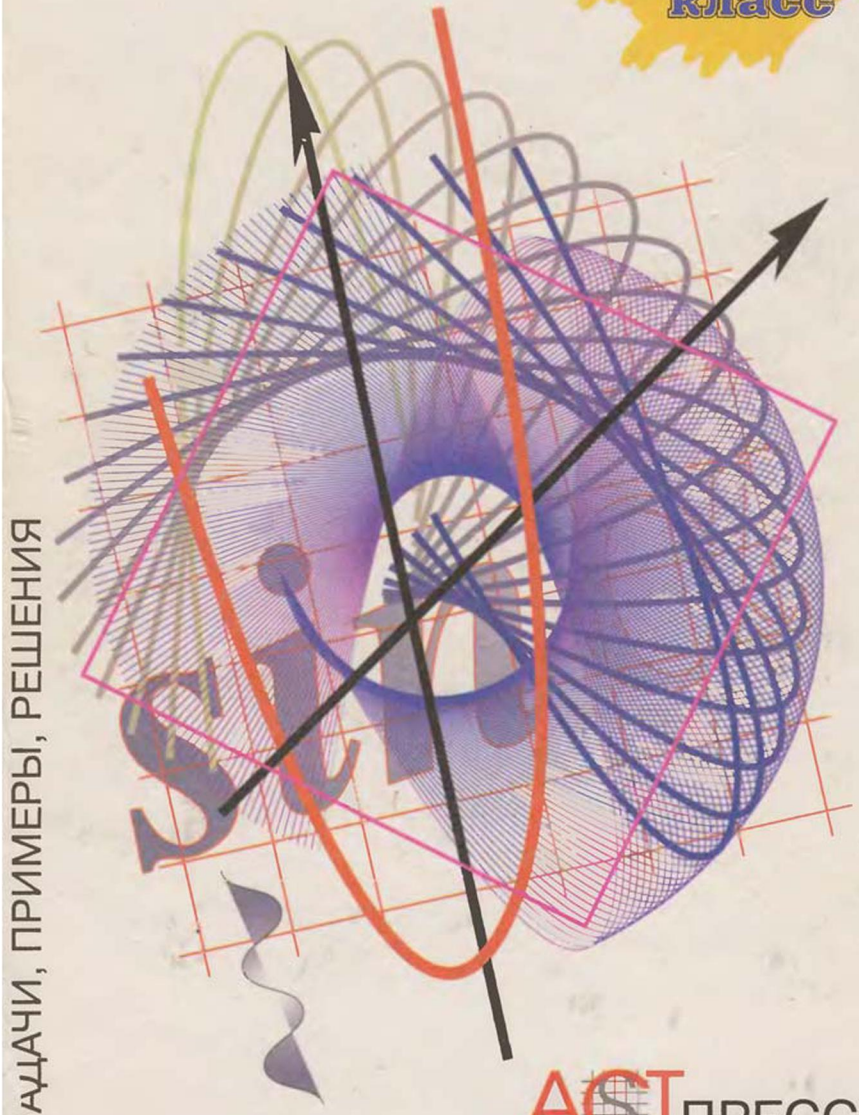
ТРИГОНОМЕТРИЯ

Аркадий Мерзляк, Виталий Полонский, Ефим Рабинович, Михаил Якир

ЗАДАЧНИК
К ШКОЛЬНОМУ КУРСУ

8•11 класс



ЗАДАЧИ, ПРИМЕРЫ, РЕШЕНИЯ

АСТ ПРЕСС

Аркадий Мерзляк, Виталий Полонский, Ефим Рабинович,
Михаил Якир

ТРИГОНОМЕТРИЯ

ЗАДАЧНИК К ШКОЛЬНОМУ КУРСУ

8•11 класс

«Магистр-S» Москва 1998 «АСТ-ПРЕСС»

УДК 51
ББК 22
М 52

Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С.
М 52 Тригонометрия: Задачник к школьному курсу. — М.: АСТ-ПРЕСС: Магистр-S, 1998. — 656 с.

ISBN 5-7805-0212-9
ISBN 966-557-035-8

Задачник, составленный в форме конспекта опытного учителя, содержит более 4000 задач с большим числом примеров, их решениями и разбором. На разнообразном материале авторам удалось систематизировать по методам решений все типы задач по тригонометрии, взяв за основу принцип от простого к сложному.

Адресован учащимся 8—11-х классов, абитуриентам, преподавателям математики.

М $\frac{1602050000-005}{8Ш9(03)-98}$

УДК 51
ББК 22

ISBN 5-7805-0212-9
ISBN 966-557-011-0

© А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, Е.М. Рабинович, М.С. Якир, 1997
© «АСТ-ПРЕСС», 1998
© «Магистр-S», 1998

От авторов

Это не сборник задач, хотя в книге их более 4000. Несмотря на большое число решенных примеров, это и не решебник, наличие которого у ученика так раздражает учителя. Скорее всего, это добротный конспект, написанный учителем не только для «служебного пользования», но и дидактический материал, который удобно положить на парту каждому ученику.

Известно, что задача может служить не только целью, но и средством обучения. Учиться решать задачи с помощью ключевых (опорных, базисных) — идея древняя. Именно по схеме «ключевая задача + упражнения» построено предлагаемое пособие. Этой книгой авторы продолжают серию «Учимся решать задачи по...».

Кратко остановимся на содержании каждой главы. Материал главы I адресован прежде всего новичкам, потому что ее значительную часть составляет «азбука» тригонометрии. Правда, и опытный читатель сможет найти свои задачи в пунктах «тождества с дополнительными условиями», «доказательства неравенств», «суммирования» и т.д.

Глава II посвящена периодическим функциям — одному из наиболее трудных и тонких понятий школьной математики. В главе III авторы помимо традиционных задач на функции рассматривают общие вопросы, связанные с понятием обратимости.

Обширнейший материал главы IV преследует цель сформировать основы графической культуры, способствует активизации умений и навыков в построении графических образов, связанных с тригонометрическими функциями. Тригонометрическим уравнениям, неравенствам и их системам посвящены главы V и VI.

Не секрет, что задачи с параметрами вызывают у учащихся, по меньшей мере, робость. Мы надеемся, что преодолеть ее поможет глава VII. Одному оригинальному, возможно экзотическому, приему посвящена глава VIII.

Авторы выражают искреннюю благодарность всем своим ученикам, участвовавшим в апробации рукописи этой книги.

Глава I

Преобразования тригонометрических выражений

§1. Азбука тригонометрии

Советуем читателю эту таблицу знать наизусть.

α	$0°=0$	$30°=\frac{\pi}{6}$	$45°=\frac{\pi}{4}$	$60°=\frac{\pi}{3}$	$90°=\frac{\pi}{2}$	$180°=\pi$	$270°=\frac{3\pi}{2}$	$360°=2\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Пример I.1. Найти значение выражения

$$\cos\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}+4\cos\pi-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+6\sin\pi.$$

Решение. $\cos\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}+4\cos\pi-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+$

$$+6\sin\pi=\frac{1}{2}+2\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot(\sqrt{3})^2+4\cdot(-1)-1+6\cdot 0=$$

$$=\frac{1}{2}+2+1-4-1=-1{,}5.$$

Ответ: $-1{,}5$.

Упражнения

I.2. Найти значение выражения:

а) $2\cos 0^\circ + 3\sin 90^\circ + 4\,\mathrm{tg}\,180^\circ$;

б) $5\sin 270^\circ - 2\cos 0^\circ + 3\,\mathrm{ctg}\,90^\circ$;

в) $\sin\pi + \cos\pi + \mathrm{tg}\,\pi$;

г) $\cos 90^\circ - \cos 180^\circ + \sin 270^\circ + \mathrm{tg}\,360^\circ$;

д) $2\,\mathrm{tg}\,0^\circ + 8\cos 270^\circ - 6\sin 90^\circ$;

е) $\mathrm{tg}\,45^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \mathrm{ctg}\,30^\circ$;

ж) $2\sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{4} + \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3} - \mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{6}$;

з) $\dfrac{0{,}3 - \sin^2\frac{\pi}{6} - \cos^2\frac{\pi}{3} + 4\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{6} + 1}$;

и) $\dfrac{1{,}5 - \sin^2\frac{\pi}{6} + 3\cos^2\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{3}}$;

к) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi + \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{6} - \sin\frac{3\pi}{2}}$;

л) $\sqrt{(2\sin 45^\circ - 1)^2} - \sqrt{(1 - 2\cos 45^\circ)^2}$;

м) $\sqrt{(\mathrm{ctg}\,30^\circ + 2)^2} + \sqrt{(\mathrm{tg}\,60^\circ - 2)^2}$;

н) $2\sin 2\alpha + 3\cos(180^\circ - 3\alpha) + \mathrm{ctg}(75^\circ - \alpha)$ при $\alpha = 45^\circ$;

о) $2\sin(3\alpha + 15^\circ) + 3\,\mathrm{ctg}(90^\circ - 2\alpha) - \mathrm{tg}(4\alpha - 15^\circ) + 2\cos 2\alpha$ при $\alpha = 15^\circ$.

I.3. Найти значение выражения

$$\sin(\alpha + 45^\circ) + 2\sin(\alpha - 45^\circ) + 4\cos 2\alpha + 2\cos(\alpha + 135^\circ)$$

при *а)* $\alpha = 45^\circ$; *б)* $\alpha = 135^\circ$.

I.4. Найти значение выражения

$$\sin\alpha - \cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \sin 2\alpha$$

при *а)* $\alpha = 30^\circ$; *б)* $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

I.5. Найти значение выражения $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ при *а)* $\alpha = 45°$, $\beta = 15°$; *б)* $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$.

I.6. Найти значение выражения:

а) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 - (\sin\alpha - \sin\beta)^2$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$;

б) $2\cos(\alpha - 3\beta) + 3\operatorname{ctg}(\beta + 10°) - \operatorname{tg}(\alpha - 75°) + \sin(\beta - 5°)$ при $\alpha = 135°$, $\beta = 35°$;

в) $\operatorname{tg}(2\alpha - \beta) + \cos\alpha\operatorname{ctg}(6\alpha + 6\beta)$ при $\alpha = 20°$, $\beta = -5°$.

I.7. Верно ли неравенство:

а) $\sin 30° + \cos 45° > 1$; *б)* $\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} > 1$?

* * *

Свойство 1. Областью значений синуса и косинуса является промежуток $[-1; 1]$, областью значений тангенса и котангенса — множество всех действительных чисел.

Пример I.8. Возможно ли равенство:

а) $\cos\alpha = \frac{7}{8}$; *в)* $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{7}$;

б) $\cos\alpha = \frac{8}{7}$; *г)* $\cos\alpha = a^2 - a - 1$?

Решение. *а)* Да, так как $-1 < \frac{7}{8} < 1$.

б) Нет, так как $\frac{8}{7} > 1$.

в) Да, так как тангенс может быть равен любому действительному числу.

г) Да, если $-1 \leqslant a^2 - a - 1 \leqslant 1$. Найдем, при каких значениях a выполняется это неравенство:

$$\begin{cases} a^2 - a - 1 \leqslant 1, \\ a^2 - a - 1 \geqslant -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 - a - 2 \leqslant 0, \\ a^2 - a \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+1)(a-2) \leqslant 0, \\ a(a-1) \geqslant 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \leqslant a \leqslant 2, \\ \left[\begin{array}{l} a \leqslant 0, \\ a \geqslant 1, \end{array}\right. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} -1 \leqslant a \leqslant 0, \\ 1 \leqslant a \leqslant 2. \end{array}\right.$$

Ответ: да, если $-1 \leqslant a \leqslant 0$ или $1 \leqslant a \leqslant 2$.

Упражнения

I.9. Возможно ли равенство:

а) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$;

б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$;

в) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$;

г) $\sin\alpha = -\sqrt[4]{1{,}7}$;

д) $\cos\alpha = -\sqrt[5]{5}$;

е) $\cos\alpha = \sqrt{3}-2$;

ж) $\sin\alpha = \sqrt{2}-1$;

з) $\cos\alpha = \sqrt[3]{28}-\sqrt{10}$;

и) $\cos\alpha = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}$;

к) $\cos\alpha = \frac{1}{\sin 18^\circ}$;

л) $\sin\alpha = \frac{m-n}{m+n}$, где $m>0$ и $n>0$;

м) $\cos\alpha = \frac{a}{a-1}$, где $a>1$;

н) $\sin\alpha = \frac{\pi}{4}$;

о) $\cos\alpha = \frac{\pi}{3}$;

п) $\sin\alpha = a + \frac{1}{a}$, где $a \neq 0$?

I.10. При каких значениях a (a и b) возможно равенство:

а) $\cos x = a^2 + 1$;

б) $\sin x = a^2 - 1$;

в) $\cos x = \frac{a}{a-1}$;

г) $\cos x = 2a - a^2 - 2$;

д) $\operatorname{tg} x = \frac{a+1}{a-1}$;

е) $\sin x = \frac{a+b}{a-b}$, где $a \neq b$?

Пример I.11. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения

а) $1 - 4\cos\alpha$; *б)* $\frac{\cos\alpha\,(2-\sin\alpha)}{\cos\alpha}$.

Решение. *а)* Так как $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, то

$$-4 \leqslant -4\cos\alpha \leqslant 4,\quad -3 \leqslant 1 - 4\cos\alpha \leqslant 5.$$

Следовательно, наименьшее значение равно -3 и достигается при $\cos\alpha = 1$, наибольшее значение равно 5 и достигается при $\cos\alpha = -1$.

Ответ: 5; -3.

б) $\dfrac{\cos\alpha\,(2-\sin\alpha)}{\cos\alpha} = 2-\sin\alpha$. Наименьшее значение выражения $2-\sin\alpha$, равное 1, достигается при $\sin\alpha = 1$, но при этом $\cos\alpha = 0$ и выражение $\dfrac{\cos\alpha\,(2-\sin\alpha)}{\cos\alpha}$ не определено. Следовательно, наименьшего значения не существует.

Аналогично наибольшее значение выражение $2-\sin\alpha$ достигает при $\sin\alpha = -1$, но при этом также $\cos\alpha = 0$. Следовательно, и наибольшего значения нет.

Ответ: не существуют.

Пример I.12. Найти область значений выражения

а) $\dfrac{1}{2-\cos 2x}$; *б)* $\dfrac{1}{3\sin x - 2}$.

Решение. *а)* Имеем $-1 \leqslant \cos 2x \leqslant 1$, $-1 \leqslant -\cos 2x \leqslant 1$,

$$1 \leqslant 2-\cos 2x \leqslant 3, \qquad 1 \geqslant \frac{1}{2-\cos 2x} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left[\dfrac{1}{3};\ 1\right]$.

б) Имеем $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, $-3 \leqslant 3\sin x \leqslant 3$,

$$-5 \leqslant 3\sin x - 2 \leqslant 1.$$

Далее воспользуемся тем фактом, что если числа a и b оба положительные или оба отрицательные, то из неравенства $a < b$ следует, что $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

При $0 < 3\sin x - 2 \leqslant 1$ получаем, что $\dfrac{1}{3\sin x - 2} \geqslant 1$, причем равенство достигается при $\sin x = 1$.

При $-5 \leqslant 3\sin x - 2 < 0$ получаем, что

$$\frac{1}{3\sin x - 2} \leqslant -\frac{1}{5},$$

причем равенство достигается при $\sin x = -1$. Следовательно, область значений данного выражения — множество $\left(-\infty;\ -\frac{1}{5}\right] \cup [1;\ \infty)$.

Ответ: $\left(-\infty;\ -\frac{1}{5}\right] \cup [1;\ \infty)$.

Упражнения

I.13. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $5 + \sin\alpha$;

б) $5 - \sin\alpha$;

в) $2\sin\alpha + 3$;

г) $\sin^2\alpha$;

д) $\cos^2\alpha - 2$;

е) $0{,}25 + 2\cos^2\alpha$;

ж) $10 - 9\sin^2 3\alpha$;

з) $\dfrac{1}{1 + \sin\alpha}$;

и) $\dfrac{1}{\cos\alpha - 2}$;

к) $\dfrac{\cos^3\alpha}{\cos\alpha}$;

л) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

м) $\dfrac{\sin\alpha\,(1 + \cos\alpha)}{\sin\alpha}$;

н) $\sin\alpha + \cos\alpha - \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}$;

о) $2\cos\alpha + 3\sin\alpha - \dfrac{2\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$.

I.14. Найти область значений выражения:

а) $1 + \sin^2 x$;

б) $|\cos x|$;

в) $1 - 2\,|\sin 3x|$;

г) $\dfrac{1}{1 - \cos x}$;

д) $\mathrm{tg}^4 x + 1$;

е) $5 - 3\sin x$;

ж) $1 - 2\cos^2 x$;

з) $\dfrac{1}{1 - 2\cos x}$;

и) $\dfrac{2}{4\sin x - 3}$.

