



МГУ - ШКОЛЕ

В. Ф. Бутузов
С. Б. Кадомцев
В. В. Прасолов

Геометрия

Дидактические
материалы

7


ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО



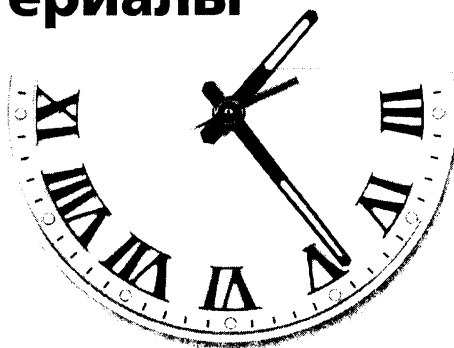
МГУ - ШКОЛЕ

**В. Ф. Бутузов
С. Б. Кадомцев
В. В. Прасолов**

Геометрия

**Дидактические
материалы**

7
класс



Москва
«Просвещение»
2010

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
Б93

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

- Б93 **Бутузов В. Ф.**
Геометрия. Дидактические материалы. 7 класс /
В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, В. В. Прасолов. — М. : Про-
свещение, 2010. — 62 с. : ил. — (МГУ — школе). — ISBN
978-5-09-019455-6.

Дидактические материалы ориентированы на учебник В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, В. В. Прасолова «Геометрия, 7».

В них представлены самостоятельные и контрольные работы в нескольких вариантах и различного уровня сложности, а также математические диктанты и примерные задачи к экзамену. Ко всем заданиям даны ответы, а ко многим — указания.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-019455-6

© Издательство «Просвещение», 2010
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2010
Все права защищены

Предисловие

Пособие содержит дополнительный задачный материал по курсу геометрии 7 класса. Оно ориентировано на учебник В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, В. В. Прасолова «Геометрия, 7» под редакцией В. А. Садовниченко.

В пособии представлены 12 самостоятельных работ, 4 контрольные работы, 3 математических диктанта, примерные задачи к экзамену по геометрии, тестовые задания и дополнительные задачи.

Самостоятельные работы обозначены буквой С с соответствующим номером. Темы самостоятельных работ:

- С-1. Простейшие геометрические фигуры (§ 1, п. 1—3).
- С-2. Измерение отрезков и углов (§ 3, п. 6, 7).
- С-3. Перпендикулярные прямые (§ 4, п. 8, 9).
- С-4. Равнобедренный треугольник (§ 5, п. 10—13).
- С-5. Признаки равенства треугольников (§ 6, п. 14—17).
- С-6. Прямоугольные треугольники (§ 7, п. 18—24).
- С-7. Соотношения между сторонами и углами треугольника (§ 8, п. 25—27).
- С-8. Отрезки и углы, связанные с окружностью (§ 9, п. 28—33).
- С-9*. Отрезки и углы, связанные с окружностью (§ 9, п. 28—33).
- С-10. Задачи на построение (§ 10, п. 34—41).
- С-11*. Задачи на построение (§ 10, п. 34—41).
- С-12. Итоговое повторение.

Все самостоятельные работы даются в четырёх вариантах. В каждом варианте 3 задачи, но если на самостоятельную работу отводится меньше 30 минут, то третью задачу нужно исключить и оставить только первые две задачи. Третий и четвёртый варианты, как правило, более сложные, чем первый и второй. Самостоятельные работы по двум темам («Отрезки и углы, связанные с окружностью» и «Задачи на построение») приведены в двух версиях, причём версия со звёздочкой более сложная. Она предназначена для наиболее подготовленных классов.

Контрольные работы обозначены буквой К с соответствующим номером. Они предназначены для итоговой проверки знаний по каждой из трёх глав учебника (работы

К-1, К-2 и К-3) и по всему курсу геометрии 7 класса (работа **К-4**). В каждой контрольной работе 4 задачи, причём последняя задача — дополнительная, её следует предлагать только в наиболее подготовленных классах. Каждая контрольная работа даётся в четырёх вариантах.

Математические диктанты обозначены буквами **МД** с соответствующим номером: **МД-1, МД-2 и МД-3**. Они предназначены для итоговой проверки знаний по каждой из трёх глав. Все математические диктанты даются в двух одинаковых по сложности вариантах.

Дополнительные задачи можно предложить для самостоятельной работы учащимся, успешно справляющимся с задачами из учебника. Их можно также использовать для проведения занятий в кружках и при организации факультативов.

В конце книги даны ответы ко всем задачам самостоятельных и контрольных работ, а также указания к наиболее сложным задачам самостоятельных работ.

Самостоятельные работы

ВАРИАНТ 1

С-1

1. Три точки A , B и C лежат на одной прямой, три точки B , C и D также лежат на одной прямой. Лежат ли точки A , B и D на одной прямой?
2. Три прямые a , b и c пересекаются в одной точке, а прямая d не проходит через эту точку, но пересекает прямые a , b и c . Чему равно число всех точек пересечения этих прямых?
3. Точки A и B лежат в одной полуплоскости с границей a , точки B и C лежат в разных полуплоскостях с границей a . В одной или в разных полуплоскостях с границей a лежат точки A и C ?

С-2

1. Точка C лежит на отрезке AB , длина которого равна 18 см. Найдите длины отрезков AC и BC , если длина отрезка AC в два раза больше длины отрезка BC .
2. Точка C лежит на отрезке AB . Чему равно расстояние от точки C до середины отрезка AB , если $AC = 13$ см и $BC = 3$ см?
3. Луч делит развёрнутый угол на два угла, один из которых на 60° больше другого. Найдите образовавшиеся углы.

С-3

1. Один из смежных углов на 20° больше другого. Найдите эти углы.
2. Точка M лежит на биссектрисе угла AOB . Найдите угол COM , если $\angle AOC = 10^\circ$, $\angle BOC = 50^\circ$ и точка C лежит внутри угла AOB .
3. Равны ли острые углы AOB и COD , если $CO \perp AO$ и $DO \perp BO$? Ответ обоснуйте.

1. Медиана треугольника разделяет его на два треугольника, суммы длин сторон которых равны. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.
2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = CE$. Докажите, что треугольник DBE равнобедренный, используя наложение копии треугольника на сам треугольник.
3. Могут ли медиана и биссектриса треугольника, проведенные из одной вершины, быть взаимно перпендикулярными? Ответ обоснуйте.

1. Точка O — общая середина отрезков AB и CD , не лежащих на одной прямой. Докажите, что $AC = BD$.
2. В треугольнике ABC проведена медиана AM и на луче AM отмечена точка D так, что $DM = AM$. Докажите, что $BD = AC$.
3. На биссектрисе AD треугольника ABC отмечена точка P . Известно, что $\angle BPA = \angle CPA$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

1. Угол B прямоугольного треугольника ABC равен 60° . Сумма гипотенузы и катета BC равна 12 см. Найдите гипотенузу.
2. На серединном перпендикуляре к отрезку AB отмечена точка M так, что $AM = 2AB$. Периметр треугольника ABM равен 25 см. Найдите длину отрезка AB .
3. Можно ли произвольный прямоугольный треугольник разрезать на два равнобедренных треугольника? Ответ обоснуйте.

1. Найдите углы треугольника, если они пропорциональны числам 2, 3 и 7.
2. В треугольнике ABC сторона AC наибольшая, а сторона BC наименьшая. Может ли выполняться неравенство $AC > 2AB$? Ответ обоснуйте.
3. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D . Известно, что $\angle ABC = \angle BCD$. Выразите угол ADC через угол ABC .

1. Из точки окружности проведены две хорды, равные её радиусу. Найдите угол между ними.
2. Стороны угла касаются окружности. Точки касания являются концами двух дуг, одна из которых равна 160° . Найдите величину угла.
3. Боковая сторона равнобедренного треугольника является диаметром окружности. Докажите, что эта окружность проходит через середину основания треугольника.

1. Две окружности имеют общий центр. Докажите, что все хорды большей окружности, касающиеся меньшей окружности, равны между собой.
2. Окружность, диаметром которой служит биссектриса AD треугольника ABC , пересекает прямые AB и AC в точках P и Q , отличных от точки A . Докажите, что $AP = AQ$.
3. Из точки M , расположенной внутри острого угла с вершиной A , проведены перпендикуляры MP и MQ к сторонам угла. Докажите, что $\angle APQ = \angle AMQ$.

С-10

1. Постройте равносторонний треугольник по его стороне.
2. Постройте равнобедренный треугольник ABC по углу A и высоте, проведённой к основанию BC .
3. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и проекции одного из катетов на гипотенузу.

С-11*

1. Даны точки A , B и C , не лежащие на одной прямой. Проведите через точку A прямую так, чтобы точки B и C лежали по разные стороны от этой прямой и находились от неё на равных расстояниях.
2. Проведите через данную точку A прямую, которая пересекает данную окружность в таких точках B и C , что точка C — середина отрезка AB .
3. Даны две точки A и B . С помощью одного циркуля (без линейки) постройте точку C так, что $\angle ABC = 60^\circ$.

С-12

1. Две пересекающиеся прямые образуют четыре неразвёрнутых угла. Найдите эти углы, если сумма трёх из них равна 230° .
2. Точки B и C лежат по одну сторону от серединного перпендикуляра к отрезку AB . Сравните длины отрезков AC и BC .
3. Равные хорды AB и CD окружности с центром O пересекаются в точке M . Докажите, что луч MO — биссектриса одного из углов AMC , BMC , AMD , BMD .

C-1

1. Три прямые a , b и c пересекаются в одной точке, три прямые b , c и d также пересекаются в одной точке. Пересекаются ли прямые a , b и d в одной точке?
2. Три точки A , B и C лежат на одной прямой, а точка D не лежит на этой прямой. Сколько различных прямых проходит через все пары точек?
3. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях с границей a , точки B и C также лежат в разных полуплоскостях с границей a . В одной или в разных полуплоскостях с границей a лежат точки A и C ?

C-2

1. Точка C лежит на отрезке AB , длина которого равна 8 см. Найдите длины отрезков AC и BC , если длина отрезка AC в три раза меньше длины отрезка BC .
2. Точка B лежит на отрезке AC , длина которого равна 10 см. Чему равно расстояние между серединами отрезков AB и BC ?
3. Луч делит развёрнутый угол на два угла, один из которых в два раза больше другого. Найдите образовавшиеся углы.

C-3

1. Один из смежных углов в три раза больше другого. Найдите эти углы.
2. Точка M лежит на биссектрисе угла AOB . Найдите угол COM , если $\angle AOC = 50^\circ$, $\angle BOC = 30^\circ$ и точка C лежит внутри угла AOB .
3. Равны ли тупые углы AOB и COD , если $AO \perp CO$ и $BO \perp DO$? Ответ обоснуйте.

1. Точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB . Известно, что $AC = CB$ и $AD = DB$. Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны.
2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $\angle ABD = \angle CBE$. Докажите, что треугольник DBE равнобедренный, используя наложение копии треугольника на сам треугольник.
3. Из вершины угла проведён луч, расположенный во внутренней области угла. Может ли этот луч быть перпендикулярен к биссектрисе угла? Ответ обоснуйте.

