \cdot C_{22}^{10}$. 905. а) $\frac{1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$; б) $\frac{1}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$. 906. $\frac{C_4^3}{C_6^3}$.
 911. а) 19; б) 20. 912. а) 11; б) 16. 913. 15. 914. а) Увеличатся на 10;
 б) увеличатся в 10 раз. 915. а) 0,9; б) 0,33; в) 0,75; г) 0,81.
 916. а) $\frac{4}{11}$; б) $\frac{2}{11}$. 917. 1) а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{3}{28}$. 918. 1) а) $\frac{13}{125}$; б) $\frac{12}{125}$;
 2) нет. 919. 13. 920. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $\frac{n-1}{n}$.

Тест к главе 6. 1. 1) — в); 2) — г); 3) — а); 4) — б). 2. Среднее
 арифметическое $\approx 3,9$; мода 4; медиана 4. 3. В. 4. Б. 5. В. 6. Г.
 7. Б. 8. $\frac{1}{720}$. 9. Одна желтая, три красные, две синие.

ГЛАВА 1 Алгебраические дроби

1.1. Что такое алгебраическая дробь	3
1.2. Основное свойство дроби	8
1.3. Сложение и вычитание алгебраических дробей	14
1.4. Умножение и деление алгебраических дробей	21
1.5. Преобразование выражений, содержащих алгебраические дроби	25
1.6. Степень с целым показателем	30
1.7. Свойства степени с целым показателем	36
1.8. Решение уравнений и задач	41
1.9. Сокращение дробей (Для тех, кому интересно)	46
Дополнительные задания к главе 1	50
Вопросы для повторения к главе 1	53
Задания для самопроверки к главе 1	54
Тест к главе 1	56

ГЛАВА 2 Квадратные корни

2.1. Задача о нахождении стороны квадрата	58
2.2. Иррациональные числа	62
2.3. Теорема Пифагора	69
2.4. Квадратный корень (алгебраический подход)	74
2.5. График зависимости $y = \sqrt{x}$	79
2.6. Свойства квадратных корней	81
2.7. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни	88
2.8. Кубический корень	94
2.9. Двойные радикалы (Для тех, кому интересно)	98
Дополнительные задания к главе 2	100
Вопросы для повторения к главе 2	103
Задания для самопроверки к главе 2	103
Тест к главе 2	105

ГЛАВА 3 Квадратные уравнения

3.1. Какие уравнения называют квадратными	107
3.2. Формула корней квадратного уравнения	111
3.3. Вторая формула корней квадратного уравнения	116
3.4. Решение задач	120
3.5. Неполные квадратные уравнения	126
3.6. Теорема Виета	130
3.7. Разложение квадратного трехчлена на множители	136
3.8. Целые корни уравнения с целыми коэффициентами (Для тех, кому интересно)	140

Дополнительные задания к главе 3	143
Вопросы для повторения к главе 3	145
Задания для самопроверки к главе 3	146
Тест к главе 3	147

ГЛАВА 4 Системы уравнений

4.1. Линейное уравнение с двумя переменными	149
4.2. График линейного уравнения с двумя переменными	153
4.3. Уравнение прямой вида $y = kx + l$	160
4.4. Системы уравнений. Решение систем способом сложения	167
4.5. Решение систем уравнений способом подстановки	175
4.6. Решение задач с помощью систем уравнений	181
4.7. Задачи на координатной плоскости	186
4.8. Геометрическая интерпретация неравенств с двумя переменными (Для тех, кому интересно)	190
Дополнительные задания к главе 4	193
Вопросы для повторения к главе 4	196
Задания для самопроверки к главе 4	197
Тест к главе 4	198

ГЛАВА 5 Функции

5.1. Чтение графиков	200
5.2. Что такое функция	219
5.3. График функции	216
5.4. Свойства функций	223
5.5. Линейная функция	227
5.6. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график	236
5.7. Целая и дробная части числа (Для тех, кому интересно)	240
Дополнительные задания к главе 5	243
Вопросы для повторения к главе 5	247
Задания для самопроверки к главе 5	248
Тест к главе 5	249