* * *

Свойство 2. $\sin\alpha > 0$, если α является углом I или II четверти; $\sin\alpha < 0$, если α является углом III или IV четверти; $\cos\alpha > 0$, если α является углом I или IV четверти; и $\cos\alpha < 0$, если α является углом II или III четверти; $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, если α является углом I или III четверти; $\operatorname{tg}\alpha < 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha < 0$, если α является углом II или IV четверти.

Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса в каждой из четвертей показаны на рис. 1.

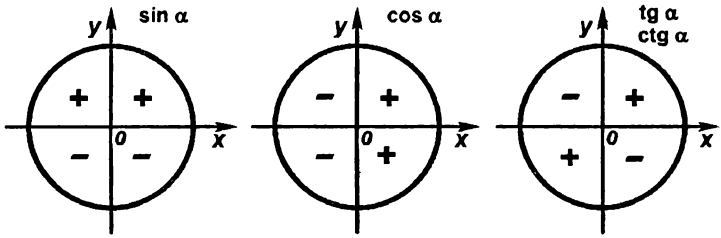


Рис. 1

Пример I.15. Какой знак имеет

а) $\sin 280°$; *б)* $\operatorname{tg}(-140°)$; *в)* $\operatorname{tg} 2$?

Решение. *а)* $\sin 280° < 0$, так как угол 280° является углом IV четверти;

б) $\operatorname{tg}(-140°) > 0$, так как угол −140° является углом III четверти;

в) $\operatorname{tg} 2 < 0$, так как угол 2 радиана является углом II четверти.

Упражнения

I.16. Положительным или отрицательным числом является следующее значение тригонометрической функции:

а) $\sin 110°$;

б) $\cos 200°$;

в) $\operatorname{tg} 160°$;

г) $\operatorname{ctg} 220°$;

д) $\sin(-280°)$;

е) $\cos 340°$;

ж) $\operatorname{tg}(-75°)$;

з) $\operatorname{ctg}(-230°)$;

и) $\sin(-130°)$;

к) $\cos 2$;

л) $\sin(-3)$;

м) $\operatorname{ctg} 1{,}7$;

н) $\operatorname{tg} 1$;

о) $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}$;

п) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$;

р) $\cos\frac{2\pi}{3}$;

с) $\cos 600°$;

т) $\operatorname{ctg} 500°$;

у) $\operatorname{tg} 670°$;

ф) $\operatorname{tg} 10?$

* * *

Пример I.17. Определить знак выражения

$$\cos 123° \operatorname{tg} 231° \sin 312°.$$

Решение. 123° — угол второй четверти, 231° — угол третьей четверти, 312° — угол четвертой четверти. Тогда $\cos 123° < 0$, $\operatorname{tg} 231° > 0$, $\sin 312° < 0$ и их произведение больше 0.

Ответ: $\cos 123° \operatorname{tg} 231° \sin 312° > 0$.

Упражнения

I.18. Определить знак выражения:

а) $\sin 100° \sin 132°$;

б) $\cos 210° \sin 115°$;

в) $\cos 285° \cos(-316°)$;

г) $\operatorname{tg} 112° \sin 165°$;

д) $\cos 318° \operatorname{tg}(-214°)$;

е) $\operatorname{ctg} 300° \sin 220°$;

ж) $\sin 1 \cos 2$;

з) $\sin 5 \operatorname{tg} 5$;

и) $\sin 3 \cos 4 \operatorname{tg} 5$;

к) $\sin(-118°) \cos 118° \operatorname{tg} 118°$;

л) $\sin 98° \cos 100° \operatorname{tg} 250° \operatorname{ctg}(-230°) \sin(-160°)$;

м) $\sin\frac{1}{3} \cos\frac{7}{8} \operatorname{tg} 4 \operatorname{ctg} 5{,}7$.

* * *

Пример I.19. Сравнить $\sin 200°$ и $\sin(-200°)$.

Решение. Так как угол 200° — угол III четверти, угол −200° — угол II четверти, то $\sin 200° < 0$, $\sin(-200°) > 0$. Следовательно, $\sin 200° < \sin(-200°)$.

Ответ: $\sin 200° < \sin(-200°)$.

Упражнения

I.20. Сравнить:

а) $\operatorname{tg} 130°$ и $\operatorname{tg}(-130°)$;

б) $\operatorname{tg} 110°$ и $\operatorname{tg} 193°$;

в) $\sin 200°$ и $\sin(-250°)$;

г) $\cos 80°$ и $\sin 330°$;

д) $\operatorname{ctg} 100°$ и $\operatorname{ctg} 80°$;

е) $\cos 250°$ и $\cos 290°$;

ж) $\sin 160°$ и $\sin 240°$;

з) $\sin 100°$ и $\sin(-100°)$;

и) $\sin 60°$ и $\sin\frac{8\pi}{7}$;

к) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$ и $\cos 280°$;

л) $\operatorname{ctg} 6$ и $\operatorname{ctg} 6°$;

м) $\cos 3{,}2$ и $\sin 5$.

I.21. Углом какой четверти является угол α, если известно, что:

а) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$;

б) $\cos\alpha > 0$ и $\operatorname{tg}\alpha > 0$;

в) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$ и $\operatorname{tg}\alpha > 0$;

г) $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$ и $\operatorname{tg}\alpha > 0$;

д) $|\sin\alpha| = \sin\alpha$;

е) $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$;

ж) $|\operatorname{tg}\alpha| - \operatorname{tg}\alpha = 0$;

з) $\operatorname{ctg}\alpha + |\operatorname{ctg}\alpha| = 0$?

* * *

Определение 1. *Функция $y = f(x)$ называется* ***четной,*** *если область ее определения симметрична относительно нуля и для любого значения аргумента x верно равенство $f(-x) = f(x)$.*

Определение 2. *Функция $y = f(x)$ называется* ***нечетной,*** *если область ее определения симметрична относительно нуля и для любого значения аргумента x верно равенство $f(-x) = -f(x)$.*

Свойство 3. Синус, тангенс и котангенс являются нечетными функциями, а косинус является четной функцией:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Пример I.22. Является ли функция четной или нечетной:

а) $f(x) = \dfrac{1+\cos x}{x^2}$; *в)* $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$;

б) $f(x) = 1 + \sin x$; *г)* $f(x) = \dfrac{\cos x}{x-1}$?

Решение. *а)* Область определения данной функции

$$D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$$

симметрична относительно нуля.

$$f(-x) = \frac{1+\cos(-x)}{(-x)^2} = \frac{1+\cos x}{x^2} = f(x).$$

Следовательно, данная функция является четной.

Ответ: функция четная.

б) Область определения данной функции $D(f) = (-\infty;\ \infty)$ симметрична относительно нуля.

$$f(-x) = 1 + \sin(-x) = 1 - \sin x,$$

$$f(-x) \neq f(x),\ f(-x) \neq -f(x).$$

Следовательно, данная функция является ни четной, ни нечетной.

Ответ: функция ни четная, ни нечетная.

в) Область определения данной функции — все действительные числа, кроме чисел вида $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, — симметрична относительно нуля.

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos^2(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} = -f(x).$$

Следовательно, данная функция является нечетной.

Ответ: функция нечетная.

г) Область определения данной функции

$$D(f) = (-\infty;\ 1) \cup (1;\ \infty)$$

несимметрична относительно нуля. Следовательно, данная функция является ни четной, ни нечетной.

Ответ: функция ни четная, ни нечетная.

I.23. Является ли функция четной или нечетной:

а) $f(x) = \sin^2 x$;

б) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$;

в) $f(x) = \operatorname{tg}^3 x$;

г) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;

д) $f(x) = x + \sin x$;

е) $f(x) = \operatorname{tg} x + \cos x$;

ж) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$;

з) $f(x) = \dfrac{x + \sin x}{\operatorname{tg}^3 x}$;

и) $f(x) = \dfrac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\sin x - \operatorname{tg} x}$;

к) $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$;

л) $f(x) = -\dfrac{1}{\sin^3 x}$;

м) $f(x) = \dfrac{1 + \sin^2 x}{\operatorname{tg} 3x}$;

н) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \sin^2 x}$;

о) $f(x) = x^3 + \cos x$;

п) $f(x) = \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$;

р) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 - 1}$;

с) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x^3 - 1}$;

т) $f(x) = x\sqrt{1 - \sin^4 x}$;

у) $f(x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

ф) $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$;

х) $f(x) = \operatorname{tg}(x + 2)$;

ц) $f(x) = \sin x - \dfrac{\pi}{4}$;

ч) $f(x) = \cos x + \dfrac{\pi}{3}$;

ш) $f(x) = \operatorname{tg} x + 1$;

щ) $f(x) = \dfrac{(x - 1)\cos x}{x - 1}$;

э) $f(x) = \dfrac{x^3 \sin x}{x}$;

ю) $f(x) = \dfrac{\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg} x}{x - \dfrac{\pi}{4}}$;

я) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg} x \cdot (x^2 - 1)}{x^2 - 1}$?

Пример I.24. Вычислить $\sin(-45°) + \cos(-45°) + 2\sin(-30°) - 4\cos(-60°) + 5\operatorname{ctg}(-45°)$.

Решение. $\sin(-45°) + \cos(-45°) + 2\sin(-30°) - 4\cos(-60°) + 5\operatorname{ctg}(-45°) =$

$$= -\sin 45° + \cos 45° - 2\sin 30° - 4\cos 60° - 5\operatorname{ctg} 45° =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} - 5\cdot 1 = -8.$$

Ответ: −8.

I.25. Найти значение выражения:

а) $\sin(-30°) - 2\operatorname{tg}(-45°) + \cos(-45°)$;

б) $5\operatorname{tg} 0 + 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 3\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

в) $\dfrac{\sin^3(-30°) - 2\operatorname{ctg}(-30°) - 1}{2 - \operatorname{tg} 45° + 4\cos^2(-60°)}$;

г) $\dfrac{1{,}5 + \sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$;

д) $2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 5\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

е) $6\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}^4\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin(-\pi) + 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos(-\pi) + 5\sin^3\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

* * *

Свойство 4. При изменении угла на целое число оборотов значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса не изменяются.

Пример I.26. Найти значение выражения:

а) $\sin 660°$; *б)* $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$.

Решение. *а)* $\sin 660° = \sin(720° - 60°) =$

$= \sin(-60° + 360° \cdot 2) = \sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Ответ: $-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

б) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = -\sin\frac{13\pi}{3} = -\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$

$= -\sin\left(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Ответ: $-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

I.27. Найти значение выражения:

а) $\sin 750°$;

б) $\cos 420°$;

в) $\operatorname{tg} 810°$;

г) $\sin 540°$;

д) $\cos 1260°$;

е) $\operatorname{ctg}(-450°)$;

ж) $\cos(-390°)$;

з) $\sin(-405°)$;

и) $\operatorname{ctg}(-405°)$;

к) $\cos(-780°)$;

л) $\operatorname{tg}(-1110°)$;

м) $\operatorname{tg}(-900°)$;

н) $\sin\frac{11\pi}{6}$;

о) $\operatorname{tg}\frac{23\pi}{4}$;

п) $\operatorname{tg}\frac{25\pi}{4}$;

р) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}$;

с) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$;

т) $\operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$;

у) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$;

ф) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{37\pi}{6}\right)$.

* * *

Свойство 5. Если α и β — углы I четверти и $\alpha > \beta$, то $\sin\alpha > \sin\beta$, $\cos\alpha < \cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha < \operatorname{ctg}\beta$. Если α и β — углы II четверти и $\alpha > \beta$, то $\sin\alpha < \sin\beta$, $\cos\alpha < \cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha < \operatorname{ctg}\beta$. Если α и β — углы III четверти и $\alpha > \beta$, то $\sin\alpha < \sin\beta$, $\cos\alpha > \cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha < \operatorname{ctg}\beta$. Если

α и β — углы IV четверти и $\alpha > \beta$, то $\sin\alpha > \sin\beta$, $\cos\alpha > \cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha < \operatorname{ctg}\beta$.

Пример I.28. Сравнить:

а) $\sin 0{,}7\pi$ и $\sin 0{,}71\pi$; *б)* $\cos 324°$ и $\cos 340°$.

Решение. *а)* Так как $0{,}7\pi$ и $0{,}71\pi$ — углы II четверти и $0{,}7\pi < 0{,}71\pi$, то $\sin 0{,}7\pi > \sin 0{,}71\pi$.

б) Так как 324° и 340° — углы IV четверти и 324° < 340°, то $\cos 324° < \cos 340°$.

Пример I.29. Определить знак разности $\cos 35° - \cos 40°$.

Решение. Так как 35° и 40° — углы I четверти и 35° < 40°, то $\cos 35° > \cos 40°$ и разность $\cos 35° - \cos 40°$ имеет знак плюс.

Пример I.30. Сравнить $\sin 40°$ и $\cos 40°$.

Решение. Так как $\sin 40° < \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\cos 40° > \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ то } \cos 40° > \sin 40°.$$

Пример I.31. Возможно ли равенство $\sin\alpha = 2\sin 31°$?

Решение. Так как $\sin 31° > \sin 30° = \frac{1}{2}$, то $2\sin 31° > 1$. Следовательно, данное равенство невозможно.

Упражнения

I.32. Сравнить:

а) $\cos 1{,}6\pi$ и $\cos 1{,}68\pi$;

б) $\operatorname{tg} 7{,}2\pi$ и $\operatorname{tg} 7{,}25\pi$;

в) $\sin 20°$ и $\sin 21°$;

г) $\cos 20°$ и $\cos 21°$;

д) $\sin 200°$ и $\sin 250°$;

е) $\cos 200°$ и $\cos 250°$;

ж) $\operatorname{ctg} 200°$ и $\operatorname{ctg} 250°$;

з) $\cos 5{,}1$ и $\cos 5$;

и) $\sin 2$ и $\sin 2{,}1$;

к) $\operatorname{ctg} 6$ и $\operatorname{ctg} 6{,}2$.

I.33. Определить знак разности:

а) $\sin 123° - \sin 132°$;

б) $\operatorname{tg} 220° - \operatorname{tg} 217°$;

в) $\operatorname{ctg} 304° - \operatorname{ctg} 316°$;

г) $\cos 1{,}6 - \cos 1{,}5$;

д) $\sin 190° - \sin 191°$;

е) $\cos \frac{5\pi}{8} - \cos \frac{7\pi}{9}$;

ж) $\operatorname{tg} 2\frac{3}{16}\pi - \operatorname{tg} 2\frac{7}{16}\pi$;

з) $\cos 130° - \cos 110°$.

I.34. Сравнить:

а) $\sin 58°$ и $\cos 58°$;

б) $\sin 18°$ и $\cos 18°$;

в) $\sin 81°$ и $\operatorname{tg} 81°$;

г) $\sin 20°$ и $\cos 20°$;

д) $\sin 40°$ и $\operatorname{ctg} 20°$;

е) $\cos 80°$ и $\sin 70°$.

I.35. Возможно ли равенство:

а) $\cos\alpha = 2\sin 20°$;

б) $\sin\alpha = \frac{2}{3}\operatorname{tg} 80°$;

в) $\cos\alpha = \operatorname{ctg} 10°$;

г) $\sin\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{9}$?

§2. Основные формулы тригонометрии

1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \quad \left(\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right);$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Пример I.36. Могут ли одновременно выполняться равенства:

а) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ и $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha = 4$ и $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}25$;

в) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2{,}5}$?

Решение. *а*) Проверим выполнение тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

Следовательно, данные равенства одновременно выполняться могут.

Ответ: да.

б) Проверим выполнение тождества $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$:

$$4 \cdot 0{,}25 = 1.$$

Ответ: да.

в) Из тождества $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ имеем $\sin\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$. Тогда

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} : \sqrt{2{,}5} = \frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Проверим выполнение тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9} \neq 1.$$

Ответ: нет.

Упражнения

I.37. Могут ли одновременно выполняться равенства:

а) $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$ и $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$;

б) $\sin\alpha = 0{,}4$ и $\cos\alpha = 0{,}87$;

в) $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$;

г) $\sin\alpha = \dfrac{6\sqrt{2}}{11}$, $\cos\alpha = -\dfrac{7}{11}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{6\sqrt{2}}{7}$;

д) $\cos\alpha = \dfrac{20}{101}$, $\operatorname{tg}\alpha = 4{,}95$;

е) $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

ж) $\sin\alpha = \dfrac{a}{a+2}$, $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{1+a}}{a+2}$, где $a \neq -2$;

з) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$ и $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}5$;

и) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} - 1$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2} + 1$;

к) $\sin\alpha = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}$ и $\cos\alpha = \dfrac{2a}{1+a^2}$;

л) $\sin\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ и $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{16-\pi^2}}{4}$;

м) $\cos\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ и $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{36-\pi^2}}{6}$?