1. Точка O — общая середина отрезков AB и CD , не лежащих на одной прямой. Докажите, что $\angle ACO = \angle BDO$.
2. В треугольнике ABC проведена медиана AM и на луче AM отмечена точка D , отличная от точки A , так, что $DM = AM$. Докажите, что $CD = AB$.
3. На биссектрисе AD треугольника ABC отмечена точка P . Известно, что $\angle BPD = \angle CPD$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

1. Угол C прямоугольного треугольника ABC равен 30° . Разность длин гипотенузы и катета AB равна 5 см. Найдите гипотенузу.
2. На серединном перпендикуляре к отрезку AB отмечена точка M так, что $AM = 3AB$. Периметр треугольника ABM равен 28 см. Найдите длину отрезка AB .
3. На стороне AB треугольника ABC с прямым углом C отмечена точка K так, что $KB = KC$. Докажите, что отрезок CK — медиана треугольника ABC .

1. Найдите углы треугольника, если они пропорциональны числам 3, 4 и 8.
2. В треугольнике ABC сторона AC наибольшая, а сторона BC наименьшая. Может ли выполняться неравенство $AB > 2BC$? При утвердительном ответе сделайте рисунок.
3. На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку B отложен отрезок BD , равный BC . Выразите угол ADC через угол ABC .

1. Из точки окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.
2. Стороны угла в 30° касаются окружности. Найдите величины двух дуг окружности, концами которых являются точки касания.
3. Окружность, диаметром которой служит одна из сторон треугольника, проходит через середину другой стороны. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

1. Каждая из двух взаимно перпендикулярных хорд окружности с центром O делится их точкой пересечения на отрезки, равные a и b , причём $a < b$. Найдите расстояние от точки O до каждой из хорд.
2. Окружность, диаметром которой служит биссектриса AD треугольника ABC , пересекает прямые AB и AC в точках P и Q , отличных от A . Докажите, что $DP = DQ$.
3. Из точки M , расположенной во внутренней области острого угла с вершиной A , проведены перпендикуляры MP и MQ к сторонам угла. Докажите, что $\angle QAM = \angle QPM$.

C-10

1. Постройте квадрат по его стороне.
2. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и высоте, проведённой к основанию.
3. Внутри угла с вершиной A дана точка O . Постройте прямую, которая проходит через точку O и пересекает стороны данного угла в таких точках B и C , что $AB = AC$.

C-11*

1. Постройте угол, равный данному углу, так, чтобы одна его сторона лежала на данной прямой, а другая проходила через данную точку.
2. Постройте прямоугольный треугольник по катету и сумме другого катета и гипотенузы.
3. Даны две точки A и B . С помощью одного циркуля (без линейки) постройте концы какого-нибудь отрезка, перпендикулярного к прямой AB .

C-12

1. Две пересекающиеся прямые образуют четыре неразвёрнутых угла. Найдите эти углы, если сумма двух из них равна 220° .
2. Высота треугольника разделяет его на два треугольника, периметры которых равны. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.
3. Одна из двух взаимно перпендикулярных хорд окружности делится второй хордой пополам. Докажите, что вторая хорда является диаметром.

C-1

1. Могут ли три полуплоскости иметь общую точку? Если могут, то изобразите такие полуплоскости.
2. На прямой отмечены пять точек. Сколько лучей с началами в отмеченных точках расположено на этой прямой?
3. Отметьте точки A , B и C , не лежащие на одной прямой. Проведите прямую через каждую пару точек и отметьте точку X , которая расположена во внешней области углов BAC , ABC и ACB .

C-2

1. Точка C лежит на отрезке AB , длина которого равна 11 см. Найдите отрезки AC и BC , если отрезок AC на 3 см меньше отрезка BC .
2. Точка C лежит на отрезке AB ; точки P и Q — середины отрезков AB и BC . Найдите отрезок AC , если отрезок PQ равен 4 см.
3. Луч делит прямой угол на два угла, один из которых на 30° больше другого. Найдите образовавшиеся углы.

C-3

1. Найдите все неразвёрнутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если разность двух из них равна 40° .
2. Точка M лежит на биссектрисе угла AOB , а точка C лежит внутри угла, смежного с углом AOB . Найдите угол COM , если $\angle AOC = 10^\circ$, $\angle BOC = 130^\circ$.
3. Чему равна сумма острого угла AOB и тупого угла COD , если $CO \perp AO$ и $DO \perp BO$? Ответ обоснуйте.

C-4

1. Могут ли медиана и высота треугольника, проведённые из одной вершины, быть взаимно перпендикулярными? Ответ обоснуйте.
2. Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла с вершиной A , пересекает стороны угла в точках B и C . Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
3. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные к биссектрисе угла ABC . Они пересекают лучи BC и BA в точках D и E соответственно. Найдите отрезок AB , если $BE = 5$ см и $CD = 2$ см.

C-5

1. Равные отрезки AB и CD , не лежащие на одной прямой, пересекаются в точке O . Известно, что $AO = CO$. Докажите, что $AD = BC$.
2. По одну сторону от прямой AB отмечены две точки C и D . Могут ли одновременно выполняться равенства $AC = AD$ и $BC = BD$?
3. На равных сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены соответственно точки A_1 и B_1 так, что $CA_1 = CB_1$. Докажите, что $AB_1 = BA_1$.

C-6

1. Внешний угол при вершине A прямоугольного треугольника ABC равен 120° . Сумма гипотенузы и катета AB равна 9 см. Найдите катет AB .
2. На сторонах AB и AC равностороннего треугольника ABC отмечены точки P и Q так, что $AP : PB = 2 : 1$ и $AQ : QC = 1 : 2$. Докажите, что прямые AC и PQ перпендикулярны.
3. Катеты AC и A_1C_1 прямоугольных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны, а другие катеты удовлетворяют неравенству $BC < B_1C_1$. Докажите, что $AB < A_1B_1$.

С-7

1. Может ли наибольший угол треугольника быть меньше 60° ? Ответ обоснуйте.
2. В треугольнике ABC угол B острый. На продолжении стороны AB за точку B отмечена точка D . Может ли выполняться неравенство $CD < CB$? Ответ обоснуйте.
3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Известно, что $BD = AD = AC$. Найдите углы треугольника ABC .

С-8

1. Дуга AB окружности равна 90° , хорда AB равна 10 см. Найдите расстояние от центра окружности до прямой AB .
2. Точка O — середина стороны AB равностороннего треугольника ABC . Окружность с центром O и радиусом OA пересекает стороны AC и BC в точках K и L . Найдите угол KOL .
3. Расстояние между серединами двух перпендикулярных хорд окружности равно 10 см. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения хорд.

С-9*

1. Докажите, что если три окружности имеют общую хорду, то их центры лежат на одной прямой.
2. Прямая касается двух окружностей в точке A . На этой прямой отмечена точка M и через неё проведены касательные MB и MC к этим окружностям. Докажите, что $MB = MC$.
3. Продолжения равных хорд AB и CD окружности за точки B и C пересекаются в точке M . Докажите, что треугольник MBC равнобедренный.

1. Постройте равносторонний треугольник по его высоте.
2. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведённой к одной из них.
3. Даны окружность и две точки внутри её. Постройте прямоугольный треугольник, вершины которого лежат на данной окружности, а катеты проходят через данные точки.

1. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведённой из общей точки этих сторон.
2. Постройте прямоугольный треугольник ABC по катету AC и разности острых углов A и B .
3. Даны две точки A и B . С помощью одного циркуля (без линейки) постройте точку C так, чтобы точка B была серединой отрезка AC .

1. Точки C и D лежат на отрезке AB . Известно, что $AC = BD$. Докажите, что середины отрезков AB и CD совпадают.
2. В треугольнике одна сторона на 1 см меньше другой и на 3 см больше третьей. Может ли его периметр быть равен 10 см? Ответ обоснуйте.
3. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены соответственно точки M и N , причём $AM = MN = BN$. Найдите угол CNB , если $\angle A = \alpha$.

C-1

1. Могут ли три полуплоскости не иметь ни одной общей точки? Если могут, то изобразите такие полуплоскости.
2. На прямой отмечены четыре точки. Сколько получилось отрезков с концами в этих точках?
3. Отметьте точки A , B и C , не лежащие на одной прямой. Проведите прямую через каждую пару точек и отметьте точку Y , которая расположена во внутренней области угла BAC и во внешних областях углов ABC и ACB .

C-2

1. Точка C лежит на отрезке AB , длина которого равна 8 см. Найдите отрезки AC и BC , если отрезок AC на 2 см больше отрезка BC .
2. Точка C лежит на прямой AB , но вне отрезка AB . Чему равно расстояние от точки C до середины отрезка AB , если $AC = 17$ см и $BC = 3$ см?
3. Луч делит прямой угол на два угла, один из которых в два раза больше другого. Найдите образовавшиеся углы.

C-3

1. Найдите смежные углы, если их градусные меры относятся как 7 : 8.
2. Точка M лежит на биссектрисе угла AOB , а точка C лежит внутри угла, вертикального по отношению к углу AOB . Найдите угол COM , если $\angle AOC = 110^\circ$, $\angle BOC = 130^\circ$.
3. Могут ли углы AOB и COD быть неравными, если $AO \perp CO$ и $BO \perp DO$? Если могут, то изобразите такие углы.

1. Могут ли биссектриса и высота треугольника, проведённые из одной вершины, быть взаимно перпендикулярными? Ответ обоснуйте.
2. Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла с вершиной A , пересекает стороны угла в точках B и C . Докажите, что биссектриса делит отрезок BC пополам.
3. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные к биссектрисе угла ABC . Они пересекают лучи BC и BA в точках D и E соответственно. Найдите отрезок BC , если $AB = 7$ см и $CD = 3$ см.

1. Равные отрезки AB и CD , не лежащие на одной прямой, пересекаются в точке O . Известно, что $AO = CO$. Докажите, что $\angle OAD = \angle OCB$.
2. По одну сторону от прямой AB отмечены две точки C и D . Могут ли при этом одновременно выполняться равенства $\angle CAB = \angle DAB$ и $\angle CBA = \angle DBA$?
3. На равных сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки A_1 и B_1 так, что $CA_1 = CB_1$. Докажите, что $\angle AB_1B = \angle BA_1A$.

1. Внешний угол при вершине C прямоугольного треугольника ABC равен 150° . Разность гипотенузы и катета AB равна 4 см. Найдите катет AB .
2. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника разделяет его на два треугольника, один из которых равнобедренный. Найдите углы исходного треугольника.
3. Катеты прямоугольных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ удовлетворяют неравенствам $AC < A_1C_1$ и $BC < B_1C_1$. Докажите, что $AB < A_1B_1$.

1. Может ли наименьший угол треугольника быть больше 60° ? Ответ обоснуйте.
2. В треугольнике ABC угол B тупой. На продолжении стороны AB за точку B отмечена точка D . Может ли выполняться неравенство $CD < CB$? Ответ обоснуйте.
3. Две стороны треугольника равны 1 см и 5 см, а третья сторона также равна целому числу сантиметров. Найдите третью сторону.