ГЛАВА 6 Вероятность и статистика

6.1. Статистические характеристики	253
6.2. Вероятность равновероятных событий	259
6.3. Сложные эксперименты	264
6.4. Геометрические вероятности	267
6.5. Размещения и сочетания (Для тех, кому интересно)	269
Дополнительные задания к главе 6	273
Вопросы для повторения к главе 6	275
Задания для самопроверки к главе 6	276
Тест к главе 6	276
Ответы	278

Учебное издание

Серия «Академический школьный учебник»

Дорофеев Георгий Владимирович
Суворова Светлана Борисовна
Бунимович Евгений Абрамович
Кузнецова Людмила Викторовна
Минаева Светлана Станиславовна

АЛГЕБРА

8 класс

Учебник
для общеобразовательных
учреждений

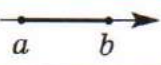
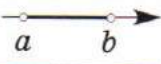
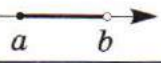
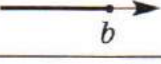
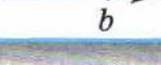
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младшие редакторы *Е. А. Андрееenkova, С. В. Дубова*
Художник *О. П. Богомоллова*
Художественный редактор *О. П. Богомоллова*
Компьютерная верстка
и техническое редактирование: *О. В. Храброва*
Компьютерная графика: *Г. М. Дмитриев*
Корректоры *О. В. Крупенко, О. Н. Леонова, И. Н. Панкова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 10.08.10. Формат
70 × 90^{1/16}. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 18,73 + 0,49 форз. Доп. тираж 10 000 экз. Заказ № 26556 (Ш-Гэ).

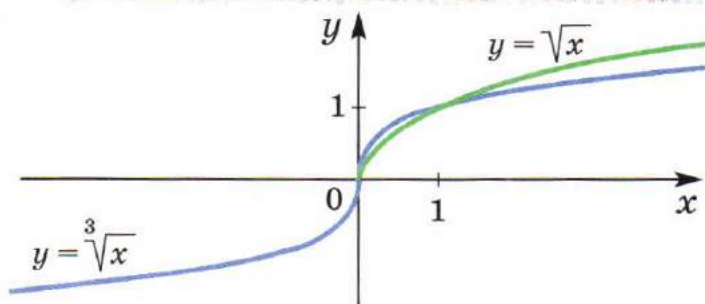
Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва,
3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Открытое акционерное общество «Смоленский полиграфический комбинат». 214020,
г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

Числовые промежутки

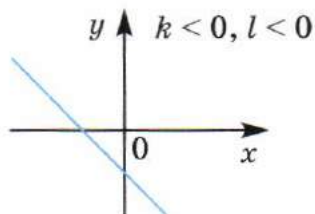
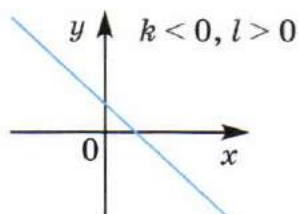
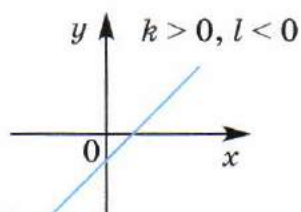
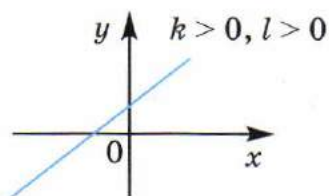
Название	Изображение	Неравенство	Обозначение
Отрезок		$a \leq x \leq b$	$[a; b]$
Интервал		$a < x < b$	$(a; b)$
Полуинтервал		$a < x \leq b$	$(a; b]$
		$a \leq x < b$	$[a; b)$
Замкнутый луч		$x \geq a$	$[a; +\infty)$
		$x \leq b$	$(-\infty; b]$
Открытый луч		$x > a$	$(a; +\infty)$
		$x < b$	$(-\infty; b)$

Графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$



Графики функций

$$y = kx + l$$



$$y = \frac{k}{x}$$