I.38. Могут ли $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ одновременно равняться нулю?

I.39. Могут ли $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ по абсолютной величине быть: *а*) оба больше 1; *б*) оба меньше 1?

* * *

Пример I.40. Упростить выражение

$$\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{tg}^2 x.$$

Решение. $\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Ответ: $\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Пример I.41. Упростить выражение $\dfrac{\cos^2 2\alpha - 1}{1 - \sin^2 2\alpha}$.

Решение. $\dfrac{\cos^2 2\alpha - 1}{1 - \sin^2 2\alpha} = \dfrac{-\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = -\operatorname{tg}^2 2\alpha$.

Ответ: $-\operatorname{tg}^2 2\alpha$.

Пример I.42. Упростить выражение $\sin\alpha + \cos\alpha \operatorname{tg}\alpha$.

Решение. $\sin\alpha + \cos\alpha \operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha + \cos\alpha \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$

$$= \sin\alpha + \sin\alpha = 2\sin\alpha.$$

Ответ: $2\sin\alpha$.

Пример I.43. Упростить выражение

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi.$$

Решение. $\frac{1}{\cos^2\varphi} - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi =$

$$= 1 + \operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = \cos^2\varphi.$$

Ответ: $\cos^2\varphi$.

Пример I.44. Упростить выражение $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Решение. $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Пример I.45. Упростить выражение

$$\frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x}.$$

Решение. $\frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x} =$

$$= \sin^2 x\cdot\operatorname{ctg}^2 x + \cos^2 x\cdot\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} x =$$

$$= \sin^2 x\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \cos^2 x\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \operatorname{tg}^2 x =$$

$$= \cos^2 x + \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ответ: $\frac{1}{\cos^2 x}$.

Пример I.46. Упростить выражение

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Решение. $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$

Ответ: 1.

Упражнения

Упростить выражения:

I.47. $1 - \sin^2\alpha$.

I.48. $1 - \cos^2\alpha$.

I.49. $\sin^2\beta - 1$.

I.50. $\cos^2 2\alpha - 1$.

I.51. $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + 1$.

I.52. $1 - \sin^2 3\alpha - \cos^2 3\alpha$.

I.53. $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \mathrm{ctg}^2 5\alpha$.

I.54. $\dfrac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha}$.

I.55. $\dfrac{\sin\alpha\cos 2\alpha}{\cos\alpha\sin 2\alpha}$.

I.56. $\dfrac{\sin 3\alpha\sin\alpha}{\cos 3\alpha\cos\alpha}$.

I.57. $\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

I.58. $\sin\dfrac{\alpha}{3}\cdot\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{3}$.

I.59. $\sin\beta\,\mathrm{ctg}\,\beta + \cos\beta$.

I.60. $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1$.

I.61. $1 - \dfrac{1}{\sin^2\gamma}$.

I.62. $1 - \sin^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

I.63. $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$.

I.64. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}$.

I.65. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)}$.

I.66. $\dfrac{\mathrm{ctg}\,x}{\mathrm{tg}\,x} + \mathrm{ctg}\,y\cdot\mathrm{tg}\,y$.

I.67. $\dfrac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{ctg}\,\gamma} + \mathrm{tg}\,\varphi\cdot\mathrm{ctg}\,\varphi$.

I.68. $\cos^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha - \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

I.69. $\dfrac{\sin^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha - 1} + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

I.70. $\dfrac{\sin^2\beta}{1 - \sin^2\beta}\cdot\mathrm{ctg}^2\beta$.

I.71. $(\mathrm{tg}\,\alpha\cos\alpha)^2 + (\mathrm{ctg}\,\alpha\sin\alpha)^2$.

I.72. $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

I.73. $\dfrac{\sin^2\alpha}{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha(\cos^2\alpha - 1)}$.

I.74. $\dfrac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1}{\mathrm{ctg}^2\alpha}$.

I.75. $\dfrac{1 - \cos^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

I.76. $\dfrac{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha}$.

I.77. $\cos^2\alpha + \dfrac{1}{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha} - 1$.

I.78. $\dfrac{\sin^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha}$.

* * *

Пример I.79. Упростить выражение

$$\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)\left(\cos\frac{x}{2}+1\right).$$

Решение. Применяя формулу произведения разности двух выражений и их суммы, имеем $\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)\left(\cos\frac{x}{2}+1\right)=$

$$=\cos^2\frac{x}{2}-1=-\sin^2\frac{x}{2}.$$

Ответ: $-\sin^2\frac{x}{2}$.

Пример I.80. Упростить выражение

$$(1-\cos^2\beta)\operatorname{tg}^2\beta+1-\operatorname{tg}^2\beta.$$

Решение. $(1-\cos^2\beta)\operatorname{tg}^2\beta+1-\operatorname{tg}^2\beta=$

$$=\operatorname{tg}^2\beta-\cos^2\beta\operatorname{tg}^2\beta+1-\operatorname{tg}^2\beta=$$

$$=\operatorname{tg}^2\beta-\cos^2\beta\cdot\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}+1-\operatorname{tg}^2\beta=-\sin^2\beta+1=\cos^2\beta.$$

Ответ: $\cos^2\beta$.

Пример I.81. Доказать тождество

$$\left(\sin\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2+\left(\cos\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2-(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha)=7.$$

Решение. Применяя формулу квадрата суммы, имеем:

$$\left(\sin\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2+\left(\cos\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2-(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha)=$$

$$=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}+\cos^2\alpha+$$

$$+2\cos\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=$$

$$=\sin^2\alpha+2+\frac{1}{\sin^2\alpha}+\cos^2\alpha+2+\frac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=$$

$$=4+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}-\operatorname{ctg}^2\alpha\right)+\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha\right)=$$

$$=4+1+1+1=7,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.82. Доказать тождество

$$\cos\alpha\,(1+\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)(1-\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)=2\sin\alpha.$$

Решение. Перепишем левую часть данного равенства в таком виде:

$$\cos\alpha\left(1+\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(1+\operatorname{tg}\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}\right).$$

Умножив выражения, стоящие в скобках, с помощью формулы произведения суммы двух выражений и их разности, получаем:

$$\cos\alpha\left(1+\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(1+\operatorname{tg}\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}\right)=$$

$$=\cos\alpha\left((1+\operatorname{tg}\alpha)^2-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)=$$

$$=\cos\alpha\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)=$$

$$=\cos\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}+2\operatorname{tg}\alpha-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)=2\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=2\sin\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.83. Упростить выражение $\dfrac{\sin^2\pi\alpha}{1+\cos\pi\alpha}$.

Решение. $\dfrac{\sin^2\pi\alpha}{1+\cos\pi\alpha}=\dfrac{1-\cos^2\pi\alpha}{1+\cos\pi\alpha}=$

$$=\frac{(1-\cos\pi\alpha)(1+\cos\pi\alpha)}{1+\cos\pi\alpha}=1-\cos\pi\alpha.$$

Ответ: $1-\cos\pi\alpha$.

Пример I.84. Доказать тождество

$$(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha-(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2=4\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Решение. $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha-(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2=$

$$=(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha)-(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2=$$

$$= (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)(\operatorname{tg}^2\alpha + 1) - (1 - \operatorname{tg}^2\alpha)^2 =$$

$$= (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)^2 - (1 - \operatorname{tg}^2\alpha)^2 =$$

$$= 1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha - 1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^4\alpha = 4\operatorname{tg}^2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Упростить выражения:

I.85. $\left(1 + \sin\frac{x}{2}\right)\left(1 - \sin\frac{x}{2}\right)$.

I.86. $\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right)$.

I.87. $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha\,(\cos^2\alpha + 1)$.

I.88. $(1 + \sin^2\beta)\operatorname{ctg}^2\beta - \frac{1}{\sin^2\beta}$.

I.89. $\dfrac{\cos^2\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2} - 1}$.

I.90. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

I.91. $(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta)^2 - (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{ctg}\beta)^2$.

I.92. $(1 + \operatorname{tg}\alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg}\alpha)^2$.

I.93. $(1 + \operatorname{ctg}\beta)^2 + (1 - \operatorname{ctg}\beta)^2$.

I.94. $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$.

Доказать тождества:

I.95. $(\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\beta) + (\cos\alpha + \cos\beta)(\cos\alpha - \cos\beta) = 0$.

I.96. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) - \left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta}\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\beta}\right) = 0$.

I.97. $(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)(1 - \sin\alpha + \cos\alpha) \times$
$\times (1 + \sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha - 1) = 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

I.98. $\dfrac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1 + \sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha.$

I.99. $\sin^2\alpha\,(1 + \sin^{-1}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(1 - \sin^{-1}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) =$
$= 2\sin\alpha\cos\alpha.$

* * *

Пример I.100. Упростить выражение
$$\sin\alpha\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha).$$

Решение. $\sin\alpha\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) =$
$$= \sin\alpha\cos\alpha \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) =$$
$$= \sin\alpha\cos\alpha \cdot \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример I.101. Упростить выражение
$$\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

Решение. $\dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} =$
$$= \frac{\sin\alpha\,(1 - \cos\alpha) - \sin\alpha\,(1 + \cos\alpha)}{(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)} =$$
$$= \frac{\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = -\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha} =$$
$$= -\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha} = -2\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $-2\operatorname{ctg}\alpha.$

Пример I.102. Доказать тождество $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta.$

Решение. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}\right) : \left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}\right) =$
$$= \frac{\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta} : \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta} =$$

$$= \frac{\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta} \cdot \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Упростить выражения:

I.103. $\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2)$.

I.104. $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

I.105. $\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta} + \dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}$.

I.106. $\operatorname{ctg}x + \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.

I.107. $\operatorname{tg}x + \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

I.108. $\dfrac{1-\sin x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

I.109. $\dfrac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} - \dfrac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

I.110. $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

I.111. $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} + \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

I.112. $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta} + \dfrac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$.

I.113. $\dfrac{1}{1+\sin\alpha} + \operatorname{tg}\alpha$.

I.114. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$.

I.115. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}$.

* * *

Пример I.116. Упростить выражение

$$\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha.$$

Решение. $\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$

$$= \sin^2\alpha\,(\sin^2\alpha - 1) + \cos^2\alpha =$$

$$= -\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = \cos^2\alpha\,(1 - \sin^2\alpha) =$$

$$= \cos^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \cos^4\alpha.$$

Ответ: $\cos^4\alpha$.

Пример I.117. Доказать тождество

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta = 1.$$

Решение. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta =$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\,(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Упростить выражения:

I.118. $\cos^4\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha.$

I.119. $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha.$

I.120. $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha.$

I.121. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha.$

I.122. $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \cos^2\alpha - 1.$

I.123. $\sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta +$
$+ \cos^2\alpha\cos^2\beta.$

Доказать тождества:

I.124. $\sin^4\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^4\alpha = \sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

I.125. $\dfrac{\cos^4\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\beta\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\beta} = -1.$

I.126. $\dfrac{\cos\beta + \sin\beta - \cos^2\beta\sin\beta - \sin^2\beta\cos\beta}{\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\beta + \cos\beta\,\mathrm{ctg}\,\beta} = \sin\beta\cos\beta.$

I.127. $\dfrac{1}{\cos^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha} = \cos^2\alpha.$

I.128. $\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}.$

I.129. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha = \sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

* * *

Пример I.130. Доказать тождество

$$\frac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha - 1}\cdot\frac{1-\operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg}3\alpha} = 1.$$

Решение. $\dfrac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha - 1}\cdot\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg}3\alpha} =$

$$= \frac{\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}3\alpha\operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha\operatorname{ctg}3\alpha - \operatorname{ctg}3\alpha} = \frac{\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{ctg}3\alpha}{\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{ctg}3\alpha} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.131. Доказать тождество $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \sin^2\alpha.$

Решение. Умножив числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части данного равенства, на $\operatorname{ctg}\alpha$, получаем:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)} = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \sin^2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.132. Упростить выражение $\dfrac{\operatorname{tg}^4\alpha - \operatorname{tg}^6\alpha}{\operatorname{ctg}^4\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}.$

Решение. Умножив числитель и знаменатель данной дроби на $\operatorname{tg}^4\alpha$, получаем:

$$\frac{\operatorname{tg}^4\alpha - \operatorname{tg}^6\alpha}{\operatorname{ctg}^4\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^4\alpha(\operatorname{tg}^4\alpha - \operatorname{tg}^6\alpha)}{\operatorname{tg}^4\alpha(\operatorname{ctg}^4\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha)} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4\alpha\cdot\operatorname{tg}^4\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}^4\alpha\operatorname{ctg}^4\alpha - \operatorname{tg}^4\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^8\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^8\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{tg}^8\alpha.$

Упражнения

Доказать тождества:

I.133. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha.$

I.134. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\cos^2\alpha.$

I.135. $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$

I.136. $\dfrac{1-\operatorname{ctg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\gamma}=-\operatorname{ctg}\gamma.$

I.137. $\dfrac{1+\operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha.$

I.138. $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha.$

* * *

Пример I.139. Доказать тождество

$$\frac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}=\frac{3}{2}.$$

Решение. $\dfrac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}=\dfrac{1-(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)}{1-(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)}.$

Применив к выражению $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ формулу суммы кубов, имеем: $\dfrac{1-(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)}{1-(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)}=$

$$=\frac{1-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)}{1-(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)}=$$

$$=\frac{1-(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)}{1-(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)}.$$

Выделяя из выражения $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ квадрат суммы, получаем: $\dfrac{1-(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)}{1-(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)}=$

$$= \frac{1 - ((\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)}{1 - ((\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)} =$$

$$= \frac{1 - (1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)}{1 - (1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)} = \frac{1 - 1 + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{1 - 1 + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{3}{2},$$

что и требовалось доказать.

Пример I.140. Доказать тождество

$$\sin^8\alpha + \cos^8\alpha + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 + 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha.$$

Решение. Применяя дважды для преобразования левой части данного равенства выделение квадрата суммы, получаем:

$$\sin^8\alpha + \cos^8\alpha + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)^2 - 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= ((\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)^2 - 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha +$$

$$+ 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)^2 - 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha +$$

$$+ 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 4\sin^4\alpha\cos^4\alpha -$$

$$- 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 + 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.141. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1.$

I.142. $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) = -1.$

I.143. $\dfrac{1 - \cos^4\beta - \sin^4\beta}{\operatorname{tg}^2\beta} = 2\cos^4\beta.$

I.144. $(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1)^3 + 27\sin^6\alpha\cos^6\alpha = 0.$

I.145. $2(1 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha)^2 - (\sin^8\alpha + \cos^8\alpha) = 1.$

* * *

Пример I.146. Доказать тождество

$$\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Решение. $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha =$

$$= \cos^2\alpha\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right) = \cos^2\alpha\,(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha - 1) = \cos^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.147. Доказать тождество

$$\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Решение. $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} =$

$$= \frac{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1}{\cos\alpha\left(\dfrac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\dfrac{1 - \sin^2\alpha}{\sin\alpha}} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha\cdot\sin\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.148. Доказать тождество

$$\cos^{-6}\alpha - \operatorname{tg}^6\alpha = 3\operatorname{tg}^2\alpha\cos^{-2}\alpha + 1.$$

Решение. $\cos^{-6}\alpha - \operatorname{tg}^6\alpha = \dfrac{1}{\cos^6\alpha} - \dfrac{\sin^6\alpha}{\cos^6\alpha} = \dfrac{1 - \sin^6\alpha}{\cos^6\alpha} =$

$$= \frac{(1 - \sin^2\alpha)(1 + \sin^2\alpha + \sin^4\alpha)}{\cos^6\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha\,(1 - \cos^2\alpha))}{\cos^6\alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha} =$$

$$= \frac{3\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha} =$$

$$= \frac{3\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\,(1 - \sin^2\alpha)}{\cos^4\alpha} = \frac{3\sin^2\alpha + \cos^4\alpha}{\cos^4\alpha} =$$

$$= \frac{3\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha} + \frac{\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha} = \frac{3\,\mathrm{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = 3\,\mathrm{tg}^2\alpha\cos^{-2}\alpha + 1,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.149. Доказать тождество

$$\frac{\sqrt{3} - 2\sin\alpha}{2\cos\alpha - 1} = \frac{1 + 2\cos\alpha}{2\sin\alpha + \sqrt{3}}.$$

Решение. Рассмотрим разность левой и правой частей данного равенства: $\frac{\sqrt{3} - 2\sin\alpha}{2\cos\alpha - 1} - \frac{1 + 2\cos\alpha}{2\sin\alpha + \sqrt{3}} =$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 2\sin\alpha)(2\sin\alpha + \sqrt{3}) - (2\cos\alpha - 1)(1 + 2\cos\alpha)}{(2\cos\alpha - 1)(2\sin\alpha + \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{3 - 4\sin^2\alpha - (4\cos^2\alpha - 1)}{(2\cos\alpha - 1)(2\sin\alpha + \sqrt{3})} = \frac{3 - 4\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha + 1}{(2\cos\alpha - 1)(2\sin\alpha + \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{4 - 4\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{(2\cos\alpha - 1)(2\sin\alpha + \sqrt{3})} = 0.$$

Следовательно, данное тождество вернос.