1. Дуга AB окружности с радиусом 10 см равна 120° . Найдите расстояние от центра окружности до прямой AB .
2. Точка O лежит на катете AC треугольника ABC с прямым углом C . Окружность с центром O и радиусом OA пересекает гипотенузу AB в точке K . Выразите угол AOK через угол B .
3. Две равные окружности пересекаются в точках A и B . Прямая, проходящая через точку A , пересекает одну окружность в точке C , а другую — в точке D . Докажите, что $BC = BD$.

1. Две окружности пересекаются в точках A и B ; отрезки AM и AN — диаметры этих окружностей. Докажите, что точки M , N и B лежат на одной прямой.
2. Прямая касается каждой из двух окружностей в точке A , а другая прямая касается этих окружностей в точках B и C . Докажите, что точка A лежит на окружности, диаметром которой служит отрезок BC .
3. Продолжения равных хорд AB и CD окружности за точки B и C пересекаются в точке E . Докажите, что треугольник EAD равнобедренный.

C-10

1. Постройте квадрат по его диагонали.
2. Постройте треугольник по углу и биссектрисе и высоте, проведённым из вершины этого угла.
3. Постройте окружность, которая касается одной стороны данного угла в данной точке и касается другой стороны этого угла.

C-11*

1. Постройте остроугольный треугольник по углу и двум высотам, проведённым из вершин двух других углов треугольника.
2. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и разности катетов.
3. Даны две точки A и B . С помощью одного лишь циркуля (без линейки) постройте какую-нибудь точку, которая лежит на продолжении отрезка AB .

C-12

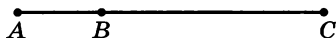
1. Лучи OC и OD расположены во внутренней области угла AOB . Известно, что $\angle AOC = \angle BOD$. Докажите, что биссектрисы углов AOB и COD совпадают.
2. Может ли сторона треугольника быть вдвое меньше другой стороны и вдвое больше третьей стороны? Ответ обоснуйте.
3. Хорда AB окружности продолжена за точку B на отрезок BC , равный радиусу окружности. Через точку C и центр O окружности проведена секущая; она пересекает окружность в точке D , лежащей вне отрезка OC . Найдите угол AOD , если угол ACD равен α .

Контрольные работы

К-1

ВАРИАНТ 1

1. Отметьте на рисунке точку, которая лежит на луче AC , но не лежит на луче BC .

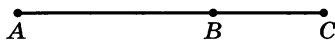


2. С помощью транспортира начертите угол, равный 114° , и проведите биссектрису смежного с ним угла.
3. Во внутренней области прямого угла AOB проведён луч OC . Найдите угол между биссектрисами углов AOC и BOC .
4. Даны три прямые, каждая из которых пересекает хотя бы одну другую. Сколько точек пересечения могут иметь эти прямые? Для каждого возможного случая сделайте рисунок.

К-1

ВАРИАНТ 2

1. Отметьте на рисунке точку, которая лежит на луче AC и на луче BA .



2. С помощью транспортира начертите угол, равный 72° , и проведите биссектрису смежного с ним угла.
3. Во внутренней области прямого угла AOB проведены лучи OC и OD так, что $\angle AOC = \angle BOD = 30^\circ$. Найдите угол между биссектрисами углов AOC и BOD .
4. На сколько частей могут разделить плоскость три прямые, каждые две из которых пересекаются? Для каждого возможного случая сделайте рисунок.

1. Может ли каждый из трёх отрезков AB , BC и CA пересекать прямую a , не проходящую через точки A , B и C ?
2. Точки A , B и C лежат на одной прямой, причём $AB = 2,3$ см и $BC = 1,2$ см. Какой может быть длина отрезка AC ? Рассмотрите все возможные случаи.
3. Какой угол (острый или тупой) образуют стрелки часов в 3 ч 1 мин?
4. На линейке отмечены три деления: 0 см, 3 см и 8 см. Постройте с её помощью отрезок длиной 7 см.

1. Нарисуйте три прямые так, чтобы они имели ровно две точки пересечения.
2. Могут ли точки A , B и C лежать на одной прямой, если $AB = 4,3$ см, $BC = 1,1$ см и $AC = 3,1$ см?
3. Какой угол (острый или тупой) образуют стрелки часов в 2 ч 59 мин?
4. На линейке отмечены три деления: 0 см, 4 см и 11 см. Постройте с её помощью отрезок длиной 10 см.

1. На высоте равнобедренного треугольника ABC , проведённой к основанию AC , отмечена точка P , а на сторонах AB и BC отмечены точки M и N так, что $BM = BN$. Докажите, что углы BMP и BNP равны.
2. В треугольнике с прямым углом C угол A равен 30° . Докажите, что $AC < 2BC$.
3. В треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD . Известно, что $AC < BC$. Докажите, что $AD < BD$.
4. Можно ли какой-нибудь прямоугольный треугольник разрезать на равносторонний треугольник и равнобедренный треугольник? Ответ обоснуйте.

1. Внутри равнобедренного треугольника ABC отмечена точка P , а на равных сторонах AB и BC отмечены точки M и N . Известно, что $BM = BN$ и $PM = PN$. Докажите, что прямые BP и AC перпендикулярны.
2. В треугольнике ABC , в котором $AB < BC < AC$, один из углов вдвое меньше другого и втрое меньше третьего. Найдите угол A .
3. В треугольнике ABC с прямым углом C проведена биссектриса AD . Докажите, что $CD < BD$.
4. Можно ли какой-нибудь прямоугольный треугольник разрезать на четыре равнобедренных треугольника? Ответ обоснуйте.

1. Докажите, что в четырёхугольнике, все стороны которого равны, диагонали перпендикулярны.
2. Точки M и N — середины сторон AB и BC треугольника ABC . Докажите, что прямая MN перпендикулярна к высоте, проведённой из вершины B .
3. На стороне BC неравнобедренного треугольника ABC отмечена точка D . Могут ли треугольники ABD и ACD быть равными? Ответ обоснуйте.
4. Можно ли разрезать треугольник, не являющийся равносторонним, на равносторонние треугольники?

1. Докажите, что в четырёхугольнике $ABCD$, все стороны которого равны, углы ABC и ADC равны.
2. Точки M и N — середины сторон AB и BC треугольника ABC . Докажите, что точки B и C равноудалены от прямой MN .
3. В неравнобедренном треугольнике ABC угол A равен 60° . Докажите, что $AB + AC < 2BC$.
4. Можно ли разрезать треугольник, не являющийся равнобедренным, на два равных треугольника?

1. Найдите множество центров всех окружностей, проходящих через две данные точки.
2. Дуга AB окружности радиуса 10 см равна 60° . Найдите длину хорды AB .
3. Постройте равнобедренный треугольник, вершины которого лежат на данной окружности, а основание равно данному отрезку.
4. С помощью циркуля и линейки постройте угол в $11^\circ 15'$.

1. Найдите множество центров всех окружностей, касающихся данной прямой в данной точке.
2. Хорда AB равна 10 см. Дуга AB окружности равна 90° . Найдите длину перпендикуляра, проведённого из центра окружности к хорде AB .
3. Постройте равнобедренный треугольник, вершины которого лежат на данной окружности, а боковая сторона равна данному отрезку.
4. С помощью циркуля и линейки постройте угол в $67^\circ 30'$.

1. Найдите множество всех точек, для каждой из которых отрезки касательных, проведённые из этой точки к данной окружности, имеют заданную длину.
2. Окружность, диаметром которой является катет прямоугольного треугольника, проходит через середину гипотенузы. Найдите острые углы этого треугольника.
3. Даны окружность, точка на ней и хорда, отличная от диаметра. Через данную точку проведите хорду, которая делилась бы данной хордой пополам.
4. Дан угол в 34° . С помощью циркуля и линейки постройте угол в 12° .

1. Найдите множество середин всех хорд данной окружности, имеющих заданную длину.
2. Окружность, диаметром которой является катет прямо-угольного треугольника, делит гипотенузу в отношении $1 : 3$. Найдите острые углы этого треугольника.
3. Даны угол и две точки внутри его. Постройте окруж-ность, проходящую через эти точки и отсекающую на сторонах угла равные отрезки.
4. Дан угол в 19° . С помощью циркуля и линейки построй-те угол в 1° .

1. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D , а на его боковых сторонах AB и BC — точки E и F . Известно, что $ED = DF$, $\angle BDE = \angle BDF$ и $\angle ABD = 10^\circ$. Найдите угол A .
2. Дан треугольник ABC , в котором $\angle A = 30^\circ$ и $\angle C = 60^\circ$. Точка M — середина стороны AC . Найдите угол CBM .
3. Окружность с центром O касается сторон угла BAC , равного 60° , в точках B и C . Найдите длину отрезка AO , если $BO = 2$ см.
4. Постройте окружность данного радиуса, отсекающую на сторонах данного угла отрезки, равные данному от-резку.

1. Внутри треугольника ABC отмечена точка O . Известно, что $AO = OC$, $\angle AOB = \angle COB$ и $\angle A = 70^\circ$. Найдите угол B .
2. Дан треугольник ABC , в котором $\angle A = \angle C = 45^\circ$. Точ-ка M — середина стороны AC . Найдите угол CBM .
3. Окружность с центром O касается сторон угла BAC в точ-ках B и C . Найдите угол BAC , если $AO = 2$ см и $BO = 1$ см.
4. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку на данной прямой и отсекающую на этой прямой отрезок, равный данному отрезку.

1. Отрезок BC длиной 2 см расположен на отрезке AD длиной 7 см. Точка X лежит на отрезке BC (неизвестно, где именно). Чему равна сумма длин отрезков AX , BX , CX и DX ?
2. На катете AC треугольника ABC с прямым углом C и углом A , равным 15° , отмечена точка D так, что $\angle CDB = 30^\circ$. Известно, что $BC = 5$ см. Найдите AD .
3. Через точку A проведены касательные AB и AC к окружности с центром O (B и C — точки касания). Точка M расположена вне окружности так, что $\angle AMO = 90^\circ$. Докажите, что $\angle BMO = \angle CMO$.
4. Даны окружность и точка A внутри её. Постройте хорду этой окружности, проходящую через точку A , так, чтобы разность длин отрезков, на которые точка A делит хорду, была равна длине данного отрезка.

1. Внутри угла AOD проведены лучи OB и OC , а внутри угла BOC проведён луч OX . Известно, что $\angle AOD = 120^\circ$ и $\angle BOC = 30^\circ$. Найдите сумму градусных мер углов AOX , BOX , COX и DOX .
2. На катете AC треугольника ABC с прямым углом C и углом A , равным $22^\circ 30'$, отмечена точка D так, что $\angle CDB = 45^\circ$. Известно, что $AD = 5$ см. Найдите BD .
3. Через точку A проведены касательные AB и AC к окружности с центром O (B и C — точки касания), а затем проведена касательная, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и N . Найдите угол MON , если $\angle BAC = 40^\circ$.
4. Даны точка A и окружность. Постройте прямую, проходящую через точку A так, чтобы окружность высекала на ней хорду, равную данному отрезку.

Математические диктанты

МД-1

ВАРИАНТ 1

1. Серединой отрезка называется ...
2. Каким свойством обладают вертикальные углы?
3. Может ли один из смежных углов быть прямым, а другой — тупым?
4. Найдите все неразвёрнутые углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых, если сумма двух из них равна 140° .
5. Биссектриса угла, смежного с углом в 80° , делит его на два угла, каждый из которых равен ...
6. Может ли разность градусных мер двух смежных углов быть равна 90° ?
7. Угол $АОС$ равен 120° . Луч $ОВ$ расположен во внутренней области этого угла. Чему равен угол между биссектрисами углов $АОВ$ и $ВОС$?
8. Можно ли нарисовать три попарно пересекающиеся прямые a , b и c так, что $a \perp b$ и $b \perp c$?

МД-1

ВАРИАНТ 2

1. Биссектрисой угла называется ...
2. Сумма смежных углов равна ...
3. Может ли один из смежных углов быть прямым, а другой — острым?
4. Найдите все неразвёрнутые углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых, если один из них на 20° больше другого.

5. Биссектриса угла, смежного с углом в 100° , делит его на два угла, каждый из которых равен ...
6. Может ли разность градусных мер двух смежных углов быть равна 170° ?
7. Угол AOC равен 40° . Луч OB расположен во внутренней области этого угла. Чему равен угол между биссектрисами углов AOB и BOC ?
8. Можно ли отметить три точки A , B и C так, что $\angle ABC = 90^\circ$ и $\angle ACB = 90^\circ$?



ВАРИАНТ 1

1. Медианой треугольника называется ...
2. Точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC , причём $\angle BAC = \angle DAC$ и $\angle BCA = \angle DCA$. Каким признаком равенства треугольников нужно воспользоваться, чтобы доказать равенство отрезков AB и AD ?
3. Отрезки AC и BD , не лежащие на одной прямой, пересекаются в точке O , причём $AO = OC$ и $BO = OD$. Каким признаком равенства треугольников нужно воспользоваться, чтобы доказать равенство отрезков AB и CD ?
4. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° , равен ... гипотенузы.
5. Гипотенузы AB и A_1B_1 прямоугольных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны, $\angle A = 25^\circ$ и $\angle B_1 = 65^\circ$. Сравните отрезки AC и A_1C_1 .
6. Дан треугольник ABC , в котором $AB = 14$ см и $AC = 15$ см. Сравните углы B и C .
7. В треугольнике ABC углы A и B равны 20° и 80° . Внешний угол треугольника с вершиной C равен ...
8. Две стороны треугольника равны 1,9 см и 0,8 см. Найдите третью сторону, если её длина выражается целым числом сантиметров.

1. Высотой треугольника называется
2. Точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC , причём $AB = AD$ и $\angle BAC = \angle DAC$. Каким признаком равенства треугольников нужно воспользоваться, чтобы доказать равенство отрезков BC и CD ?
3. Отрезки AC и BD , не лежащие на одной прямой, пересекаются в точке O , причём $BO = OD$ и $\angle ABO = \angle CDO$. Каким признаком равенства треугольников нужно воспользоваться, чтобы доказать равенство отрезков AB и CD ?
4. Катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы. Угол, лежащий против этого катета, равен
5. Гипотенузы AB и A_1B_1 прямоугольных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны, $\angle A = 40^\circ$ и $\angle B_1 = 50^\circ$. Сравните отрезки AC и A_1C_1 .
6. Дан треугольник ABC , в котором $\angle A = 42^\circ$ и $\angle B = 43^\circ$. Сравните стороны AC и BC .
7. В равнобедренном треугольнике ABC угол при основании BC равен 25° . Угол при вершине A равен
8. Две стороны треугольника равны 1,1 см и 0,8 см. Найдите третью сторону, если её длина выражается целым числом сантиметров.

1. Диаметр окружности называется
2. Диаметр окружности равен 19 см, расстояние от её центра до прямой равно 9 см. Пересекает ли эта прямая окружность?
3. Расстояние от точки O до прямой a равно 14 см. Каким должен быть радиус окружности с центром O , чтобы она касалась прямой a ?
4. Прямая a касается окружности в точке A . Проходит ли через центр окружности прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная к прямой a ?

5. Точки A , B и C лежат на окружности. Биссектриса угла ABC пересекает эту окружность в точке D . Сравните углы ABD и CAD .
6. Начертите отрезок и с помощью циркуля и линейки постройте его середину.
7. С помощью циркуля и линейки постройте равнобедренный треугольник по его боковой стороне и углу при вершине.
8. Даны прямая и две точки A и B . Постройте с помощью циркуля и линейки на данной прямой точку, равноудалённую от точек A и B .



ВАРИАНТ 2

1. Окружностью называется ...
2. Диаметр окружности равен 21 см, расстояние от её центра до прямой равно 11 см. Пересекает ли эта прямая окружность?
3. Расстояние от точки O до прямой a равно 10 см. Каким должен быть радиус окружности с центром O , чтобы она касалась прямой a ?
4. Прямая AB касается окружности в точке A , отрезок AC — диаметр окружности. Чему равен угол BAC ?
5. Точки A , B и C лежат на окружности. Биссектриса угла ABC пересекает эту окружность в точке D . Сравните углы ACD и CAD .
6. Начертите угол и с помощью циркуля и линейки постройте его биссектрису.
7. С помощью циркуля и линейки постройте равнобедренный треугольник по основанию и углу при основании.
8. Даны окружность и две точки A и B . Постройте с помощью циркуля и линейки на данной окружности точку, равноудалённую от точек A и B .

Примерные задачи к экзамену

Начальные понятия геометрии

1. Внутри угла BAC , равного 110° , проведён луч AD . Найдите угол BAD , если известно, что он в четыре раза меньше угла CAD .
2. Внутри угла BAC , равного 50° , проведён луч AD . Найдите угол между биссектрисами углов BAD и CAD .
3. Лучи AB и CD имеют общую точку, лучи CD и EF тоже имеют общую точку. Имеют ли лучи AB и EF общую точку? Для каждого возможного случая сделайте рисунок.

Смежные и вертикальные углы

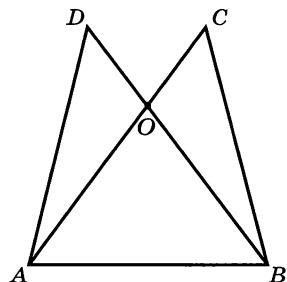
4. Один из смежных углов в восемь раз меньше другого. Найдите эти углы.
5. Докажите, что биссектрисы двух вертикальных углов лежат на одной прямой.
6. Углы ABC и ABD смежные. Луч BO — биссектриса угла ABC . Найдите угол OBD , если $\angle ABD = 80^\circ$.
7. Углы ABC и CBD смежные. Луч BO — биссектриса угла CBD , а луч BC — биссектриса угла ABO . Найдите угол ABC .

Равнобедренный треугольник

8. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O . Докажите, что треугольник AOC равнобедренный.
9. Внешние углы треугольника ABC с вершинами A и C равны. Найдите медиану BM , если периметры треугольников ABC и ABM равны 6 см и 5 см.
10. На стороне AB треугольника ABC , в котором $\angle A = 30^\circ$ и $\angle C = 50^\circ$, отмечена точка D так, что $\angle BCD = 20^\circ$. Сравните отрезки AD и CD .

Признаки равенства треугольников

11. Углы ABC и DAB на рисунке равны, отрезки AO и OB также равны. Докажите, что $\angle BCA = \angle ADB$.



12. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена высота BD и на сторонах AB и BC отмечены точки E и F так, что $\angle BDE = \angle BDF$. Докажите, что $AE = CF$.

13. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки C_1 и A_1 . Отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O . Известно, что $\angle ACC_1 = \angle CAA_1$ и $OA_1 = OC_1$. Докажите, что $BA_1 = BC_1$.

Прямоугольные треугольники

14. Отрезок AB пересекает прямую a в точке M . Известно, что $AM = BM$. Докажите, что точки A и B находятся на одинаковом расстоянии от прямой a .
15. Отрезок AB пересекает прямую a в точке M . Известно, что точки A и B находятся на одинаковом расстоянии от прямой a . Докажите, что $AM = BM$.
16. Из точек M и N — середин боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC проведены перпендикуляры ME и NF к прямой AC . Докажите, что $\triangle AME = \triangle CNF$.
17. В равнобедренном треугольнике ABC угол B тупой, высота BH равна 1 см. Найдите периметр треугольника ABC , если периметр треугольника ABH равен 6 см.
18. На отрезке AD отмечены точки B и C так, что точка B лежит между A и C . Точки F и G — середины отрезков AB и CD , точка E не лежит на прямой AD . Известно, что $EF = EG = 9$ см, $AD = 13$ см и $BC = 5$ см. Найдите угол FEG .
19. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки длиной 1 см и 3 см. Найдите острые углы этого треугольника.

Сумма углов треугольника

20. На стороне AB треугольника ABC , в котором $\angle A = 60^\circ$ и $\angle B = 20^\circ$, отмечена точка D так, что $\angle ACD = 70^\circ$. Найдите углы треугольника BCD .
21. В равнобедренном треугольнике угол при основании на 24° меньше одного из других углов. Найдите углы этого треугольника.
22. В тупоугольном равнобедренном треугольнике один из углов в четыре раза больше другого. Найдите углы этого треугольника.
23. Внутри треугольника ABC отмечена точка P . Прямые AP и CP пересекают стороны BC и AB в точках D и E соответственно. Известно, что $\angle B = 80^\circ$, $\angle ADC = 100^\circ$ и $\angle AEC = 110^\circ$. Найдите угол APC .

Соотношения между сторонами и углами треугольника

24. На стороне BC треугольника ABC с прямым углом C отмечена точка D . Докажите, что $AD < AB$.
25. На стороне BC треугольника ABC с тупым углом C отмечена точка D . Докажите, что $AD < AB$.
26. Периметр равнобедренного треугольника равен 12 см, а одна из его сторон больше другой на 3 см. Найдите стороны этого треугольника.
27. Периметр равнобедренного треугольника равен 21 см, а одна из его сторон больше другой на 6 см. Найдите стороны этого треугольника.
28. Одна из сторон тупоугольного равнобедренного треугольника больше другой на 8 см, а его периметр равен 38 см. Найдите стороны этого треугольника.

Окружность

29. В окружности проведены диаметр AB и хорда AC , равная радиусу. Найдите угол ABC .
30. Серединный перпендикуляр к радиусу OA окружности пересекает её в точках B и C . Найдите углы треугольника OAB .

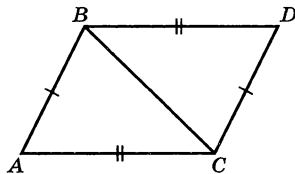
31. В окружности с центром O проведены радиусы OA , OB и OC так, что $\angle AOB = \angle BOC$. Докажите, что $\angle OAB = \angle OCB$.
32. На окружности с диаметром AB отмечена точка C так, что $\angle CAB = 40^\circ$. Найдите угол ABC .
33. В окружности с центром O проведены радиусы OA , OB и OC так, что $OB \perp AC$ и отрезки OB и AC пересекаются. Докажите, что $AB = BC$.
34. На прямой, касающейся в точке A окружности с центром O , отмечена точка B , и из точки A проведён перпендикуляр AN к прямой OB . Найдите угол ABO , если $BN = 3$ см и $NO = 1$ см.