Упражнения

Доказать тождества:

I.150. $\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha.$

I.151. $\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha} = -\,\mathrm{ctg}^6\alpha.$

I.152. $\operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}.$

I.153. $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = (1 + \sin\alpha)(1 + \operatorname{ctg}\alpha).$

I.154. $\dfrac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$

I.155. $1 + \dfrac{\cos\alpha\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha}.$

I.156. $1 + (\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha.$

I.157. $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = 2\operatorname{ctg}^2\alpha.$

I.158. $\sin^3\alpha\,(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha\,(1 + \operatorname{tg}\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha.$

I.159. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}.$

I.160. $2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\,(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) + (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 =$
$= \operatorname{tg}^2\alpha - 1.$

I.161. $(\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1.$

I.162. $\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta = \dfrac{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$

I.163. $\dfrac{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - 1} = \operatorname{ctg}^2\alpha.$

I.164. $\dfrac{\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha} - \dfrac{1}{\cos\alpha}.$

I.165. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha.$

I.166. $\dfrac{\sin\alpha - \cos\beta}{\sin\beta + \cos\alpha} = \dfrac{\sin\beta - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\beta}.$

I.167. $\dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}.$

I.168. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha - \cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha}.$

Упростить выражения:

I.169. $\operatorname{ctg}^6\beta - \dfrac{\cos^2\beta - \operatorname{ctg}^2\beta}{\sin^2\beta - \operatorname{tg}^2\beta}$.

I.170. $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha - \dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

I.171. $\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} - \operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta$.

I.172. $\dfrac{1}{(\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha)^2} + \sin^2\alpha$.

I.173. $\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} - \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)$.

I.174. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

I.175. $\dfrac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2}{\dfrac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

* * *

Пример I.176. Упростить выражение

$$\frac{\sin(\alpha - \beta) - \sin(\beta - \alpha)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\beta - \alpha)}.$$

Решение. Так как синус — нечетная функция, а косинус — четная, то имеем: $\dfrac{\sin(\alpha - \beta) - \sin(\beta - \alpha)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\beta - \alpha)} =$

$$= \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \frac{2\sin(\alpha - \beta)}{2\cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta).$$

Ответ: $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

Пример I.177. Упростить выражение

$$\frac{1 - \operatorname{ctg}^2(-\alpha)}{\cos\alpha + \sin(-\alpha)} \cdot \sin(-\alpha) + \operatorname{ctg}(-\alpha).$$

Решение. $\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2(-\alpha)}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}\cdot\sin(-\alpha)+\operatorname{ctg}(-\alpha)=$

$$=\frac{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}\cdot(-\sin\alpha)-\operatorname{ctg}\alpha=$$

$$=\frac{1-\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\sin\alpha-\cos\alpha}\cdot\sin\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\sin\alpha-\cos\alpha}\cdot\sin\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\sin\alpha}{\sin^2\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)}-\operatorname{ctg}\alpha=$$

$$=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)}-\operatorname{ctg}\alpha=$$

$$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

Ответ: 1.

Упражнения

Упростить выражения:

I.178. $\dfrac{\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)-\operatorname{tg}(\beta-2\alpha)}{\operatorname{ctg}(\beta-2\alpha)-\operatorname{ctg}(2\alpha-\beta)}$.

I.179. $\dfrac{\cos^3(-\alpha)+\sin^3(-\alpha)}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}$.

I.180. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(-\alpha)+\operatorname{tg}\alpha}+\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha)$.

I.181. $\cos(-\alpha)+\cos\alpha\operatorname{tg}^2(-\alpha)$.

I.182. $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}\alpha+\sin^2(-\alpha)$.

I.183. $\dfrac{1+\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)}-\operatorname{tg}(-\beta)$.

I.184. $\dfrac{\cos^2(-\beta)-\cos^4(-\beta)}{\sin^2(-\beta)}$.

* * *

Пример I.185. Доказать тождество

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = -2\operatorname{tg}\alpha,$$

если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Решение. Так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$ и $\alpha \neq 90^\circ + 180^\circ k$, $k \in Z$, то $1 + \sin\alpha > 0$ и $1 - \sin\alpha > 0$. Тогда

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha}}{\sqrt{1-\sin\alpha}} - \frac{\sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{1+\sin\alpha})^2 - (\sqrt{1-\sin\alpha})^2}{\sqrt{1-\sin\alpha}\cdot\sqrt{1+\sin\alpha}} = \frac{1+\sin\alpha-1+\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha}} = \frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}.$$

Так как $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, то $\cos\alpha < 0$ и $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$. Тогда $\frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|} = \frac{2\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -2\operatorname{tg}\alpha$.

Следовательно, данное тождество верное.

Пример I.186. Упростить выражение

$$\sqrt{\sin^2\alpha\,(1-\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^2\alpha\,(1-\operatorname{tg}\alpha)},$$

если $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Решение. $\sqrt{\sin^2\alpha\,(1-\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^2\alpha\,(1-\operatorname{tg}\alpha)} =$

$$= \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cos\alpha\sin\alpha} =$$

$$= \sqrt{\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2} = |\sin\alpha - \cos\alpha|.$$

Так как $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, то $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$, $-\cos\alpha < 0$ и $\sin\alpha - \cos\alpha < 0$. Следовательно,

$$|\sin\alpha - \cos\alpha| = \cos\alpha - \sin\alpha.$$

Ответ: $\cos\alpha - \sin\alpha$.

Упражнения

Упростить выражения:

I.187. $\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}}$, если $3\pi < \alpha < 4\pi$.

I.188. $\sqrt{\cos^2\beta\,(1 + \operatorname{tg}\beta) + \sin^2\beta\,(1 + \operatorname{ctg}\beta)}$, если $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

I.189. $\sin\alpha - \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha}$, если $180° < \alpha < 360°$.

I.190. $\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$, если $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

I.191. $\sqrt{4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1} - \sqrt{4 - 4\sin^2\alpha}$, если $\frac{2\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

I.192. $\sqrt{2 - 2\cos^2\beta} + \sqrt{2\sin^2\beta - 2\sqrt{2}\sin\beta + 1}$, если $\frac{3\pi}{4} \leqslant \beta \leqslant \pi$.

I.193. $\frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha\cos^2\beta}}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\alpha}$, если $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

* * *

Пример I.194. Известно, что $\cos\alpha = \frac{1}{4}$. Вычислить $\sin\alpha$.

Решение. Имеем $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$,

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ или } \sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Ответ: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ или $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Пример I.195. Найти $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если

$$\sin\alpha = -\frac{7}{25} \text{ и } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

Решение. Имеем

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}.$$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$ и, следовательно, $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{7}{25} : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24}, \ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{24}{7}.$$

Ответ: $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{24}{7}$.

Пример I.196. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 3\frac{15}{16}$, $90° < \alpha < 270°$. Определить $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. $\operatorname{tg}\alpha = 3\frac{15}{16} = \frac{63}{16}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{16}{63}$.

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{3969}{256} = \frac{4225}{256}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{256}{4225}.$$

Так как $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и $90° < \alpha < 270°$, то $180° < \alpha < 270°$. Следовательно, $\cos\alpha < 0$, $\cos\alpha = -\frac{16}{65}$.

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{63}{16} \cdot \left(-\frac{16}{65}\right) = -\frac{63}{65}.$$

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{63}{65}$, $\cos\alpha = -\frac{16}{65}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{16}{63}$.

Пример I.197. Зная, что $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a^2}{b^2}$, $ab \neq 0$ и $\sin\alpha < 0$, найти значения остальных тригонометрических функций угла α.

Решение. $\frac{a^2}{b^2} > 0$. Следовательно, α — угол I или III четвертей. Так как $\sin\alpha < 0$, то α — угол III четверти.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{b^2},$$

$$\sin^2\alpha = \frac{b^2}{a^2+b^2}.$$

Если $b > 0$, то $\sin\alpha = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; если $b < 0$, то $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. $\cos\alpha = \sin\alpha \operatorname{ctg}\alpha =$

$$= -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a^2}{b^2} = -\frac{a^2}{b\sqrt{a^2+b^2}}$$

при $b > 0$ или $\cos\alpha = \frac{a^2}{b\sqrt{a^2+b^2}}$ при $b < 0$.

Ответ: если $b > 0$, то $\sin\alpha = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$\cos\alpha = -\frac{a^2}{b\sqrt{a^2+b^2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b^2}{a^2}$;

если $b < 0$, то $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$\cos\alpha = \frac{a^2}{b\sqrt{a^2+b^2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b^2}{a^2}$.

Упражнения

I.198. Вычислить значения тригонометрических функций угла α, зная, что:

а) $\cos\alpha = \frac{45}{53}$; *б)* $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}225$;

в) $\sin\alpha = -\frac{2}{7}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

г) $\operatorname{ctg}\alpha = -3\frac{3}{7}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

д) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

е) $\sin\alpha = \frac{20}{101}$, $90° < \alpha < 180°$;

ж) $\cos\alpha = 0{,}28$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

з) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

и) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

к) $\operatorname{ctg}\alpha = -2$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

л) $\sin\alpha = \frac{m}{n}$, $0 < m < n$;

м) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{k}$, $180° < \alpha < 270°$;

н) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, $270° < \alpha < 360°$;

о) $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $a > 0$;

п) $\sin\alpha = \frac{a - b}{a + b}$, $0 < b < a$, $0° < \alpha < 90°$;

р) $\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

с) $\cos\alpha = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $|x| > 1$;

т) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^4 - 1}{2a^2}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

у) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2\sqrt{a}}{a - 1}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

ф) $\cos\alpha = \frac{a - 1}{a}$, $a > 1$.

I.199. Найти $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\sqrt{1-a^2}$. Каким должно быть значение a?

I.200. Найти $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = 1 + a$. Каким должно быть значение a?

I.201. Найти $\cos\varphi$, если $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2ab}}{a+b}$, $a > b > 0$ и угол φ не является углом I четверти.

I.202. Найти $\cos\varphi$, если $\operatorname{tg}\varphi = a^2 - 1$, $|a| \leqslant 1$ и угол φ не является углом II четверти.

I.203. Зная, что $\sin\alpha = -\dfrac{1}{m^2}$ и $\cos\alpha > 0$, найти значения остальных тригонометрических функций угла α.

* * *

Пример I.204. Найти значение выражения

$$\frac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha},$$

если $\operatorname{tg}\alpha = 5$.

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$\frac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha\left(3\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 1\right)}{\cos\alpha\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 2\right)} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 2}.$$

При $\operatorname{tg}\alpha = 5$ имеем: $\dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 2} = \dfrac{3\cdot 5 - 1}{5 + 2} = 2.$

Ответ: 2.

Пример I.205. Найти значение выражения

$$\frac{2\cos^2\alpha - 7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha},$$

если $\operatorname{ctg}\alpha = -2$.

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$\frac{2\cos^2\alpha - 7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha\left(2\cdot\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - 7\right)}{\sin^2\alpha\left(3\cdot\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 4\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)} =$$

$$= \frac{2\operatorname{ctg}^2\alpha - 7}{3\operatorname{ctg}^2\alpha + 4\operatorname{ctg}\alpha}.$$

При $\operatorname{ctg}\alpha = -2$ имеем:

$$\frac{2\operatorname{ctg}^2\alpha - 7}{3\operatorname{ctg}^2\alpha + 4\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{2\cdot 4 - 7}{3\cdot 4 + 4\cdot(-2)} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример I.206. Найти значение выражения

$$\frac{\sin^3\alpha - 2\cos^3\alpha}{\cos\alpha + 2\sin\alpha},$$

если $\operatorname{ctg}\alpha = 4$.

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$\frac{\sin^3\alpha - 2\cos^3\alpha}{\cos\alpha + 2\sin\alpha} = \frac{\sin^3\alpha - 2\cos^3\alpha}{(\cos\alpha + 2\sin\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin^3\alpha - 2\cos^3\alpha}{2\sin^3\alpha + \sin^2\alpha\cos\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \cos^3\alpha} =$$

$$= \frac{\sin^3\alpha\left(1 - 2\cdot\frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}\right)}{\sin^3\alpha\left(2 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}\right)} =$$

$$= \frac{1 - 2\operatorname{ctg}^3\alpha}{2 + \operatorname{ctg}\alpha + 2\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha}.$$

Подставив в полученное выражение значение $\operatorname{ctg}\alpha = 4$, имеем: $\frac{1 - 128}{2 + 4 + 32 + 64} = -\frac{127}{102}$.

Ответ: $-\frac{127}{102}$.

Упражнения

I.207. Найти значения выражений:

а) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

б) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$;

в) $\dfrac{5\cos\alpha + 6\sin\alpha}{3\sin\alpha - 7\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$;

г) $\dfrac{4\sin\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha + 4\sin\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha$ не определен;

д) $\dfrac{5\sin\alpha + 4\cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{2}$;

е) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{3}{4}$;

ж) $\dfrac{3\sin^2\alpha + 12\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$;

з) $\dfrac{2\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{3\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$;

и) $\dfrac{8\sin\alpha - 3\cos\alpha}{\sin^3\alpha + 5\sin^2\alpha\cos\alpha - 8\cos^3\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -3$;

к) $\dfrac{2\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha}{5\sin\alpha - \cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -4$;

л) $\dfrac{\sin^4\alpha + 5\sin^3\alpha\cos\alpha - \cos^4\alpha}{2\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 2$.

* * *

Пример I.208. Найти $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = a$.

Решение. Возведя обе части равенства $\sin\alpha + \cos\alpha = a$ в квадрат, получаем: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = a^2$,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = a^2,$$

$$1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = a^2, \quad \sin\alpha\cos\alpha = \frac{a^2 - 1}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{a^2 - 1}{2}$.

Пример I.209. Дано: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = a$. Найти:

а) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. *а)* Возведя обе части равенства $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = a$ в квадрат, получаем: $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = a^2$,

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = a^2, \quad \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = a^2 - 2.$$

Ответ: $a^2 - 2$.

б) Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, находим: $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha =$

$$= a^2 - 2 - 2 = a^2 - 4;$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = \pm\sqrt{a^2 - 4}.$$

Ответ: $\pm\sqrt{a^2 - 4}$.

Пример I.210. Вычислить значение выражения

$$\operatorname{tg}^2\gamma + \frac{1}{\sin\gamma}\cdot\frac{1}{\cos\gamma} + \operatorname{ctg}^2\gamma,$$

если $\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma = 5$.

Решение. Так как $\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma = \dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma} + \dfrac{\cos\gamma}{\sin\gamma} =$

$$= \frac{\sin^2\gamma + \cos^2\gamma}{\sin\gamma\cos\gamma} = \frac{1}{\sin\gamma\cos\gamma},$$

то $\dfrac{1}{\sin\gamma\cos\gamma} = 5$.

$$\operatorname{tg}^2\gamma + \operatorname{ctg}^2\gamma = (\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma)^2 - 2\operatorname{tg}\gamma\operatorname{ctg}\gamma = 25 - 2 = 23.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}^2\gamma + \frac{1}{\sin\gamma\cos\gamma} + \operatorname{ctg}^2\gamma = 23 + 5 = 28.$$

Ответ: 28.

Упражнения

I.211. Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = a$. Найти:

а) $\sin\alpha - \cos\alpha$;

б) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$;

в) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$;

г) $\dfrac{1}{\sin^4\alpha} + \dfrac{1}{\cos^4\alpha}$;

д) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$;

е) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.

I.212. Дано: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = a$. Найти:

а) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$; *б)* $\operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha$; *в)* $\cos\alpha + \sin\alpha$.

I.213. Вычислить $\sin^2\alpha - \sin^4\alpha$, если

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = 7.$$

I.214. Найти $\dfrac{\sin^{10}\alpha}{1-\operatorname{tg}^4\alpha} + \dfrac{\cos^{10}\alpha}{1-\operatorname{ctg}^4\alpha}$, если $\sin^2\alpha\cos^2\alpha = a$.

I.215. Вычислить $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$, если $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$.