Построения

35. Постройте треугольник по высоте и двум отрезкам, на которые эта высота делит сторону треугольника.
36. Постройте прямоугольный треугольник по катету и прилежащему к нему острому углу.
37. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и сумме боковых сторон.
38. Постройте прямоугольный треугольник с углом в 30° по гипотенузе.
39. Постройте прямоугольный треугольник, у которого один катет равен данному отрезку, а другой катет в два раза меньше гипотенузы.
40. Постройте прямоугольный треугольник по катету и противолежащему ему острому углу.
41. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник по гипотенузе.
42. Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и высоте, проведённой из вершины прямого угла.

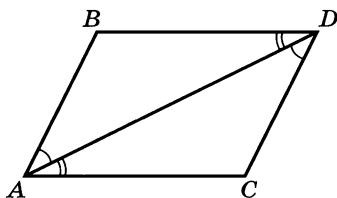
Тестовые задания

1. Внутри угла AOB проведены лучи OC и OD . Сколько углов изображено на полученном рисунке?
А. Три.
Б. Четыре.
В. Пять.
Г. Шесть.
2. Через одну точку проведены три прямые. Сколько при этом образовалось неразвёрнутых углов?
А. Шесть.
Б. Девять.
В. Двенадцать.
Г. Пятнадцать.
3. Отрезок a в полтора раза больше отрезка b . Во сколько раз отрезок $2a + 3b$ больше отрезка $a + b$?
А. В 2 раза.
Б. В 2,4 раза.
В. В 2,5 раза.
Г. В 3 раза.
4. На рисунке отрезки AB и CD равны, отрезки AC и BD также равны. Какой признак равенства треугольников позволяет доказать равенство треугольников ABC и DCB ?

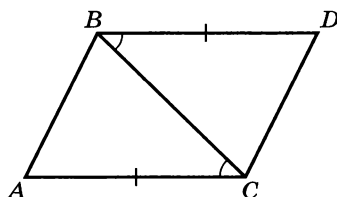


- А. Первый признак.
- Б. Второй признак.
- В. Третий признак.
- Г. Ни один признак не применим.

5. На рисунке углы BAD и CDA равны, углы BDA и CAD также равны. Какой признак равенства треугольников позволяет доказать равенство треугольников ABD и DCA ?



- А. Первый признак.
Б. Второй признак.
В. Третий признак.
Г. Ни один признак не применим.
6. На рисунке отрезки AC и BD равны, углы ACB и DBC также равны. Какой признак равенства треугольников позволяет доказать равенство треугольников ABC и DCB ?



- А. Первый признак.
Б. Второй признак.
В. Третий признак.
Г. Ни один признак не применим.
7. Определите вид треугольника, две высоты которого совпадают с его сторонами.
- А. Прямоугольный треугольник.
Б. Остроугольный треугольник.
В. Тупоугольный треугольник.
Г. Такого треугольника не существует.
8. Определите вид треугольника, две высоты которого лежат вне треугольника.
- А. Прямоугольный треугольник.
Б. Остроугольный треугольник.
В. Тупоугольный треугольник.
Г. Такого треугольника не существует.

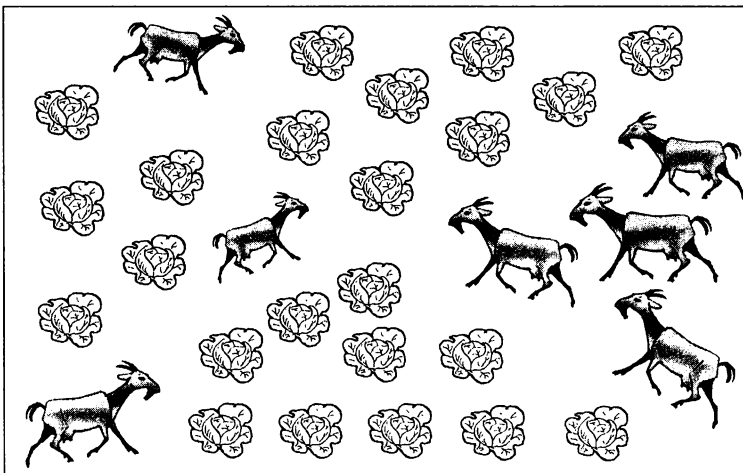
9. Высота, проведённая из вершины A треугольника ABC , лежит вне треугольника. Какое из следующих утверждений верно?
- А. Угол A или угол C тупой.
 - Б. Угол A тупой.
 - В. Угол B или угол C тупой.
 - Г. Угол A или угол B тупой.
10. Высота, проведённая из вершины A треугольника ABC , лежит внутри треугольника. Какое из следующих утверждений верно?
- А. Углы A и C острые.
 - Б. Углы B и C острые.
 - В. Угол A острый.
 - Г. Углы A и B острые.
11. В треугольнике ABC проведены медиана AM и высота CH . Чему равен отрезок HM , если $BC = 20$ см?
- А. 10 см.
 - Б. 40 см.
 - В. 20 см.
 - Г. 30 см.
12. В треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота CH . Чему равна гипотенуза AB , если $BC = 8$ см и $BH = 4$ см?
- А. 32 см.
 - Б. 8 см.
 - В. 16 см.
 - Г. 12 см.
13. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол B равен 20° . Чему равен внешний угол при вершине A ?
- А. 100° .
 - Б. 120° .
 - В. 80° .
 - Г. 110° .

14. В равнобедренном треугольнике ABC с углом 72° при основании AC проведена биссектриса AD . Сравните отрезки AD и BD .
- А. $AD > BD$.
 - Б. $AD = BD$.
 - В. $AD < BD$.
 - Г. Возможны разные варианты.
15. В равнобедренном треугольнике ABC с углом B , равным 120° , проведены высоты BM и AN . Их продолжения пересекаются в точке O . Чему равен угол AOB ?
- А. 25° .
 - Б. 40° .
 - В. 35° .
 - Г. 30° .

Дополнительные задачи

Глава 1

1. Сколько точек пересечения могут иметь три прямые, каждые две из которых пересекаются?
2. Сколько точек пересечения могут иметь четыре прямые, каждые две из которых пересекаются?
3. Сколько точек пересечения могут иметь пять прямых, каждые две из которых пересекаются?
4. Даны три точки. Сколько может получиться прямых, если через каждые две точки провести прямую? Рассмотрите все возможные случаи.
5. Даны четыре точки. Сколько может получиться прямых, если через каждые две точки провести прямую? Рассмотрите все возможные случаи.
6. Даны пять точек. Сколько может получиться прямых, если через каждые две точки провести прямую? Рассмотрите все возможные случаи.
7. Проведите на рисунке три прямые так, чтобы они отделили коз от капусты.



8. На прямой отмечены n точек. Сколько получилось отрезков с концами в этих точках?
9. На прямолинейной дороге из избы A в избу B расположены избы C и D . В какой точке дороги нужно построить колодец, чтобы сумма расстояний от колодца до всех четырёх изб была бы наименьшей?
10. На прямой отмечены 10 точек. Докажите, что сумма длин всех отрезков с концами в отмеченных точках больше 8 см, если длина наибольшего из них равна 1 см.
11. В деревне A живёт 50 школьников, а в деревне B живёт 100 школьников. Расстояние между деревнями равно 3 км. В какой точке дороги из A в B нужно построить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое всеми школьниками, было как можно меньше?
12. На сколько частей могут делить плоскость 4 прямые, каждые две из которых пересекаются?
13. На сколько частей могут делить плоскость 5 прямых, каждые две из которых пересекаются?

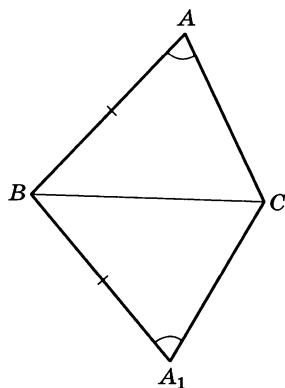
Глава 2

14. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка M так, что $BM = AB$. Найдите разность углов BAM и CAM , если $\angle ACB = 35^\circ$.
15. Биссектриса AK треугольника ABC перпендикулярна к его медиане BM . Найдите AC , если $AB = 1$ см.
16. Может ли сумма любых двух углов треугольника быть больше 120° ?
17. В равнобедренном треугольнике ABC угол при основании AC равен 75° . Докажите, что высота AH вдвое меньше боковой стороны.
18. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что середина стороны AB равноудалена от точек A_1 и B_1 .
19. В треугольнике ABC угол A равен 120° . Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны AC , BC и $AB + AC$.
20. В треугольнике ABC с углом A , равным 120° , проведены биссектрисы AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что $\angle B_1A_1C_1 = 90^\circ$.

21. В треугольнике ABC , в котором $\angle A = 36^\circ$ и $\angle B = 108^\circ$, проведены биссектрисы AA_1 и BB_1 . Докажите, что $AA_1 = 2BB_1$.
22. Найдите ошибку в решении следующей задачи. «Через вершину A равнобедренного треугольника ABC проведён луч, пересекающий его основание BC , и на этом луче отмечена точка D , для которой $\angle ABD = \angle ACD$. Обязательно ли точка D равноудалена от точек B и C ?» «Решение». Треугольник ABC равнобедренный с основанием BC , поэтому $\angle ABC = \angle ACB$. Следовательно, учитывая, что $\angle ABD = \angle ACD$ по условию, получаем, что $\angle CBD = \angle BCD$, т. е. в треугольнике DBC углы B и C равны. Поэтому этот треугольник равнобедренный и $BD = DC$, т. е. точка D равноудалена от точек B и C .

23. Найдите ошибку в следующем рассуждении:

«Докажем, что если $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Приложим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ друг к другу так, чтобы их равные стороны BC и B_1C_1 совместились, причём точка B совпала с точкой B_1 , а точка C — с точкой C_1 , и точки A и A_1 оказались бы по разные стороны от прямой BC . Треугольник ABA_1 равнобедренный, поэтому $\angle BAA_1 = \angle BA_1A$. Из равенства углов A и A_1 следует, что $\angle CAA_1 = \angle CA_1A$. Поэтому треугольник ACA_1 равнобедренный и $AC = A_1C$. Таким образом, соответственные стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны, поэтому эти треугольники равны».

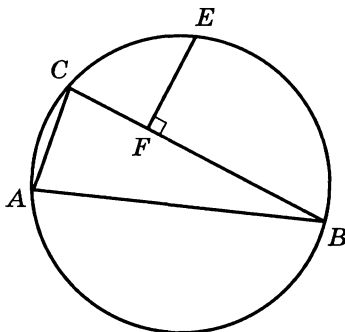


24. Найдите ошибку в следующем рассуждении: «Докажем, что сумма углов треугольника равна 180° . Искомую сумму углов обозначим буквой x . Разобьём треугольник ABC на два треугольника отрезком AD . Сложим равенства $\angle ACD + \angle CAD + \angle ADC = x$ и $\angle ABD + \angle BAD + \angle ADB = x$. Учитывая, что $\angle ADC + \angle ADB = 180^\circ$ и $\angle CAD + \angle BAD = \angle A$, получаем: $\angle A + \angle B + \angle C + 180^\circ = 2x$. Таким образом, $x + 180^\circ = 2x$, т. е. $x = 180^\circ$ ».