* * *

Пример I.216. Исключить угол α из системы равенств (т.е. составить соотношение, связывающее x и y и не содержащее α):

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{\cos\alpha}, \\ y = 2\operatorname{tg}\alpha. \end{cases}$$

Решение. Имеем $\dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{x}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{2}$.

Так как $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, то $1 + \dfrac{y^2}{4} = \dfrac{x^2}{9}$,

$$36 + 9y^2 = 4x^2,\ 4x^2 - 9y^2 = 36.$$

Ответ: $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Пример I.217. Исключить углы α и β из системы равенств

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\beta = a, \\ x\sin\beta - y\cos\alpha = b, \\ (x^2+y^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\beta) = 2ab. \end{cases}$$

Решение. Возведем обе части первых двух равенств системы в квадрат:

$$\begin{cases} (x\cos\alpha + y\sin\beta)^2 = a^2, \\ (x\sin\beta - y\cos\alpha)^2 = b^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2\cos^2\alpha + y^2\sin^2\beta + 2\,xy\cos\alpha\sin\beta = a^2, \\ x^2\sin^2\beta + y^2\cos^2\alpha - 2\,xy\cos\alpha\sin\beta = b^2. \end{cases}$$

Сложим полученные равенства:

$$x^2\cos^2\alpha + x^2\sin^2\beta + y^2\sin^2\beta + y^2\cos^2\alpha = a^2 + b^2,$$

$$x^2(\cos^2\alpha + \sin^2\beta) + y^2(\sin^2\beta + \cos^2\alpha) = a^2 + b^2,$$

$$(x^2 + y^2)(\cos^2\alpha + \sin^2\beta) = a^2 + b^2. \qquad (1)$$

Теперь сложим равенство (1) с последним равенством исходной системы:

$$(x^2 + y^2)(\cos^2\alpha + \sin^2\beta) + (x^2 + y^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\beta) = \\ = a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$(x^2 + y^2)(\cos^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\alpha + \cos^2\beta) = (a + b)^2,$$

$$2\,(x^2 + y^2) = (a + b)^2. \qquad (2)$$

Равенство (2) связывает между собой переменные x, y, a, b и не содержит α и β.

Ответ: $2\,(x^2 + y^2) = (a + b)^2$.

Упражнения

I.218. Исключить угол α из системы равенств:

а) $\begin{cases} x = 2\cos\alpha, \\ y = 2\sin\alpha; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 5\,\mathrm{tg}\,\alpha, \\ y = \dfrac{1}{5}\,\mathrm{ctg}\,\alpha; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = 3\cos\alpha, \\ y = 5\sin\alpha; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = \sin\alpha + \cos\alpha, \\ y = \sin\alpha\cos\alpha; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}, \\ y = \sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x = (\sqrt{2} + \sqrt{3})\,\mathrm{tg}\,\alpha, \\ y = (2 - \sqrt{3})\,\mathrm{ctg}\,\alpha; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \mathrm{tg}^4\alpha + \mathrm{ctg}^4\alpha = x, \\ \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha = y; \end{cases}$

з) $\begin{cases} \sin\alpha + \cos\alpha = x, \\ \sin^3\alpha + \cos^3\alpha = y; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x = \mathrm{tg}^4\alpha + \mathrm{ctg}^4\alpha, \\ y = \mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\alpha. \end{cases}$

I.219. Исключить α и β из системы равенств:

а) $\begin{cases} a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha = a^2\cos^2\beta, \\ a^2\sin^2\alpha - b^2\cos^2\alpha = ab\cos^2\beta, \\ a\,\mathrm{tg}^2\alpha = b\,\mathrm{tg}^2\beta; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta = a, \\ \mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta = b, \\ \alpha + \beta = x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha = 1, \\ a\cos^2\beta + b\sin^2\beta = 1, \\ a\,\mathrm{tg}\,\alpha = b\,\mathrm{tg}\,\beta, \text{ где } 0 < b < 1,\ a > 1. \end{cases}$

* * *

Пример I.220. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения: *а)* $3\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha$; *б)* $2\cos^2\alpha - 3\sin\alpha$; *в)* $2\sin^2\alpha + 3\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Решение. *а)* $3\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha =$

$$= 3\cos^2\alpha - 4(1 - \cos^2\alpha) =$$

$$= 3\cos^2\alpha - 4 + 4\cos^2\alpha = 7\cos^2\alpha - 4.$$

Так как $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, то $0 \leqslant \cos^2\alpha \leqslant 1$,

$$0 \leqslant 7\cos^2\alpha \leqslant 7,\ -4 \leqslant 7\cos^2\alpha - 4 \leqslant 3.$$

Следовательно, наибольшее значение 3, наименьшее равно -4.

Ответ: 3; -4.

б) $2\cos^2\alpha - 3\sin\alpha = 2(1 - \sin^2\alpha) - 3\sin\alpha =$

$$= -2\sin^2\alpha - 3\sin\alpha + 2.$$

Обозначим $\sin\alpha = t$ и рассмотрим функцию $f(t) = -2t^2 - 3t + 2$, определенную на отрезке $[-1; 1]$. Это квадратичная функция со старшим отрицательным коэффициентом $a = -2$. Следовательно, она принимает наибольшее значение в точке $t_0 = -\dfrac{-3}{2\cdot(-2)} = -\dfrac{3}{4}$, принадлежащей отрезку $[-1; 1]$. Значит, наибольшее значение

$$f_{max} = f\left(-\frac{3}{4}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 2 = 3\frac{1}{8}.$$

Для нахождения наименьшего значения вычислим значения функции $f(t)$ на концах отрезка $[-1;\ 1]$:

$$f(-1) = -2 + 3 + 2 = 3,\ f(1) = -2 - 3 + 2 = -3.$$

Следовательно, $f_{min} = -3$.

Ответ: $3\frac{1}{8}$, -3.

в) $2\sin^2\alpha + 3\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 2\sin^2\alpha + 3$. Очевидно выражение $2\sin^2\alpha + 3$ принимает наименьшее значение при $\sin\alpha = 0$, но при этом $\mathrm{ctg}\,\alpha$ не существует и исходное выражение $2\sin^2\alpha + 3\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha$ не определено.

Наибольшее значение $2\sin^2\alpha + 3$ принимает при $\sin\alpha = 1$ или $\sin\alpha = -1$, но в этом случае $\mathrm{tg}\,\alpha$ не существует и исходное выражение также не определено.

Ответ: наибольшего и наименьшего значений не существует.

Упражнения

I.221. Найти наибольшее и наименьшее значения выражений:

а) $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$;

б) $3\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha$;

в) $3\cos^2\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha$;

г) $3\sin^2\alpha + 2\cos\alpha$;

д) $2\sin\alpha - \sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$;

е) $1 - \sqrt{\cos^2\alpha} - 2\sin^2\alpha$;

ж) $1 + \sqrt{\sin^2\alpha} + 2\cos^2\alpha$;

з) $\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,(2 - \sin^2\alpha)$;

и) $\mathrm{tg}^2\alpha + \dfrac{1}{\cos\alpha}$;

к) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \mathrm{tg}^2\alpha$.

* * *

2. Формулы приведения

x	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

x	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

Обратим внимание на закономерности в формулах приведения: функция в правой части равенства берется с тем же знаком, какой имеет исходная функция, если считать, что угол α является углом I четверти; для углов $\pi\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$, $3\pi\pm\alpha$, ... название исходной функции сохраняется; для углов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{5\pi}{2}\pm\alpha$, ... название исходной функции заменяется (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс). В частности, если α и β такие, что $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha=\cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta$.

Пример I.222. Привести к тригонометрической функции угла α:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

б) $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$;

в) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

г) $\operatorname{ctg}(\alpha-90^\circ)$.

Решение. *а)* Если считать, что α — угол I четверти, то $\frac{\pi}{2} + \alpha$ будет углом II четверти. Во II четверти синус положителен, значит, в правой части равенства следует поставить знак «плюс». Для угла $\frac{\pi}{2} + \alpha$ название функции заменяется. Поэтому $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$.

Ответ: $\cos\alpha$.

б) Если считать, что α — угол I четверти, то $\pi - \alpha$ будет углом II четверти. Во II четверти тангенс отрицателен, значит в правой части равенства следует поставить знак «минус». Для угла $\pi - \alpha$ название функции сохраняется. Поэтому $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Ответ: $-\operatorname{tg}\alpha$.

в) Так как тригонометрическая функция стоит в четной степени, то в правой части равенства следует поставить знак «плюс» независимо от четверти, которой принадлежит аргумент. Для угла $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ название функции заменяется. Поэтому $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sin^2\alpha$.

Ответ: $\sin^2\alpha$.

г) $\operatorname{ctg}(\alpha - 90^\circ) = -\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$, $90^\circ - \alpha$ — угол I четверти (котангенс положителен) и для него название функции заменяется. Следовательно,

$$\operatorname{ctg}(\alpha - 90^\circ) = -\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Ответ: $-\operatorname{tg}\alpha$.

Замечание. Рассматривая угол -90° как границу III и IV четвертей, получаем, что $\alpha - 90^\circ$ — угол IV четверти, где котангенс отрицателен. Тогда сразу можем записать $\operatorname{ctg}(\alpha - 90^\circ) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Упражнения

I.223. Привести к тригонометрической функции угла α:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

б) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

д) $\sin(\pi-\alpha)$;

е) $\cos(\pi-\alpha)$;

ж) $\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)$;

з) $\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)$;

и) $\sin(360^\circ+\alpha)$;

к) $\cos(360^\circ-\alpha)$;

л) $\operatorname{tg}(\alpha-360^\circ)$;

м) $\operatorname{ctg}(\alpha-270^\circ)$;

н) $\cos(-\alpha+270^\circ)$;

о) $\sin(180^\circ+\alpha)$;

п) $\cos(\alpha-180^\circ)$;

р) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$;

с) $\cos^2(3\pi-\alpha)$;

т) $\operatorname{tg}^4\left(\alpha-\frac{9\pi}{2}\right)$;

у) $\operatorname{ctg}^2(90^\circ+\alpha)$;

ф) $\sin^2(\alpha+7\pi)$;

х) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

ц) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;

ч) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

* * *

Пример I.224. Привести к значению тригонометрической функции наименьшего положительного аргумента:

а) $\sin 78^\circ$;

б) $\cos\frac{9\pi}{10}$;

в) $\cos\frac{8\pi}{7}$;

г) $\operatorname{tg}(-325^\circ)$;

д) $\operatorname{ctg} 213^\circ$.

Замечание. Наименьший положительный угол меньше 45°.

Решение. *а)* $\sin 78° = \sin(90° - 12°) = \cos 12°$.

Ответ: $\cos 12°$.

б) $\cos\frac{9\pi}{10} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) = -\cos\frac{\pi}{10}$.

Ответ: $-\cos\frac{\pi}{10}$.

в) $\cos\frac{8\pi}{7} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\cos\frac{\pi}{7}$.

Ответ: $-\cos\frac{\pi}{7}$.

г) $\operatorname{tg}(-325°) = -\operatorname{tg} 325° = -\operatorname{tg}(360° - 35°) =$

$$= -(-\operatorname{tg} 35°) = \operatorname{tg} 35°.$$

Ответ: $\operatorname{tg} 35°$.

д) $\operatorname{ctg} 213° = \operatorname{ctg}(180° + 33°) = \operatorname{ctg} 33°$.

Ответ: $\operatorname{ctg} 33°$.

Упражнения

I.225. Привести к значению тригонометрической функции наименьшего положительного аргумента:

а) $\cos 123°$;

б) $\operatorname{tg} 174°$;

в) $\sin 216°$;

г) $\operatorname{ctg} 194°$;

д) $\cos(-218°)$;

е) $\operatorname{tg} 1{,}2\pi$;

ж) $\sin 175°$;

з) $\operatorname{ctg} 310°$;

и) $\operatorname{tg} 256°$;

к) $\sin 1{,}9\pi$;

л) $\sin(-317°)$;

м) $\cos 400°$;

н) $\operatorname{ctg}(-0{,}7\pi)$;

о) $\cos\frac{5\pi}{9}$;

п) $\sin\frac{14\pi}{15}$;

р) $\sin 2{,}1\pi$;

с) $\cos\frac{17\pi}{14}$;

т) $\operatorname{ctg} 2$;

у) $\sin 5$;

ф) $\operatorname{tg} 4$.

* * *

Пример I.226. Привести к значению тригонометрической функции положительного аргумента, меньшего 45° $\left(\text{или } \frac{\pi}{4}\right)$:

а) $\cos 1501°$; *б)* $\sin(-824°)$; *в)* $\operatorname{tg}\frac{29\pi}{5}$; *г)* $\operatorname{ctg}\left(-\frac{41\pi}{9}\right)$.

Решение. *а)* Выделим целое число полных оборотов: $1501° = 360° \cdot 4 + 61°$. Тогда $\cos 1501° = \cos(360° \cdot 4 + 61°) =$

$$= \cos 61° = \cos(90° - 29°) = \sin 29°.$$

Ответ: $\sin 29°$.

б) $\sin(-824°) = -\sin 824° = -\sin(360° \cdot 2 + 104°) =$

$$= -\sin 104° = -\sin(90° + 14°) = -\cos 14°.$$

Ответ: $-\cos 14°$.

в) $\operatorname{tg}\frac{29\pi}{5} = \operatorname{tg}\left(6\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$.

Ответ: $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$.

г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{41\pi}{9}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{41\pi}{9} = -\operatorname{ctg}\left(4\pi + \frac{5\pi}{9}\right) =$

$$= -\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{9} = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{18}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{18}.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}$.

Упражнения

I.227. Привести к значению тригонометрической функции положительного аргумента, меньшего 45° $\left(\text{или } \frac{\pi}{4}\right)$:

а) $\sin 1914°$;

б) $\cos 1914°$;

в) $\cos(-1570°)$;

г) $\sin(-1570°)$;

д) $\operatorname{tg} 23{,}7\pi$;

е) $\cos(-1961°)$;

ж) $\sin 5000°$;

з) $\cos 8$;

и) $\operatorname{tg}(-580°)$;

к) $\cos 2420°$;

л) $\operatorname{ctg}(-1253°)$;

м) $\operatorname{tg}(-1346°)$;

н) $\sin 1242°$;

о) $\sin 4{,}3\pi$;

п) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{16\pi}{7}\right)$;

р) $\cos\frac{29\pi}{12}$;

с) $\operatorname{tg}\frac{21\pi}{5}$;

т) $\cos\left(-\frac{33\pi}{13}\right)$;

у) $\operatorname{tg}\frac{43\pi}{12}$;

ф) $\sin\frac{34\pi}{9}$.

* * *

Пример I.228. Вычислить:

а) $\sin 930°$; *б*) $\cos(-480°)$; *в*) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$; *г*) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$.

Решение. *а*) $\sin 930° = \sin(360° \cdot 2 + 210°) =$

$$= \sin 210° = \sin(180° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

б) $\cos(-480°) = \cos 480° = \cos(360° + 120°) =$

$$= \cos 120° = \cos(90° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

в) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3} = -\operatorname{ctg}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Упражнения

I.229. Вычислить:

а) $\sin 120°$;

б) $\operatorname{ctg}(-330°)$;

в) $\cos 225°$;

г) $\operatorname{tg}(-240°)$;

д) $\cos(-150°)$;

е) $\operatorname{ctg} 300°$;

ж) $\sin 240°$;

з) $\operatorname{tg} 210°$;

и) $\cos 135°$;

к) $\operatorname{ctg} 315°$;

л) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$;

м) $\cos\frac{5\pi}{4}$;

н) $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}$;

о) $\cos\frac{13\pi}{6}$;

п) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$;

р) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$;

с) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$;

т) $\cos 10\pi$;

у) $\sin 7\pi$;

ф) $\sin 1110°$;

х) $\operatorname{ctg}(-1200°)$;

ц) $\operatorname{tg} 1050°$;

ч) $\cos 855°$;

ш) $\sin(-3810°)$;

щ) $\cos\frac{47\pi}{6}$;

э) $\sin\frac{57\pi}{4}$;

ю) $\operatorname{tg}\frac{74\pi}{3}$;

я) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{20\pi}{3}\right)$.

* * *

Пример I.230. Упростить выражение

$$\operatorname{tg}(360° - \alpha) + \operatorname{ctg}(270° - \alpha) + \operatorname{tg}(180° - \alpha) + \operatorname{ctg}(90° - \alpha).$$

Решение. $\operatorname{tg}(360° - \alpha) + \operatorname{ctg}(270° - \alpha) + \operatorname{tg}(180° - \alpha) +$

$+ \operatorname{ctg}(90° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha = 0.$

Ответ: 0.