25. Равнобедренный треугольник ABC разбит отрезком AD на два равнобедренных треугольника ACD и ABD . Найдите углы треугольника ABC .

Глава 3

26. Точка D лежит на биссектрисе угла A . Две окружности, проходящие через точки A и D , пересекают одну сторону этого угла в точках B_1 и B_2 , а другую — в точках C_1 и C_2 . Докажите, что $B_1B_2 = C_1C_2$.
27. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость три окружности?
28. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость четыре окружности?
29. Нарисована окружность, но её центр не отмечен. С помощью одного лишь чертёжного угольника постройте центр этой окружности.
30. На одной стороне угла с вершиной A отмечена точка B . С помощью циркуля и линейки постройте на другой стороне данного угла точку C так, что $\angle ABC = 3\angle ACB$.
31. Задача Архимеда. На окружности отмечены точки A , B , C и E , причём точка E — середина дуги AB , а точки B и C лежат по разные стороны от прямой AE . Из точки E проведён перпендикуляр EF к прямой BC . Докажите, что $AC + CF = BF$.





Самостоятельные работы

С-1

Вар. 1. 1. Да. 2. 4. 3. В разных.

Вар. 2. 1. Да. 2. 4. 3. В одной.

Вар. 3. 1. Да, могут (рис. 1). 2. 10. 3. Точку X можно отметить в любой из заштрихованных областей (рис. 2).

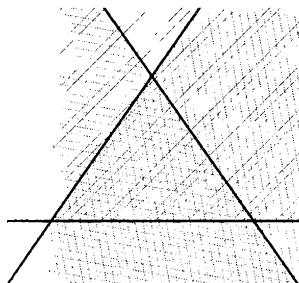


Рис. 1

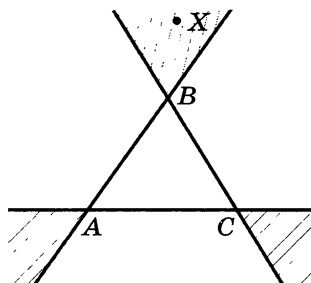


Рис. 2

Вар. 4. 1. Да, могут (рис. 3). 2. 6. 3. Точку Y нужно отметить в заштрихованной области (рис. 4).

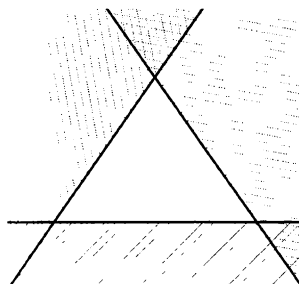


Рис. 3

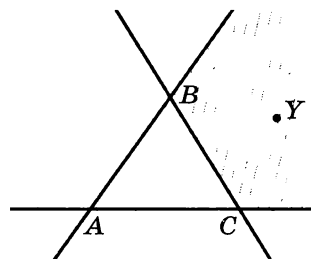


Рис. 4

Вар. 1. 1. 12 см и 6 см. 2. 5 см. 3. 120° и 60° .

Вар. 2. 1. 2 см и 6 см. 2. 5 см. 3. 120° и 60° .

Вар. 3. 1. 4 см и 7 см. 2. 8 см. 3. 60° и 30° .

Вар. 4. 1. 5 см и 3 см. 2. 10 см. 3. 60° и 30° .

Вар. 1. 1. 100° и 80° . 2. 20° .

3. Да.

Вар. 2. 1. 135° и 45° . 2. 10° .

3. Да.

Вар. 3. 1. 110° , 70° , 110° и 70° .

2. 70° . 3. 180° .

Вар. 4. 1. 84° и 96° . 2. 170° .

3. Да. Указание. Один из углов может быть острым, а другой — тупым (рис. 5).

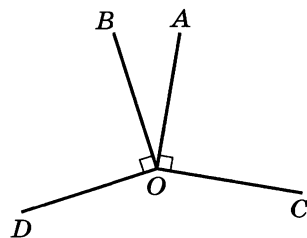


Рис. 5

Вар. 1. 1. Указание. Разность периметров двух рассматриваемых треугольников равна разности длин двух сторон исходного треугольника. 3. Нет. Указание. Угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из одной вершины, меньше половины угла треугольника с этой вершиной и, следовательно, меньше 90° .

Вар. 2. 1. Указание. В треугольниках ACB и ADB провести медианы к стороне AB . 3. Нет. Указание. Угол, образованный стороной угла и биссектрисой этого угла, меньше 90° .

Вар. 3. 1. Нет. Указание. Предположим, что медиана AM и высота AH перпендикулярны. Тогда MA и MH — два перпендикуляра, проведённые из точки M к прямой AH . 2. Указание. Воспользоваться идеей доказательства теоремы об углах равнобедренного треугольника. 3. 7 см или 3 см. Указание. Доказать, что треугольники ABD и CBE равнобедренные.

Вар. 4. 1. Нет. Указание. Предположим, что биссектриса AD и высота AH перпендикулярны. Тогда DA

и DH — два перпендикуляра, проведенные из точки D к прямой AH . 2. У к а з а н и е. Воспользоваться идеей доказательства теоремы об углах равнобедренного треугольника. 3. 10 см или 4 см. У к а з а н и е. Доказать, что треугольники ABD и CBE равнобедренные.

С-5

Вар. 1. 1. Треугольники AOC и BOD равны по первому признаку, поэтому $AC = BD$. 2. Треугольники AMC и DMB равны по первому признаку, поэтому $AC = BD$. 3. Треугольники APB и APC равны по второму признаку, поэтому $AB = AC$.

Вар. 2. 1. Треугольники AOC и BOD равны по первому признаку, поэтому $\angle ACO = \angle BDO$. 2. Треугольники AMB и DMC равны по первому признаку, поэтому $AB = CD$. 3. Треугольники APB и APC равны по второму признаку, поэтому $AB = AC$.

Вар. 3. 1. Треугольники AOD и COB равны по первому признаку, поэтому $AD = BC$. 2. Нет. Р е ш е н и е. Предположим, что $AC = AD$ и $BC = BD$. Тогда треугольники ABC и ABD равны по третьему признаку. Поэтому луч AC совпадает с лучом AD , а луч BC совпадает с лучом BD . Следовательно, точки C и D совпадают, что противоречит условию. 3. У к а з а н и е. Треугольники ABB_1 и BA_1A равны по первому признаку.

Вар. 4. 1. Треугольники OAD и OCB равны по первому признаку, поэтому $\angle OAD = \angle OCB$. 2. Нет. Р е ш е н и е. Предположим, что $\angle CAB = \angle DAB$ и $\angle CBA = \angle DBA$. Тогда луч AC совпадает с лучом AD , а луч BC совпадает с лучом BD . Следовательно, точки C и D совпадают, что противоречит условию. 3. У к а з а н и е. Треугольники AB_1B и BA_1A равны по первому признаку.

С-6

Вар. 1. 1. 8 см. 2. 5 см. У к а з а н и е. $AM = BM$, поэтому периметр треугольника ABM равен $5AB$. 3. Да. У к а з а н и е. Провести медиану прямоугольного треугольника.

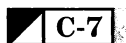
Вар. 2. 1. 10 см. 2. 4 см. У к а з а н и е. $AM = BM$, поэтому периметр треугольника ABM равен $7AB$. 3. У к а

зание. Пусть $\angle BCK = \alpha$. Тогда $\angle ACK = 90^\circ - \alpha$, $\angle B = \alpha$, $\angle A = 90^\circ - \alpha$, поэтому треугольник KAC равнобедренный и $KA = KC = KB$.

Вар. 3. 1. 3 см. 2. Указание. Проведём перпендикуляр PH к прямой AC . В прямоугольном треугольнике APH угол APH равен 30° , поэтому $AH = \frac{1}{2} AP = AQ$.

3. Указание. Отметим на катете C_1B_1 точку B_2 так, что $C_1B_2 = CB$. Тогда $A_1B_2 = AB$. Отметим на луче A_1B_1 такую точку D , что $A_1D = A_1B_2$, получим равнобедренный треугольник A_1B_2D . Угол A_1B_2D при основании этого треугольника острый, а угол $A_1B_2B_1$ тупой, поэтому точка D лежит на отрезке A_1B_1 . Следовательно, $A_1B_2 < A_1B_1$.

Вар. 4. 1. 4 см. 2. 90° , 60° и 30° . 3. Указание. Отметить на катетах A_1C_1 и B_1C_1 точки A_2 и B_2 так, что $C_1A_2 = CA$ и $C_1B_2 = CB$, и доказать, что $A_2B_2 < A_1B_2 < A_1B_1$.



Вар. 1. 1. 30° , 45° и 105° . 2. Нет. Указание. Если $AB \geq BC$ и $AC > 2AB$, то $AC > AB + BC$, что противоречит неравенству треугольника. 3. $\angle ADC = 2\angle ABC$. Указание. Угол ADC — внешний угол равнобедренного треугольника BDC .

Вар. 2. 1. 36° , 48° и 96° . 2. Да. Указание. Рассмотрим прямоугольный треугольник, в котором один катет в три раза больше другого. 3. $\angle ADC = \frac{1}{2} \angle ABC$. Указание. Угол ABC — внешний угол равнобедренного треугольника CBD .

Вар. 3. 1. Нет. Указание. Сумма углов треугольника не больше утроенного наибольшего угла. 2. Нет. Указание. Угол CBD тупой, поэтому он — наибольший угол треугольника CBD . 3. $\angle A = 72^\circ$, $\angle B = 36^\circ$, $\angle C = 72^\circ$. Указание. Пусть $\angle CAD = \alpha$. Тогда $\angle ACD = \angle ADC = \angle BAD + \angle ABD = 2\alpha$.

Вар. 4. 1. Нет. Указание. Сумма углов треугольника не меньше утроенного наименьшего угла. 2. Да. Указание. Провести высоту CD треугольника ABC . 3. 5 см. Указание. В соответствии с неравенством треугольника длина третьей стороны в сантиметрах больше 4 и меньше 6.

Вар. 1. 1. 120° . 2. 20° . Указание. Угол между касательной (стороной угла) и хордой, соединяющей точки касания окружности со сторонами угла, равен $\frac{160^\circ}{2} = 80^\circ$.

3. Указание. Боковая сторона и середина основания равнобедренного треугольника являются соответственно гипотенузой и вершиной прямого угла прямоугольного треугольника.

Вар. 2. 1. 60° . 2. 150° и 210° . Указание. Угол между касательной (стороной угла) и хордой, соединяющей точки касания окружности со сторонами угла, равен $\frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$. 3. Указание. Пусть окружность, диа-

метром которой служит сторона AB треугольника ABC , проходит через середину M стороны AC . Тогда BM — серединный перпендикуляр к отрезку AC .

Вар. 3. 1. 5 см. 2. 60° . Указание. Сначала доказать, что треугольники OBL и OAK равносторонние. 3. 10 см.

Вар. 4. 1. 5 см. 2. $\angle AOK = 2\angle B$. Указание. Выразить углы B и AOK через угол A . 3. Указание. Углы BAC и BAD опираются на дуги, градусные меры которых либо равны, либо составляют в сумме 360° .

Вар. 1. 1. Указание. Рассмотреть прямоугольный треугольник, вершинами которого являются общий центр окружностей, середина хорды и один из концов хорды. 2. Указание. Прямоугольные треугольники APD и AQD равны по гипотенузе и острому углу. 3. Указание. Точки P и Q лежат на окружности с диаметром AM .

Вар. 2. 1. $\frac{b-a}{2}$. Указание. Пусть P — точка пересечения хорд, H — основание перпендикуляра, проведённого из точки O к одной из хорд. Тогда $PH + a = \frac{a+b}{2}$.

2. Указание. Прямоугольные треугольники APD и AQD равны по гипотенузе и острому углу. 3. Указание. Точки P и Q лежат на окружности с диаметром AM .

Вар. 3. 1. Указание. Центры окружностей лежат на серединном перпендикуляре к их общей хорде. 2. Указание. $MB = MA = MC$. 3. Указание. Доказать равенство углов MBC и MCB .

Вар. 4. 1. Указание. Прямые MB и NB перпендикуляры к прямой AB . 2. Указание. Рассмотреть точку O , в которой первая прямая пересекает прямую BC , и доказать, что $OB = OA = OC$. 3. Указание. Доказать равенство углов EAD и EDA .

C-10

Вар. 1. 2. Указание. Сначала построить биссектрису данного угла. 3. Указание. Сначала построить окружность, диаметр которой равен данной гипотенузе. Затем на диаметре от его конца отложить отрезок, равный данной проекции катета на гипотенузу, и через конец отрезка провести прямую, перпендикулярную к диаметру. Вершина прямого угла искомого треугольника — это одна из точек пересечения построенных окружности и прямой.

Вар. 2. 2. Указание. Сначала построить серединный перпендикуляр к данному основанию. 3. Указание. Сначала построить биссектрису данного угла, а затем — прямую, проходящую через точку O и перпендикулярную к биссектрисе.

Вар. 3. 1. Указание. Сначала построить угол в 60° и на его биссектрисе отложить от вершины отрезок, равный данной высоте. 2. Указание. Если высота, проведённая к одной из сторон, равна другой стороне, то искомым треугольник прямоугольный, причём его катеты равны данным сторонам. Если же высота меньше другой стороны, то сначала построить прямоугольный треугольник, катет которого равен данной высоте, а гипотенуза — другой стороне. 3. Указание. Рассмотреть общие точки данной окружности и окружности, диаметром которой служит отрезок с концами в данных точках.

Вар. 4. 2. Указание. Если биссектриса не равна высоте, то сначала построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна данной биссектрисе, а один из катетов — данной высоте. 3. Указание. Центром искомой окружности является точка пересечения биссектрисы данного угла и прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к стороне угла, на которой лежит эта точка.

Вар. 1. 1. Указание. Провести прямую через точку A и середину отрезка BC . 2. Указание. Сначала построить точку D на данной окружности так, чтобы длина отрезка AD равнялась диаметру данной окружности, и провести диаметр BD . 3. Указание. Сначала построить окружность с центром A и радиусом AB , а затем окружность с центром B и радиусом BA .

Вар. 2. 1. Указание. Сначала провести перпендикуляр из данной точки к данной прямой, а затем построить прямоугольный треугольник по катету и противолежащему острому углу. 2. Указание. Сначала построить прямоугольный треугольник, катеты которого равны данным отрезкам, а затем — серединный перпендикуляр к его гипотенузе. 3. Указание. Построить окружности с центром A и радиусом AB и с центром B и радиусом BA .

Вар. 3. 1. Указание. Если высота равна одной из данных сторон, то искомым треугольник прямоугольный, причём у него известны катет и гипотенуза. Если же высота не равна ни одной из данных сторон, то построить два прямоугольных треугольника, у которых общий катет равен данной высоте, а гипотенузы — данным сторонам. 2. Указание. Если $\angle A - \angle B = \alpha$, то $\angle A = \frac{90^\circ + \alpha}{2}$ и $\angle B = \frac{90^\circ - \alpha}{2}$.

3. Указание. Построить окружность с центром B и радиусом BA и затем отложить на ней последовательно от точки A три дуги в 60° .

Вар. 4. 1. Указание. Сначала построить два прямоугольных треугольника, у каждого из которых острый угол равен данному углу, а лежащий против этого угла катет равен одной из данных высот. 2. Указание. Сначала построить треугольник ABD , в котором сторона AB равна гипотенузе, сторона BD равна разности катетов и $\angle D = 135^\circ$. 3. Указание. Построить окружность с центром A и радиусом AB и затем отложить на ней последовательно от точки B три дуги в 60° .

Вар. 1. 1. $130^\circ, 50^\circ, 130^\circ, 50^\circ$. 2. $AC > BC$. Указание. Пусть D — точка пересечения отрезка AC и серединного перпендикуляра. Доказать, что $\angle ABC > \angle ABD = \angle BAC$.

3. У к а з а н и е. Провести из точки O перпендикуляры OK и ON к хордам и доказать, что прямоугольные треугольники OKM и ONM равны.

Вар. 2. 1. $110^\circ, 70^\circ, 110^\circ, 70^\circ$. 2. У к а з а н и е. Пусть высота AH треугольника ABC разделяет его на два треугольника, периметры которых равны, и не является его медианой. Тогда $BH > CH$ или $BH < CH$. Пусть $BH > CH$. Отметим на отрезке BH точку C_1 так, что $C_1H = CH$. Тогда $BA + BH = BA + BC_1 + C_1H > AC_1 + C_1H = AC + CH$, поэтому периметр треугольника ABH больше периметра треугольника ACH . Приходим к противоречию. Случай, когда $BH < CH$, рассматривается аналогично. 3. У к а з а н и е. Вторая хорда лежит на серединном перпендикуляре к первой хорде.

Вар. 3. 2. Нет. У к а з а н и е. Если бы периметр был равен 10 см, то стороны такого треугольника были бы равны 4 см, 5 см и 1 см, что противоречит неравенству треугольника. 3. 3а. У к а з а н и е. Сначала доказать, что $\angle MNA = \alpha$, $\angle BMN = 2\alpha = \angle NBM$.

Вар. 4. 2. Нет. У к а з а н и е. Если стороны треугольника равны a , $b = 2a$ и $c = \frac{a}{2}$, то $a + c < b$. 3. 3а. У к а з а н и е.

Сначала доказать, что $\angle BOC = \alpha$, $\angle OBA = 2\alpha = \angle OAB$.

Контрольные работы

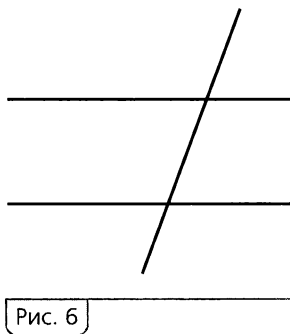
К-1

Вар. 1. 3. 45° . 4. Одну, две или три.

Вар. 2. 3. 60° . 4. На шесть или семь.

Вар. 3. 1. Нет. 2. 1,1 см или 3,5 см. 3. Острый.

Вар. 4. 1. См. рис. 6. 2. Нет. 3. Тупой.



К-2

Вар. 1. 4. Да.

Вар. 2. 2. 60° . 4. Да.

Вар. 3. 3. Нет. 4. Нет.

Вар. 4. 4. Нет.

К-3

Вар. 1. 1. Серединный перпендикуляр к отрезку с концами в данных точках. 2. 10 см.

Вар. 2. 1. Прямая, перпендикулярная к данной прямой и проходящая через данную точку, из которой сама данная точка исключена. 2. 5 см.

Вар. 3. 1. Окружность с тем же центром, что и данная окружность; радиус этой окружности равен гипотенузе прямоугольного треугольника, один катет которого равен радиусу данной окружности, а другой имеет заданную длину. 2. 45° и 45° .

Вар. 4. 1. Окружность с тем же центром, что и данная окружность; радиус этой окружности равен катету прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна радиусу данной окружности, а длина второго катета равна половине заданной длины. 2. 30° и 60° .

К-4

Вар. 1. 1. 80° . 2. 60° . 3. 4 см.

Вар. 2. 1. 40° . 2. 45° . 3. 60° .

Вар. 3. 1. 9 см. 2. 10 см.

Вар. 4. 1. 150° . 2. 5 см. 3. 70° .

Математические диктанты**МД-1**

Вар. 1. 3. Нет. 4. 70° , 110° , 70° , 110° . 5. 50° . 6. Да. 7. 60° . 8. Нет.

Вар. 2. 2. 180° . 3. Нет. 4. 80° , 100° , 80° , 100° . 5. 40° . 6. Да. 7. 20° . 8. Нет.

МД-2

Вар. 1. 2. Вторым. 3. Первым. 5. $AC = A_1C_1$. 6. $\angle B > \angle C$. 7. 100° . 8. 2 см.

Вар. 2. 2. Первым. 3. Вторым. 5. $AC = A_1C_1$. 6. $AC > BC$. 7. 130° . 8. 1 см.

Вар. 1. 2. Да. 3. 14 см. 4. Да. 5. $\angle ABD = \angle CAD$.
Вар. 2. 2. Нет. 3. 10 см. 4. 90° . 5. $\angle ACD = \angle CAD$.

Примерные задачи к экзамену

1. 22° . 2. 25° . 3. Могут иметь, а могут и не иметь.
4. 20° и 160° . 6. 130° . 7. 60° . 9. 2 см. 10. $AD = CD$.
17. 10 см. 18. 60° . Указание. Доказать, что $FG = 9$ см.
19. 30° и 60° . Указание. Провести медиану из вершины прямого угла. 20. 20° , 30° и 130° . 21. 52° , 52° и 76° .
22. 30° , 30° и 120° . 23. 130° . 26. 5 см, 5 см и 2 см. Указание. Другой формальный ответ 3 см, 3 см и 6 см противоречит неравенству треугольника. 27. 9 см, 9 см и 3 см. Указание. Другой формальный ответ 5 см, 5 см и 11 см противоречит неравенству треугольника. 28. 10 см, 10 см и 18 см. Указание. В тупоугольном равнобедренном треугольнике основание больше боковой стороны. 29. 30° .
30. 60° , 60° и 60° . 32. 50° . 34. 30° .

Тестовые задания

1. Г. 2. В. 3. Б. 4. В. 5. Б. 6. А. 7. А. 8. В. 9. В.
10. Б. 11. А. 12. В. 13. А. 14. Б. 15. Г.

Дополнительные задачи

1. Одну или три. 2. Одну, четыре или шесть. Указание. Либо все четыре прямые проходят через одну точку, либо три прямые проходят через одну точку, а четвёртая прямая пересекает их в трёх других точках, либо никакие три прямые не проходят через одну точку. 3. Одну, пять, шесть, восемь или десять. Указание. Возможны следующие случаи: 1) все пять прямых проходят через одну точку; 2) четыре прямые проходят через одну точку, а пятая прямая не проходит через эту точку; 3) три прямые проходят через одну точку, а две оставшиеся прямые через эту точку не проходят, но точка пересечения этих двух прямых лежит на одной из трёх первых прямых; 4) три прямые проходят через одну точку, а две оставшиеся прямые через эту точку не проходят, причём точка пересечения этих двух прямых не лежит ни на одной из трёх первых

прямых; 5) никакие три прямые не проходят через одну точку. 4. Одну или три. 5. Одну, четыре или шесть. У к а з а н и е. Либо все четыре точки лежат на одной прямой, либо три точки лежат на одной прямой, а четвёртая точка не лежит на этой прямой, либо никакие три точки не лежат на одной прямой. 6. Одну, пять, шесть, восемь или десять. У к а з а н и е. Возможны следующие случаи: 1) все пять точек лежат на одной прямой; 2) четыре точки лежат на одной прямой, а пятая не лежит на этой прямой; 3) три точки лежат на одной прямой, а две оставшиеся точки не лежат на одной прямой, но задаваемая ими прямая проходит через одну из трёх первых точек; 4) три точки лежат на одной прямой, а две оставшиеся точки не лежат на одной прямой, причём задаваемая ими прямая не проходит ни через одну из трёх первых точек; 5) никакие три точки не лежат на одной прямой. 7. См. рис. 7. 8. $\frac{n(n-1)}{2}$.