Пример I.231. Доказать тождество

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi+\alpha)}{\left(\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(1{,}5\pi+\alpha)\right)^2-1}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Решение. $$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi+\alpha)}{\left(\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(1{,}5\pi+\alpha)\right)^2-1}=$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-(-\cos\alpha)\cdot(-\sin\alpha)}{(-\sin\alpha-\cos\alpha)^2-1}=$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-1}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\alpha\cos\alpha}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}-1\right)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Упростить выражения:

I.232. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

I.233. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

I.234. $\sin(\pi+\alpha)-\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$.

I.235. $\cos(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)$.

I.236. $\sin(270^\circ-\alpha)+\cos(270^\circ+\alpha)$.

I.237. $\operatorname{tg}(\alpha-360^\circ)-\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)$.

I.238. $\sin(\pi+1)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

I.239. $\sin^2 2(\pi+1)+\cos^2 2(\pi-1)$.

I.240. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+$
$+\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha).$

I.241. $\sin\alpha-\sin(\alpha-90^\circ)-\sin(\alpha-180^\circ)-$
$-\sin(\alpha-270^\circ)-\sin(\alpha-360^\circ).$

I.242. $\sin(90^\circ+\alpha)\cdot\sin(180^\circ-\alpha)(\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)+$
$+\operatorname{tg}(270^\circ-\alpha)).$

I.243. $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\sin^2(\alpha-\pi)\sin^2(\alpha+\pi)-$
$-\cos^2(\alpha+\pi)\cos^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right).$

I.244. $1-\sin(x-2\pi)\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)-$
$-\operatorname{tg}(\pi-x)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-2\cos^2(\pi+x).$

I.245. $\sin^2(\pi-x)+\operatorname{tg}^2(\pi-x)\cdot\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+$
$+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos(x-2\pi).$

I.246. $\dfrac{\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}.$

I.247. $\sin(90^\circ-\alpha)-\cos(180^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)-$
$-\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha).$

I.248. $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos(3\pi-\alpha)+$
$+\sin\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)\sin(3\pi+\alpha).$

I.249. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)+$
$+\sin(\alpha-3\pi)\cos\left(\alpha+\frac{7\pi}{2}\right).$

I.250. $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+$
$+\cos(\alpha-4\pi)\cos(3\pi-\alpha).$

I.251. $\sin\left(\alpha+\frac{7\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+$

$$+\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)\cos(6\pi+\alpha).$$

I.252. $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-x)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}{\cos(\pi+x)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}.$

I.253. $\dfrac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}{\operatorname{ctg}^2(x-2\pi)}+\dfrac{\sin^2(-x)}{\operatorname{ctg}^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}.$

I.254. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi+\alpha)\right)}{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)(\cos(2\pi+\alpha)-\sin(2\pi-\alpha))}.$

I.255. $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}.$

I.256. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin^2(\alpha-\pi)}-\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(\alpha-\pi).$

Доказать тождества:

I.257. $\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi-x)\right)^2+$

$$+\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cos(2\pi-x)\right)^2=2.$$

I.258. $\sin(2\pi-\varphi)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)-\cos(\varphi-\pi)-$

$$-\sin(\varphi-\pi)=\sin\varphi.$$

I.259. $\dfrac{\sin(\beta-\pi)\cos(\beta-2\pi)\sin(2\pi-\beta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\operatorname{ctg}(\pi-\beta)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)}=\sin^2\beta.$

I.260. $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}=\operatorname{ctg}^2\alpha.$

I.261. $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^2+$

$$+\left(\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}+\operatorname{ctg}(\pi-x)\right)^2=\frac{2}{\sin^2 x}.$$

I.262. $\left(\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{4}+\operatorname{ctg}(7\pi-x)\right)^2+$

$$+\left(\operatorname{tg}\frac{17\pi}{4}+\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)\right)^2=\frac{2}{\sin^2 x}.$$

I.263. $\dfrac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)\right)^2-1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)}=2\operatorname{tg}^2\alpha.$

I.264. $\dfrac{1-2\sin^2(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)}+$

$$+\frac{1-2\cos^2(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)}=2\cos\alpha.$$

I.265. $(\operatorname{ctg}(6{,}5\pi-\alpha)\cos(-\alpha)+\cos(\pi-\alpha))^2+$

$$+\frac{2\sin^2(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha-\pi)}=1.$$

I.266. $\left(\dfrac{\cos(2{,}5\pi+\alpha)}{\operatorname{ctg}(3\pi+\alpha)}-\sin(-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+$

$$+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=1.$$

I.267. $\dfrac{\left(\sin^2(9\pi+0{,}5)+\sin^2(0{,}5-7{,}5\pi)\right)\sin\left(\frac{1}{2}-\pi\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-0{,}5\right)\operatorname{tg}(0{,}5-0{,}5\pi)}=$

$$=-\operatorname{tg}0{,}5.$$

I.268. $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\alpha+\pi)+\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)+$

$$+ \sin(\alpha + 2\pi) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha + \pi) +$$

$$+ \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(\alpha + 2\pi).$$

I.269. $$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\cos(2\pi - \alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \sin\alpha.$$

I.270. $$\frac{\sin(\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)} + \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -1.$$

I.271. $$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} - \cos(\pi - \alpha)} +$$

$$+ \frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin\pi + \sin(\pi - \alpha)} = \frac{2}{\sin\alpha}.$$

I.272. $$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin(\pi - \alpha) + \cos(\pi - \alpha)\sin(-\alpha) +$$

$$\cos(\pi + \alpha)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos^2\alpha.$$

I.273. $$\frac{\cos^4(\alpha - \pi)}{\cos^4\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \sin^4\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) - 1} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

I.274. $$\sqrt{\sin^{-2}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos^{-2}\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)} = \frac{1}{|\sin\alpha\cos\alpha|},$$

I.275. $$\sqrt[3]{\frac{\sin^{-1}((\pi/2) - \alpha) + \sin(\alpha - (\pi/2))}{\cos^{-1}(\alpha + (3\pi)/2) + \cos(\alpha - (3\pi)/2)}} = \operatorname{tg}\alpha.$$

I.276. $$\cos^6\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin^6\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) -$$

$$- \frac{3}{4}\left(\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

* * *

Пример I.277. Вычислить:

а) $\sin(-300^\circ)\cos(-135^\circ)\operatorname{tg}(-210^\circ)\operatorname{ctg}(-120^\circ)$;

б) $\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right) - \frac{1}{\cos^2\frac{16\pi}{3}} + \operatorname{ctg}\frac{23\pi}{4}$.

Решение. *а)* Имеем: $\sin(-300^\circ) = -\sin 300^\circ =$

$$= -\sin(270^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos(-135^\circ) = \cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}(-210^\circ) = -\operatorname{tg} 210^\circ = -\operatorname{tg}(180^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg}(-120^\circ) = -\operatorname{ctg} 120^\circ = -\operatorname{ctg}(90^\circ + 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Следовательно,

$$\sin(-300^\circ)\cos(-135^\circ)\operatorname{tg}(-210^\circ)\operatorname{ctg}(-120^\circ) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{12}$.

б) Имеем: $\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right) = \cos\frac{23\pi}{6} =$

$$= \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos^2\frac{16\pi}{3} = \cos^2\left(5\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{23\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(6\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1.$$

Следовательно, $\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right) - \frac{1}{\cos^2\frac{16\pi}{3}} + \operatorname{ctg}\frac{23\pi}{4} =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 - 1 = \frac{\sqrt{3} - 10}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3} - 10}{2}$.

Упражнения

Вычислить:

I.278. $\frac{\sin^2 315^\circ \cos 300^\circ + \operatorname{tg}(-315^\circ)}{\sin(-120^\circ)\cos 150^\circ}$.

I.279. $\frac{6\cos^2(-240^\circ)\operatorname{ctg} 210^\circ}{\sin(-300^\circ)\cos^2 180^\circ}$.

I.280. $\sin 810^\circ \cos 900^\circ + \operatorname{tg} 585^\circ \operatorname{ctg} 1845^\circ + \cos 135^\circ \sin 405^\circ$.

I.281. $\sin 225^\circ \cos 120^\circ \operatorname{tg} 300^\circ \operatorname{ctg} 240^\circ$.

I.282. $3\operatorname{ctg} 135^\circ + 2\cos 120^\circ + \operatorname{tg} 420^\circ + 2\sin 330^\circ$.

I.283. $2\sin 210^\circ + \operatorname{tg} 240^\circ + \operatorname{ctg} 120^\circ + \cos 450^\circ$.

I.284. $\sin\frac{7\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$.

I.285. $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$.

I.286. $\operatorname{tg}^2\frac{11\pi}{3} + \operatorname{ctg}(-7{,}25\pi) + 4\cos^2\frac{31\pi}{6}$.

I.287. $\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sin^2\frac{29\pi}{4}} - \operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{4}$.

I.288. $\operatorname{tg} 1290^\circ + \cos 1470^\circ + \cos 1590^\circ$.

I.289. $\frac{\sin 1470^\circ - \sin 1770^\circ - \operatorname{ctg} 1755^\circ}{\operatorname{ctg} 1665^\circ + \frac{1}{\cos 660^\circ} + \frac{1}{\sin 870^\circ}}$.

* * *

Пример I.290. Вычислить:

а) $\operatorname{tg} 41^\circ \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{tg} 44^\circ \ldots \operatorname{tg} 49^\circ$;

б) $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \ldots + \cos 140^\circ + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$.

Решение. *а)* $\operatorname{tg} 49^\circ = \operatorname{ctg} 41^\circ$, $\operatorname{tg} 48^\circ = \operatorname{ctg} 42^\circ$ и т.д. Тогда, объединив попарно множители, равноотстоящие от концов произведения, получим четыре произведения, равных 1:

$$\operatorname{tg} 41^\circ \operatorname{tg} 49^\circ = \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 48^\circ = \operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{tg} 47^\circ = \operatorname{tg} 44^\circ \operatorname{tg} 46^\circ = 1.$$

Девятый множитель исходного произведения $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Следовательно, $\operatorname{tg} 41^\circ \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{tg} 44^\circ \ldots \operatorname{tg} 49^\circ = 1$.

Ответ: 1.

б) Имеем $\cos 160^\circ = \cos(180^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$,

$$\cos 140^\circ = \cos(180^\circ - 40^\circ) = -\cos 40^\circ, \ldots,$$

$$\cos 100^\circ = \cos(180^\circ - 80^\circ) = -\cos 80^\circ.$$

Следовательно, $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \ldots + \cos 140^\circ + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \ldots - \cos 40^\circ - \cos 20^\circ - 1 = -1$.

Ответ: -1.

Упражнения

Вычислить:

I.291. $\operatorname{ctg} 5^\circ \operatorname{ctg} 15^\circ \operatorname{ctg} 25^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{ctg} 75^\circ \operatorname{ctg} 85^\circ$.

I.292. $(\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ + \sin 40^\circ) - (\cos 50^\circ + \cos 60^\circ + \cos 70^\circ + \cos 80^\circ)$.

I.293. $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \ldots + \operatorname{tg} 160^\circ + \operatorname{tg} 180^\circ$.

I.294. $\sin 0^\circ + \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \ldots + \sin 359^\circ + \sin 360^\circ$.

I.295. $\operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ + \ldots + \operatorname{ctg} 165^\circ$.

I.296. $\sin 110^\circ + \sin 130^\circ + \sin 150^\circ + \ldots + \sin 230^\circ + \sin 250^\circ + \sin 270^\circ$.

I.297. $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \ldots \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 80^\circ$.

* * *

Пример I.298. Упростить выражение:

а) $\sin(-523^\circ)\cos(-287^\circ) - \operatorname{ctg}(-296^\circ)\operatorname{tg}(-604^\circ)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{9\pi}{5}+\alpha\right) +$

$$+\operatorname{ctg}(\pi+\beta)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right).$$

Решение. *а)* Приведем каждую из тригонометрических функций, входящих в данное выражение, к функции положительного аргумента, меньшего 45°:

$$\sin(-523^\circ) = -\sin 523^\circ = -\sin(360^\circ + 163^\circ) =$$

$$= -\sin 163^\circ = -\sin(180^\circ - 17^\circ) = -\sin 17^\circ,$$

$$\cos(-287^\circ) = \cos 287^\circ = \cos(270^\circ + 17^\circ) = \sin 17^\circ,$$

$$\operatorname{ctg}(-296^\circ) = -\operatorname{ctg} 296^\circ = -\operatorname{ctg}(270^\circ + 26^\circ) = \operatorname{tg} 26^\circ,$$

$$\operatorname{tg}(-604^\circ) = -\operatorname{tg} 604^\circ = -\operatorname{tg}(720^\circ - 116^\circ) =$$

$$= -\operatorname{tg}(-116^\circ) = \operatorname{tg} 116^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 26^\circ) = -\operatorname{ctg} 26^\circ.$$

Тогда $\sin(-523^\circ)\cos(-287^\circ) - \operatorname{ctg}(-296^\circ)\operatorname{tg}(-604^\circ) =$

$$= -\sin 17^\circ \sin 17^\circ - \operatorname{tg} 26^\circ \cdot (-\operatorname{ctg} 26^\circ) =$$

$$= 1 - \sin^2 17^\circ = \cos^2 17^\circ.$$

Ответ: $\cos^2 17^\circ$.

б) $\sin\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{9\pi}{5}+\alpha\right) +$

$$+\operatorname{ctg}(\pi+\beta)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\pi-\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)\right)\cos\left(2\pi-\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)\right) +$$

$$+\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{tg}\beta = \sin\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)\cdot\left(-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)+1 =$$

$$= 1 - \sin\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right) =$$

$$= 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{5} - \alpha\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{5} - \alpha\right).$$

Ответ: $\sin^2\left(\frac{\pi}{5} - \alpha\right)$.

Упражнения

Упростить выражения:

I.299. $\sin 20^\circ \cos 70^\circ + \sin^2 110^\circ \cos^2 250^\circ + \sin^2 290^\circ \cos^2 340^\circ$.

I.300. $(\sin 75^\circ + \sin 100^\circ)(\sin 260^\circ - \sin 285^\circ) + (\sin 165^\circ + \sin 190^\circ)(\cos 75^\circ - \cos 100^\circ)$.

I.301. $\operatorname{tg} 100^\circ + \dfrac{\sin 530^\circ}{1 + \sin 640^\circ}$.

I.302. $\operatorname{ctg} 0{,}4\pi - \dfrac{\cos 1{,}1\pi}{1 - \cos 0{,}6\pi}$.

I.303. $\sin 395^\circ \sin 505^\circ + \cos 575^\circ \cos 865^\circ + \operatorname{tg} 606^\circ \operatorname{tg} 1104^\circ$.

I.304. $\sin 405^\circ \cos 675^\circ + \operatorname{tg} 562^\circ \operatorname{tg} 788^\circ + \dfrac{1}{\cos 660^\circ \cos 1200^\circ}$.

I.305. $\sin 245^\circ \cos 205^\circ + \dfrac{\operatorname{ctg} 295^\circ}{\operatorname{tg} 155^\circ + \operatorname{tg} 115^\circ}$.

I.306. $\cos 105^\circ - \sin 195^\circ + \sin(-135^\circ)$.

I.307. $\left(\dfrac{1}{\sin 260^\circ \sin 620^\circ} - \operatorname{tg} 185^\circ \operatorname{tg} 805^\circ\right)\left(\dfrac{1}{\cos^2 800^\circ} - 1\right)$.

I.308. $\left(\dfrac{1}{\cos 352^\circ} - \sin 172^\circ \operatorname{ctg} 262^\circ\right) \times (\cos^2 100^\circ + \cos^2 350^\circ) - \cos 8^\circ$.

I.309. $2\cos 140^\circ \cos 220^\circ + \sin 230^\circ \sin 320^\circ (\operatorname{tg} 130^\circ + \operatorname{tg} 400^\circ)$.

I.310. $\cos^2 230^\circ (1 + \operatorname{ctg} 220^\circ) + \sin^2 310^\circ (1 - \operatorname{ctg} 50^\circ)$.

I.311. $\left(\dfrac{\operatorname{tg}^2 590^\circ}{\cos^2 320^\circ} + \dfrac{\sin 111^\circ}{\cos 159^\circ}\right)\left(\dfrac{\cos 279^\circ}{\sin 549^\circ} + \dfrac{\operatorname{ctg}^2 950^\circ}{\sin^2 400^\circ}\right)$.

I.312. $\cos(-7{,}9\pi)\operatorname{tg}(-1{,}1\pi) - \sin 5{,}6\pi \operatorname{ctg} 4{,}4\pi$.

I.313. $\sin 5{,}9\pi \operatorname{tg}(-0{,}6\pi) + \cos 3{,}6\pi \operatorname{ctg}(-4{,}9\pi)$.

I.314. $\sin(-1{,}3\pi)\cos(-1{,}7\pi)\operatorname{tg}(-0{,}7\pi) +$
$+ \sin 0{,}8\pi \cos 1{,}8\pi \operatorname{tg} 1{,}2\pi$.

I.315. $\operatorname{ctg} 2{,}2\pi \sin 2{,}7\pi \sin(-3{,}2\pi) +$
$+ \operatorname{ctg}(-2{,}3\pi)\cos(-3{,}7\pi)\cos 1{,}2\pi$.

I.316. $\cos(\alpha + 45^\circ) + \cos(\alpha + 135^\circ) + \cos(\alpha + 225^\circ) +$
$+ \cos(\alpha + 315^\circ)$.

I.317. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} + \beta\right)\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \beta\right) +$
$+ \operatorname{tg}(\pi + \beta)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)$.

I.318. $\cos(20^\circ - \alpha) + \sin(250^\circ + \alpha)$.

I.319. $\sin(112^\circ - \alpha) + \cos(\alpha + 158^\circ)$.

I.320. $\sin^2(30^\circ + \alpha) + \sin^2(240^\circ - \alpha)$.

I.321. $\dfrac{\cos(-228^\circ)\operatorname{ctg} 72^\circ}{\operatorname{tg}(-162^\circ)\sin 108^\circ} - \operatorname{tg} 18^\circ$.

I.322. $\operatorname{tg}^2 910^\circ + \sin^2(-1090^\circ) + \cos^2(-1450^\circ)$.

I.323. $\dfrac{\sin(-234^\circ) - \cos 216^\circ}{\sin 144^\circ - \cos 126^\circ} \cdot \operatorname{tg} 36^\circ$.

* * *

Пример I.324. Упростить выражение

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin(\alpha - \pi).$$

Решение. $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$. Так как $\frac{\pi}{4} - \alpha + \frac{\pi}{4} + \alpha = \frac{\pi}{2}$, то $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$. Следовательно,

$$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\alpha-\pi)=$$

$$=\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\cdot\left(-\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)+\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)=$$

$$=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\left(-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)-\sin^2\alpha=$$

$$=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha.$$

Ответ: $\cos^2\alpha$.

Пример I.325. Упростить выражение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\left(\sin\frac{5\pi}{14}-\cos\frac{\pi}{7}\right).$$

Решение. Так как $\frac{5\pi}{14}+\frac{\pi}{7}=\frac{7\pi}{14}=\frac{\pi}{2}$, то $\sin\frac{5\pi}{14}=\cos\frac{\pi}{7}$. Отсюда получаем

Ответ: 0.

Пример I.326. Известно, что

$$\operatorname{ctg}(60^\circ-2\alpha)+\operatorname{ctg}(30^\circ+2\alpha)=a.$$

Найти $\operatorname{ctg}^2(60^\circ-2\alpha)+\operatorname{ctg}^2(30^\circ+2\alpha)$.

Решение. Так как $60^\circ-2\alpha+30^\circ+2\alpha=90^\circ$, то $\operatorname{ctg}(60^\circ-2\alpha)=\operatorname{tg}(30^\circ+2\alpha)$. Тогда

$$\operatorname{ctg}^2(60^\circ-2\alpha)+\operatorname{ctg}^2(30^\circ+2\alpha)=$$

$$=(\operatorname{ctg}(60^\circ-2\alpha)+\operatorname{ctg}(30^\circ+2\alpha))^2-$$

$$-2\operatorname{ctg}(60^\circ-2\alpha)\operatorname{ctg}(30^\circ+2\alpha)=$$

$$=a^2-2\operatorname{tg}(30^\circ+2\alpha)\operatorname{ctg}(30^\circ+2\alpha)=a^2-2.$$

Ответ: a^2-2.

Упражнения

I.327. Упростить выражения:

а) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\times$
$\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$;

б) $\dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

в) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)(\operatorname{tg}^2\alpha-1)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)\sin^{-2}\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)$;

г) $\dfrac{\cos^2(20^\circ-\alpha)}{\sin^2(70^\circ+\alpha)}+\operatorname{tg}(\alpha+10^\circ)\operatorname{ctg}(80^\circ-\alpha)$;

д) $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{11}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{22}$.

I.328. Известно, что $\cos(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ-\alpha)=m$. Найти:

а) $\cos^2(45^\circ+\alpha)+\cos^2(45^\circ-\alpha)$;

б) $\cos(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ-\alpha)$.

* * *

Пример I.329. Известно, что α, β, γ — углы треугольника. Доказать, что

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Решение. Так как α, β, γ — углы треугольника, то $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$. Тогда $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{180^\circ-\gamma}{2}=$

$$=\sin\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\gamma}{2},$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

I.330. Известно, что α, β, γ — углы треугольника. Доказать:

а) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma$;

б) $\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

* * *

Пример I.331. Найти $\cos(270^\circ-\alpha)$ и $\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)$, если $\sin(180^\circ-\alpha)=0{,}3$ и $90^\circ<\alpha<180^\circ$.

Решение. $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha=0{,}3$. Тогда

$$\cos(270^\circ-\alpha)=-\sin\alpha=-0{,}3.$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Так как $90^\circ<\alpha<180^\circ$, то

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{0{,}91}.$$

Тогда $\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)=-\frac{-\sqrt{0{,}91}}{0{,}3}=\frac{\sqrt{91}}{3}$.

Ответ: $\cos(270^\circ-\alpha)=-0{,}3$; $\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)=\frac{\sqrt{91}}{3}$.

Упражнения

I.332. Найти значения выражений:

а) $\frac{1-\sin(2\alpha+1{,}5\pi)}{\sin(\pi-3\alpha)-\sin(-\alpha)}$, если $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

б) $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$, если $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$;

в) $\sin(\alpha-270^\circ)$ и $\operatorname{tg}(360^\circ-\alpha)$, если $\sin\alpha=-\frac{2}{3}$, $270^\circ<\alpha<360^\circ$;

г) $\cos(180^\circ+\alpha)$ и $\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$, $90^\circ<\alpha<180^\circ$;

д) $\cos(\alpha - 270°)$ и $\operatorname{tg}(\alpha - 180°)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 2$,

$$180° < \alpha < 270°;$$

е) $\sin(90° + \alpha)$, если $\operatorname{tg}(270° + \alpha) = -4$, $180° < \alpha < 270°$;

ж) $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$, если $\cos(180° - \alpha) = 0{,}6$, $180° < \alpha < 270°$;

з) $\dfrac{\cos(\alpha - 270°)\sin(\alpha + 270°)}{\operatorname{tg}(\alpha + 180°)}$, если

$$\sin(\alpha - 180°) = -\frac{2}{\sqrt{5}};$$

и) $\dfrac{\sin\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right)\sin(\alpha - \pi)}{\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)}$, если $\operatorname{ctg}(\alpha - \pi) = \dfrac{3}{4}$,

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

к) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) + 2\sin\dfrac{\pi}{2}}{\sin\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right)}$, если

$$\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{3}{5} \text{ и } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

л) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)\cos(\pi + \alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$, если $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $0 < \alpha < 2\pi$.

* * *

Пример I.333. Исследовать на четность функцию

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Решение. Область определения данной функции $D(f) = (-\infty; \infty)$. Так как $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$, то $f(x) = -\sin(-x) = \sin x = -f(x)$. Следовательно, данная функция нечетная.

Ответ: функция нечетная.

Упражнения

I.334. Исследовать на четность функцию:

а) $f(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$;

б) $f(x) = \operatorname{tg}(\pi - x)$;

в) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)$;

г) $f(x) = \sin\left(\frac{9\pi}{2} - 3x\right)$;

д) $f(x) = \cos\left(\frac{13\pi}{2} + x\right)$;

е) $f(x) = \operatorname{tg}(\pi - x^2)$.

3. Формулы сложения

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}.$$

Пример I.335. Упростить выражение:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$;

б) $\cos\alpha + \cos(120^\circ - \alpha) + \cos(120^\circ + \alpha)$.

Решение. *а)* Применяя формулы синуса суммы и синуса разности, получаем: $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) =$

$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha - \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha = \sin\alpha.$$

Ответ: $\sin\alpha$.

б) Применяя формулы косинуса разности, косинуса суммы, приведения, получаем:

$$\cos\alpha + \cos(120^\circ - \alpha) + \cos(120^\circ + \alpha) =$$

$$= \cos\alpha + \cos 120^\circ \cos\alpha + \sin 120^\circ \sin\alpha +$$

$$+ \cos 120^\circ \cos\alpha - \sin 120^\circ \sin\alpha = \cos\alpha + 2\cos 120^\circ \cos\alpha =$$

$$= \cos\alpha + 2\cos(180^\circ - 60^\circ)\cos\alpha =$$

$$= \cos\alpha - 2\cos 60^\circ \cos\alpha = \cos\alpha - \cos\alpha = 0.$$

Ответ: 0.

Упражнения

Упростить выражения:

I.336. $\cos(60^\circ - \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha)$.

I.337. $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

I.338. $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)$.

I.339. $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$.

I.340. $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$.

I.341. $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$.

I.342. $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

I.343. $\cos\alpha + \cos(240^\circ + \alpha) + \cos(240^\circ - \alpha)$.

I.344. $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\alpha - \sin\alpha$.

I.345. $2\cos(60^\circ - \alpha) - \sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$.

I.346. $\sqrt{2}\sin(\alpha - 45^\circ) - \sin\alpha + \cos\alpha$.

I.347. $\sqrt{3}\cos\alpha - 2\cos(\alpha - 30^\circ) + \sin\alpha$.

* * *

Пример I.348. Упростить выражение:

а) $\sin(\alpha + 45^\circ)\cos(\alpha - 45^\circ) - \cos(\alpha + 45^\circ)\sin(\alpha - 45^\circ)$;

б) $\dfrac{\sin 56^\circ \sin 124^\circ - \sin 34^\circ \cos 236^\circ}{\cos 28^\circ \cos 88^\circ + \cos 178^\circ \sin 208^\circ}$.

Решение. *а)* Заменяя данное выражение синусом разности аргументов $\alpha + 45^\circ$ и $\alpha - 45^\circ$, получаем:

$$\sin(\alpha + 45^\circ)\cos(\alpha - 45^\circ) - \cos(\alpha + 45^\circ)\sin(\alpha - 45^\circ) =$$
$$= \sin(\alpha + 45^\circ - (\alpha - 45^\circ)) = \sin(\alpha + 45^\circ - \alpha + 45^\circ) =$$
$$= \sin 90^\circ = 1.$$

Ответ: 1.

б) Применяя формулы приведения, получаем:

$$\sin 124^\circ = \sin(90^\circ + 34^\circ) = \cos 34^\circ;$$
$$\cos 236^\circ = \cos(180^\circ + 56^\circ) = -\cos 56^\circ;$$
$$\cos 178^\circ = \cos(90^\circ + 88^\circ) = -\sin 88^\circ;$$
$$\sin 208^\circ = \sin(180^\circ + 28^\circ) = -\sin 28^\circ.$$

Тогда $\dfrac{\sin 56^\circ \sin 124^\circ - \sin 34^\circ \cos 236^\circ}{\cos 28^\circ \cos 88^\circ + \cos 178^\circ \sin 208^\circ} =$

$$= \frac{\sin 56^\circ \cos 34^\circ - \sin 34^\circ \cdot (-\cos 56^\circ)}{\cos 28^\circ \cos 88^\circ - \sin 88^\circ \cdot (-\sin 28^\circ)} =$$

$$= \frac{\sin 56^\circ \cos 34^\circ + \cos 56^\circ \sin 34^\circ}{\cos 28^\circ \cos 88^\circ + \sin 28^\circ \sin 88^\circ}.$$

Следовательно, числитель дроби — синус суммы углов 56° и 34°, знаменатель — косинус разности 28° и 88°:

$$\frac{\sin 56^\circ \cos 34^\circ + \cos 56^\circ \sin 34^\circ}{\cos 28^\circ \cos 88^\circ + \sin 28^\circ \sin 88^\circ} = \frac{\sin(56^\circ + 34^\circ)}{\cos(88^\circ - 28^\circ)} =$$
$$= \frac{\sin 90^\circ}{\cos 60^\circ} = 2.$$

Ответ: 2.

Упражнения

Упростить выражения:

I.349. $\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \sin 18^\circ \cos 12^\circ$.

I.350. $\sin 65^\circ \sin 55^\circ + \cos 65^\circ \cos 55^\circ$.

I.351. $\sin 4{,}25 \cos 1{,}11 - \sin 1{,}11 \cos 4{,}25$.

I.352. $\sin \frac{3\pi}{7} \sin \frac{5\pi}{21} - \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{21}$.

I.353. $\sin \varphi \cos 2\varphi + \cos \varphi \sin 2\varphi$.

I.354. $\sin \alpha \sin (\alpha + \beta) + \cos \alpha \cos (\alpha + \beta)$.

I.355. $\sin (15^\circ + \alpha) \cos (15^\circ - \alpha) + \sin (15^\circ - \alpha) \cos (15^\circ + \alpha)$.

I.356. $\cos 17^\circ \cos 43^\circ - \sin 17^\circ \sin 43^\circ$.

I.357. $\sin 3^\circ \sin 42^\circ - \cos 3^\circ \cos 42^\circ$.

I.358. $\cos 29^\circ \cos 74^\circ + \sin 29^\circ \sin 74^\circ$.

I.359. $\cos \frac{3\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{3\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$.

I.360. $\sin \frac{3\pi}{5} \cos \frac{7\pi}{5} + \sin \frac{7\pi}{5} \cos \frac{3\pi}{5}$.

I.361. $\sin 53^\circ \cos 7^\circ - \cos 53^\circ \sin (-7^\circ)$.

I.362. $\sin (-15^\circ) \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \sin 75^\circ$.

I.363. $\cos (36^\circ + \alpha) \cos (24^\circ - \alpha) + \sin (36^\circ + \alpha) \sin (\alpha - 24^\circ)$.

I.364. $\sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

I.365. $\cos (25^\circ + \alpha) \sin (15^\circ - \alpha) + \sin (25^\circ + \alpha) \cos (15^\circ - \alpha)$.

I.366. $\sin (96^\circ - \alpha) \cos (36^\circ + \alpha) - \cos (96^\circ - \alpha) \sin (36^\circ + \alpha)$.

I.367. $\sin (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) - \sin (\alpha - \beta) \cos (\alpha + \beta)$.

I.368. $\sin 200^\circ \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cos 50^\circ$.

I.369. $\sin 113^\circ \cos 323^\circ + \cos 247^\circ \cos 307^\circ$.

I.370. $\sin 463^\circ \cos 373^\circ + \cos 823^\circ \sin 193^\circ$.

I.371. $\cos (-53^\circ) \sin (-337^\circ) + \sin 307^\circ \sin 113^\circ$.

I.372. $\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)$.

I.373. $(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 +$
$+ (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2.$

I.374. $\cos(\alpha+\beta)\sin\beta - \cos(\alpha+\gamma)\sin\gamma -$
$- \sin(\alpha+\beta)\cos\beta + \sin(\alpha+\gamma)\cos\gamma.$

I.375. $\sin(\alpha+\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) +$
$+ \sin(\alpha-\beta)(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta).$

I.376. $\cos(\alpha-\beta)(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) -$
$- \cos(\alpha+\beta)(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta).$

I.377. $-\cos 10^\circ + \cos 11^\circ\cos 21^\circ + \cos 69^\circ\cos 79^\circ.$

I.378. $\sin 20^\circ + \sin 13^\circ\sin 57^\circ - \sin 33^\circ\sin 77^\circ.$

I.379. $\dfrac{\sin 20^\circ\cos 5^\circ - \cos 20^\circ\sin 5^\circ}{\cos 10^\circ\cos 5^\circ - \sin 10^\circ\sin 5^\circ}.$

I.380. $\dfrac{\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{\pi}{15} + \sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{\pi}{15}}{\sin\frac{7\pi}{30}\cos\frac{4\pi}{15} + \cos\frac{7\pi}{30}\sin\frac{4\pi}{15}}.$

I.381. $\dfrac{\cos 18^\circ\cos 28^\circ + \cos 108^\circ\sin 208^\circ}{\sin 34^\circ\sin 146^\circ + \sin 236^\circ\sin 304^\circ}.$

I.382. $\dfrac{\sin 20^\circ\cos 10^\circ + \cos 160^\circ\cos 100^\circ}{\sin 21^\circ\cos 9^\circ + \cos 159^\circ\cos 99^\circ}.$

I.383. $\dfrac{\cos 63^\circ\cos 3^\circ - \cos 87^\circ\cos 27^\circ}{\cos 132^\circ\cos 72^\circ - \cos 42^\circ\cos 18^\circ}.$

I.384. $\dfrac{\cos 64^\circ\cos 4^\circ - \cos 86^\circ\cos 26^\circ}{\cos 71^\circ\cos 41^\circ - \cos 49^\circ\cos 19^\circ}.$

I.385. $\dfrac{\cos 66^\circ\cos 6^\circ + \cos 84^\circ\cos 24^\circ}{\cos 65^\circ\cos 5^\circ + \cos 85^\circ\cos 25^\circ}.$

I.386. $\dfrac{\sin 22^\circ\cos 8^\circ + \cos 158^\circ\cos 98^\circ}{\sin 23^\circ\cos 7^\circ + \cos 157^\circ\cos 97^\circ}.$

I.387. $\dfrac{\sin(-1{,}8\pi)\cos 0{,}3\pi + \cos 0{,}2\pi \sin(-1{,}7\pi)}{\cos 0{,}125\pi \cos\left(-\dfrac{43\pi}{24}\right) - \cos\dfrac{3\pi}{8}\sin\dfrac{5\pi}{24}}.$

I.388. $\dfrac{\sin 0{,}3\pi \cos(-2{,}8\pi) + \cos 0{,}3\pi \sin(-2{,}8\pi)}{\cos 0{,}3\pi \cos 2{,}3\pi - \sin 0{,}3\pi \sin(-4{,}3\pi)}.$

I.389. $\cos(\alpha+\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta.$

I.390. $\cos(\alpha-\beta) - 2\sin\alpha\sin\beta.$

I.391. $\sin(2x-\pi)\cos(x-3\pi) + \sin\left(2x-\dfrac{9\pi}{2}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right).$

I.392. $\sin(x+2\pi)\cos\left(2x-\dfrac{7\pi}{2}\right) +$

$$+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\sin\left(2x-\frac{5\pi}{2}\right).$$

* * *

Пример I.393. Упростить выражения:

а) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta};$

б) $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos(60^\circ+\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha};$

в) $\dfrac{\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-3x\right) - \cos(2x-5\pi)\cos\left(3x+\dfrac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)\cos 4x + \sin x\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}+4x\right)}.$

Решение. *а)* $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta} =$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = 1.$$

Ответ: 1.