9. В любой точке между C и D . У к а з а н и е. Сумма расстояний до точек A и B одна и та же для всех точек отрезка AB , а сумма расстояний до точек C и D равна CD для точек на отрезке CD и больше CD для точек вне отрезка CD . 10. У к а з а н и е. Пусть отмечены точки $A_1, \dots, A_{10}$, причём точки $A_2, \dots, A_9$ лежат между A_1 и A_{10} . Сложить 8 равенств $A_1A_2 + A_2A_{10} = A_1A_{10}, \dots, A_1A_9 + A_9A_{10} = A_1A_{10}$. 11. В деревне B . У к а з а н и е. Пусть расстояние от школы до деревни B равно x км. Тогда суммарное расстояние, про-

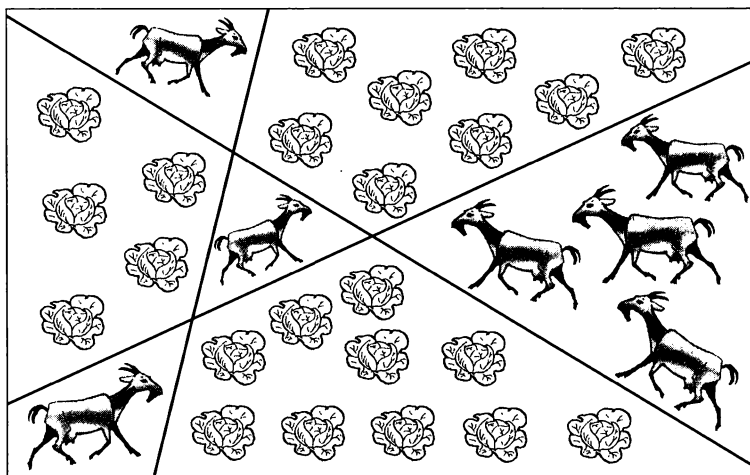


Рис. 7

ходимое всеми школьниками от деревни до школы, равно $100x + 50(3 - x) = 150 + 50x$. Оно будет наименьшим, когда $x = 0$. 12. На 8, 10 или 11. 13. На 10, 14, 15 или 16. 14. 35° . Указание. Воспользоваться тем, что $\angle BMA = \angle CAM + \angle ACB$. 15. 2 см. Указание. Сначала доказать, что $AB = AM$. 16. Нет. Указание. Предположим, что $\angle A + \angle B > 120^\circ$, $\angle B + \angle C > 120^\circ$ и $\angle A + \angle C > 120^\circ$. Тогда, сложив эти неравенства, получим, что $\angle A + \angle B + \angle C > 180^\circ$. 17. Указание. В прямоугольном треугольнике AHB катет AH лежит против угла в 30° , поэтому он вдвое меньше гипотенузы AB . 18. Указание. Каждая из медиан A_1M и B_1M прямоугольных треугольников AA_1B и AB_1B равна половине гипотенузы AB . 19. Указание. На продолжении стороны AB за точку A отметить точку A_1 так, что $AA_1 = AC$. 20. Указание. Сначала отметить точки B_2 и C_2 на продолжениях сторон BA и CA за точку A и доказать, что точки B_1 и C_1 лежат на биссектрисах углов A_1AB_2 и A_1AC_2 . Затем доказать, что лучи A_1B_1 и A_1C_1 являются биссектрисами углов AA_1C и AA_1B . 21. Указание. Пусть O — точка пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 . Сначала на продолжении отрезка BB_1 за точку B_1 отложить отрезок B_1D , равный BB_1 , а затем доказать, что треугольники AOD и BOA_1 равнобедренные. 22. Если точка D лежит на отрезке BC , то треугольника DBC нет (он вырождается в отрезок), и наше рассуждение становится неверным. Неверен и полученный при этом ответ, поскольку в качестве D можно взять любую точку на отрезке BC . 23. Ошибка заключается в предположении, что точка C не лежит на отрезке AA_1 , т. е. существует треугольник ACA_1 . Если точка C лежит на отрезке AA_1 , то мы не сможем доказать, что $AC = A_1C$ (рис. 8). 24. Ошибка состоит в том, что сумма углов любого треугольника предполагается равной одной и той же величине x . 25. Возможны три варианта: 1) 90° , 45° , 45° ; 2) 36° , 72° , 72° ; 3) $\frac{180^\circ}{7}$; $\frac{540^\circ}{7}$; $\frac{540^\circ}{7}$. 26. Указание. Доказать, что треугольники DB_1B_2 и DC_1C_2 равны. 27. 8. 28. 14. 29. Указание. Если по-

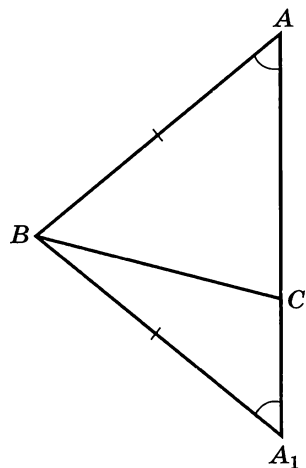


Рис. 8

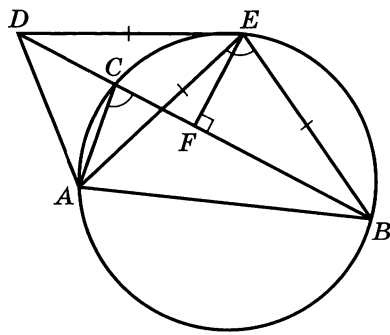


Рис. 9

местить вершину угольника на окружности, то его стороны пересекут окружность в двух точках, являющихся концами одного диаметра. Построив два диаметра, получим точку их пересечения, т. е. центр окружности. **30.** Указание. Сначала на другой стороне угла отложить отрезок AD , равный AB , а затем на продолжении отрезка AD за точку D отложить отрезок DC , равный DB . **31.** Указание. Отложим на продолжении отрезка BF за точку F отрезок FD , равный BF (рис. 9). Тогда $DE = EB = EA$ и $\angle BDE = \angle EBD = \angle CAE$. Следовательно, $AC = DC$ и $AC + CF = DC + CF = DF = BF$.

Содержание

<u>Предисловие</u>	<u>3</u>
<u>Самостоятельные работы</u>	<u>5</u>
<u>Контрольные работы</u>	<u>21</u>
<u>Математические диктанты</u>	<u>33</u>
<u>Примерные задачи к экзамену</u>	<u>37</u>
<u>Тестовые задания</u>	<u>41</u>
<u>Дополнительные задачи</u>	<u>45</u>
<u>Ответы и указания</u>	<u>49</u>

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Бутузов Валентин Фёдорович

Кадомцев Сергей Борисович

Прасолов Виктор Васильевич

ГЕОМЕТРИЯ

Дидактические материалы

7 класс

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*

Редактор *П. А. Бессарабова*

Младший редактор *Е. А. Андрееenkova*

Художественный редактор *О. П. Богомолова*

Компьютерная графика *С. А. Крутикова*

Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*

Корректоры *С. В. Николаева, Ю. В. Григорьева*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 17.02.10. Формат 60 × 90¹/₁₆. Бумага писчая. Гарнитура Школьная.

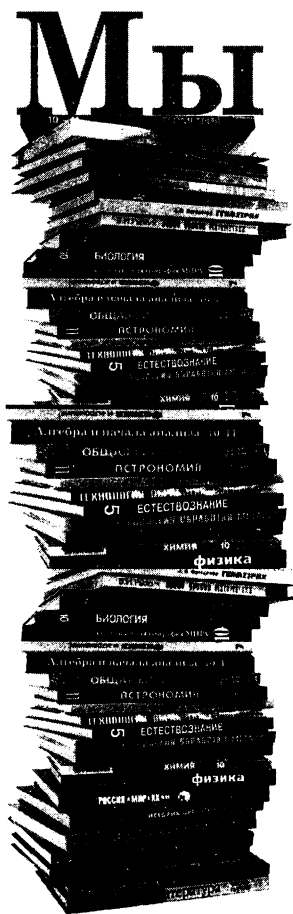
Печать офсетная. Уч.-изд. л. 2,3. Тираж 5000 экз. Заказ № 24946 (к-л).

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».

127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Открытое акционерное общество «Смоленский полиграфический комбинат».

214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.



Выпускаем

- ▶ Учебники
- ▶ Методическую литературу
- ▶ Научно-познавательную литературу
- ▶ Словари и справочную литературу
- ▶ Наглядные пособия и карты
- ▶ Учебные мультимедийные пособия

Обучаем

Интернет-школа «Просвещение.ru»
125315, Москва, ул. Балтийская, 14
Тел. (495) 155-4403, 729-3522, 729-3533
E-mail: office@internet-school.ru

Представляем

На сайте издательства для наших
партнеров, учителей и родителей

- ▶ Каталог выпускаемой продукции
- ▶ Методические пособия, презентации, программы повышения квалификации, поурочные разработки, аудиокурсы mp3
- ▶ Информационно-публицистический бюллетень «Просвещение»
- ▶ Форумы «Просвещение», «Спрашивайте! Отвечаем!»
- ▶ Ссылки на образовательные Интернет-ресурсы
- ▶ Адреса региональных книготорговых структур

Приглашаем к сотрудничеству

- ▶ Учреждения дополнительного педагогического образования и библиотеки с целью проведения авторских и методических семинаров
- ▶ Книготорговые структуры для сотрудничества по продвижению литературы издательства

Издательство «Просвещение»
127521, Москва,
3-й проезд Марьиной рощи, 41
Тел.: (495) 789-3040
Факс: (495) 789-3041
e-mail: prosv@prosv.ru
www.prosv.ru

Интернет-магазин Umlit.ru
Доставка почтой по России, курьером по Москве
129075, Москва, ул. Калибровская, 31А
ООО «Абрис Д» (ПР-5)
Тел.: (495) 981-1039
e-mail: zakaz@umlit.ru
www.umlit.ru



МГУ - ШКОЛЕ

Учебно-методический комплект
авторов В. Ф. Бутузова,
С. Б. Кадомцева, В. В. Прасолова
по геометрии для 7 классов
содержит:

- Учебник под редакцией
В. А. Садовниченко
- **Дидактические материалы**
- Поурочные разработки



ISBN 978-5-09-019455-6



9 785090 194556



ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

548924



2 050005 489247

4-1-1-1

1 шт