б) $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos(60^\circ+\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha} =$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2(\cos 60^\circ \cos\alpha - \sin 60^\circ \sin\alpha)}{2(\sin 60^\circ \cos\alpha + \cos 60^\circ \sin\alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}\alpha$.

в) Применяя формулы приведения, получаем:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2x, \ \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right) = -\cos 3x,$$

$$\cos(2x - 5\pi) = -\cos 2x, \ \cos\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin 3x,$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \cos x, \ \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 4x\right) = -\sin 4x.$$

Тогда данная дробь принимает вид:

$$\frac{-\sin 2x \cdot (-\cos 3x) - (-\cos 2x)\sin 3x}{\cos x \cos 4x + \sin x \cdot (-\sin 4x)} =$$

$$= \frac{\sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x}{\cos x \cos 4x - \sin x \sin 4x} =$$

$$= \frac{\sin(2x + 3x)}{\cos(x + 4x)} = \frac{\sin 5x}{\cos 5x} = \operatorname{tg} 5x.$$

Ответ: $\operatorname{tg} 5x$.

Упражнения

Доказать тождества:

I.394. $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta) + \sin\beta\cos\alpha} = 1.$

I.395. $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta.$

I.396. $\dfrac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)} = \operatorname{tg}\alpha.$

I.397. $\dfrac{\sin(30^\circ+\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)}{\sin(30^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ+\alpha)} = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$

I.398. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)} = \mathrm{tg}\,(\alpha+\beta).$

I.399. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)} = \mathrm{tg}\,(\alpha-\beta).$

I.400. $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(45^\circ+\alpha)}{2\sin(45^\circ+\alpha)-\sqrt{2}\sin\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha.$

I.401. $\dfrac{\sin\alpha+2\sin(60^\circ-\alpha)}{2\cos(30^\circ-\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$

I.402. $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin(45^\circ-\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{2}.$

I.403. $\dfrac{\cos(30^\circ-\alpha)-\cos 330^\circ\cos\alpha}{\sin(30^\circ-\alpha)+\sin 120^\circ\sin\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha.$

I.404. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)} =$

$= \mathrm{tg}\,2\alpha.$

I.405. $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \mathrm{tg}\,(\alpha+\beta).$

I.406. $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin(2\alpha-\beta)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos(2\alpha+\beta)+\cos(2\alpha-\beta)-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\alpha\right)} = \mathrm{tg}\,2\alpha.$

I.407. $\dfrac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-2\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{9\pi}{2}-2\alpha\right)+2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+2\alpha\right)} = \dfrac{\mathrm{tg}\,2\alpha}{\sqrt{3}}.$

I.408. $\dfrac{\sin(2\alpha-3\pi)+2\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}+2\alpha\right)}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-2\alpha\right)+\sqrt{3}\cos(2\alpha-3\pi)} = -\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,2\alpha.$

I.409. $$\frac{\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)+2\cos\left(\frac{11\pi}{6}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha.$$

I.410. $$\frac{\cos\alpha\sin(\alpha-3)-\sin\alpha\cos(3-\alpha)}{\cos\left(3-\frac{\pi}{6}\right)-0{,}5\sin 3}+\frac{2}{3}\operatorname{tg}3=0.$$

* * *

Пример I.411. Доказать тождества:

а) $\sin\alpha-\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

б) $\cos 75^\circ\operatorname{ctg}30^\circ+\sin 75^\circ=\sqrt{2}$;

в) $$\frac{\sin\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}-\cos\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}+\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)}=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8};$$

г) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

Решение. *а)* $$\sin\alpha-\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha-\frac{\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

что и требовалось доказать.

б) $$\cos 75^\circ\operatorname{ctg}30^\circ+\sin 75^\circ=\frac{\cos 75^\circ\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}+\sin 75^\circ=$$

$$=\frac{\cos 75^\circ\cos 30^\circ+\sin 75^\circ\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\cos(75^\circ-30^\circ)}{\sin 30^\circ}=$$

$$=\frac{\cos 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{1}{2}=\sqrt{2},$$

что и требовалось доказать.

в) $$\frac{\sin\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}-\cos\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}+\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}-\cos\frac{\alpha}{4}}{-\cos\frac{\alpha}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}-\sin\frac{\alpha}{4}}=-\frac{\frac{\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}}{\sin\frac{\alpha}{8}}-\cos\frac{\alpha}{4}}{\frac{\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}}{\sin\frac{\alpha}{8}}+\sin\frac{\alpha}{4}}=$$

$$=-\frac{\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}-\cos\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{8}}{\sin\frac{\alpha}{8}}:\frac{\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}+\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{8}}{\sin\frac{\alpha}{8}}=$$

$$=-\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha}{8}\right)}{\sin\frac{\alpha}{8}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{8}}{\cos\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha}{8}\right)}=-\frac{\sin\frac{\alpha}{8}}{\cos\frac{\alpha}{8}}=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8},$$

что и требовалось доказать.

г) $$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=$$

$$=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta},$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Упростить выражения:

I.412. $\sin 6\alpha \operatorname{ctg} 3\alpha - \cos 6\alpha$.

I.413. $\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{2}$.

I.414. $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \operatorname{tg}\alpha$.

I.415. $\cos 2\alpha - \sin 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha$.

I.416. $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha$.

I.417. $\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \operatorname{tg} \alpha$.

I.418. $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha$.

I.419. $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha}$.

I.420. $\cos 4\alpha - \sin 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha$.

I.421. $\cos \dfrac{2\pi}{7} \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{7} + \sin \dfrac{2\pi}{7}$.

I.422. $\sin \dfrac{4\pi}{11} \operatorname{ctg} \dfrac{2\pi}{11} - \cos \dfrac{4\pi}{11}$.

I.423. $(\cos 8\alpha \operatorname{tg} 4\alpha - \sin 8\alpha)(\cos 8\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha + \sin 8\alpha)$.

I.424. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} - \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$.

Доказать тождества:

I.425. $1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \dfrac{\cos (\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$.

I.426. $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \dfrac{\sin (\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$.

I.427. $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \dfrac{\cos (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cos \beta}$.

I.428. $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \dfrac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$.

I.429. $\sin 15^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ \cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

I.430. $\dfrac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \dfrac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha - \beta)}$.

I.431. $\dfrac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \dfrac{\cos (\alpha - \beta)}{\cos (\alpha + \beta)}$.

I.432. $\dfrac{\cos 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha + \sin 4\alpha} = -\operatorname{tg}^2 2\alpha$.

I.433. $\dfrac{\cos \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{4}\right) - \sin \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{4}\right) \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{8}}{\sin \left(\dfrac{7\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{4}\right) + \sin \left(\dfrac{\alpha}{4} - 3\pi\right) \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{8}} = -\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{8}$.

* * *

Пример I.434. Доказать тождества:

а) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

б) $\cos^2\alpha+\cos^2(60^\circ+\alpha)+\cos^2(60^\circ-\alpha)=\frac{3}{2}$;

в) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta)$;

г) $\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos^3\beta-\cos\alpha\sin^3\beta=$
$=\sin\beta\cos\beta\cos(\alpha-\beta)$;

д) $\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta$.

Решение. *а)* $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=$

$$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=$$

$$=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta.$$

Дальнейшие действия «подсказывает» структура правой части доказываемого тождества. Она не содержит $\cos\alpha$ и $\cos\beta$. Следовательно, их требуется исключить из полученного выражения. Имеем:

$$\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta=$$

$$=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-\sin^2\beta(1-\sin^2\alpha)=$$

$$=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta,$$

что и требовалось доказать.

б) $\cos^2\alpha+\cos^2(60^\circ+\alpha)+\cos^2(60^\circ-\alpha)=$

$$=\cos^2\alpha+(\cos 60^\circ\cos\alpha-\sin 60^\circ\sin\alpha)^2+$$

$$+(\cos 60^\circ\cos\alpha+\sin 60^\circ\sin\alpha)^2=\cos^2\alpha+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)^2=$$

$$=\cos^2\alpha+\frac{1}{4}\cos^2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{3}{4}\sin^2\alpha+$$

$$+\frac{1}{4}\cos^2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{3}{4}\sin^2\alpha=\frac{3}{2}\cos^2\alpha+\frac{3}{2}\sin^2\alpha=\frac{3}{2},$$

что и требовалось доказать.

в) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta) =$

$$= \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) =$$

$$= \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta - 2\sin^2\alpha\sin^2\beta =$$

$$= \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta -$$

$$- 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta = \sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) +$$

$$+ \sin^2\beta(1-\sin^2\alpha) - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta =$$

$$= \sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\beta\cos^2\alpha - 2(\sin\alpha\cos\beta)(\sin\beta\cos\alpha) =$$

$$= (\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)^2 = \sin^2(\alpha-\beta),$$

что и требовалось доказать.

г) $\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha\cos^3\beta - \cos\alpha\sin^3\beta =$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos^3\beta - \cos\alpha\sin^3\beta =$$

$$= (\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos^3\beta) + (\cos\alpha\sin\beta - \cos\alpha\sin^3\beta) =$$

$$= \sin\alpha\cos\beta(1-\cos^2\beta) + \cos\alpha\sin\beta(1-\sin^2\beta) =$$

$$= \sin\alpha\cos\beta\sin^2\beta + \cos\alpha\sin\beta\cos^2\beta =$$

$$= \sin\beta\cos\beta(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta) = \sin\beta\cos\beta\cos(\alpha-\beta),$$

что и требовалось доказать.

д) $\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta} =$

$$= \frac{(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 + (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)^2}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta} +$$

$$+ \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta} + \frac{\sin^2\beta\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cos^2\beta} = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.435. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta.$

I.436. $\cos^2\alpha-\cos(60^\circ+\alpha)\cos(60^\circ-\alpha)=0{,}75.$

I.437. $0{,}5\sin^2\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=0{,}5\cos^2\alpha.$

I.438. $\sin^2(\alpha-30^\circ)+\sin^2(\alpha+30^\circ)-\sin^2\alpha=0{,}5.$

I.439. $\cos^2(\alpha-30^\circ)+\cos^2(\alpha+30^\circ)+\sin^2\alpha=1{,}5.$

I.440. $\sin^2(30^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)=\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha.$

I.441. $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{3}{2}.$

I.442. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha}=0.$

I.443. $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta.$

I.444. $(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta-\cos\beta)=$
$=\sin(\beta-\alpha)-\cos(\beta+\alpha).$

I.445. $\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}=\sin\alpha-\sin\beta.$

I.446. $\frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta).$

I.447. $\frac{\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)}{2\sin^2\alpha\sin^2\beta}=\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta+1.$

I.448. $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha.$

I.449. $\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)-\sin\beta\sin(\gamma+\alpha)+$
$+\sin\gamma\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma.$

I.450. $\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)-\cos\beta\cos(\gamma+\alpha)+$
$+\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta-\gamma).$

I.451. $\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin^3\beta-\cos\alpha\cos^3\beta=$
$=\sin\beta\cos\beta\sin(\alpha+\beta).$

I.452. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)=$
$=\sin^2(\alpha-\beta).$

I.453. $\sin^2\beta - \cos^2(\alpha - \beta) + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha.$

I.454. $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \beta)^2 - 2 = 2\cos(\alpha - \beta).$

I.455. $\dfrac{\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2(\alpha + \beta) - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} = -\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$

* * *

Пример I.456. Найти значение выражения:

а) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}70^\circ\operatorname{tg}65^\circ}{\operatorname{tg}70^\circ + \operatorname{tg}65^\circ}$; *б)* $\dfrac{\operatorname{ctg}40^\circ - \operatorname{tg}20^\circ}{\operatorname{ctg}40^\circ\operatorname{tg}20^\circ + 1}$.

Решение. *а)* Данная дробь есть величина, обратная тангенсу суммы углов 70° и 65°. Тогда $\dfrac{1 - \operatorname{tg}70^\circ\operatorname{tg}65^\circ}{\operatorname{tg}70^\circ + \operatorname{tg}65^\circ} =$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}(70^\circ + 65^\circ)} = \frac{1}{\operatorname{tg}135^\circ} =$$

$$= \operatorname{ctg}135^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{ctg}45^\circ = -1.$$

Ответ: −1.

б) Учитывая, что $\operatorname{ctg}40^\circ = \operatorname{tg}50^\circ$, можем применить формулу тангенса разности: $\dfrac{\operatorname{ctg}40^\circ - \operatorname{tg}20^\circ}{\operatorname{ctg}40^\circ\operatorname{tg}20^\circ + 1} =$

$$= \frac{\operatorname{tg}50^\circ - \operatorname{tg}20^\circ}{\operatorname{tg}50^\circ\operatorname{tg}20^\circ + 1} = \operatorname{tg}(50^\circ - 20^\circ) = \operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример I.457. Упростить выражение

$$\frac{\sin 90^\circ - \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)\operatorname{tg}(45^\circ + 3\alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) + \operatorname{ctg}(45^\circ - 3\alpha)} + \operatorname{tg}4\alpha.$$

Решение. Так как сумма аргументов $45^\circ + 3\alpha$ и $45^\circ - 3\alpha$ равна 90°, то $\operatorname{ctg}(45^\circ - 3\alpha) = \operatorname{tg}(45^\circ + 3\alpha)$. Тогда

$$\frac{\sin 90^\circ - \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)\operatorname{tg}(45^\circ + 3\alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) + \operatorname{ctg}(45^\circ - 3\alpha)} + \operatorname{tg}4\alpha =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)\operatorname{tg}(45^\circ + 3\alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(45^\circ + 3\alpha)} + \operatorname{tg}4\alpha =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha + 45^\circ + 3\alpha)} + \operatorname{tg} 4\alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ + 4\alpha) +$$

$$+ \operatorname{tg} 4\alpha = -\operatorname{tg} 4\alpha + \operatorname{tg} 4\alpha = 0.$$

Ответ: 0.

Упражнения

Упростить выражения:

I.458. $\dfrac{\operatorname{tg} 13^\circ + \operatorname{tg} 47^\circ}{1 - \operatorname{tg} 13^\circ \operatorname{tg} 47^\circ}$.

I.459. $\dfrac{\operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{tg} 46^\circ}{1 + \operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 46^\circ}$.

I.460. $\dfrac{1 - \operatorname{tg} 27^\circ \operatorname{tg} 33^\circ}{\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 33^\circ}$.

I.461. $\dfrac{1 + \operatorname{tg} 4^\circ \operatorname{tg} 49^\circ}{\operatorname{tg} 49^\circ - \operatorname{tg} 4^\circ}$.

I.462. $\dfrac{1 + \operatorname{tg} 2{,}4\pi \operatorname{tg} 0{,}15\pi}{\operatorname{tg} 2{,}4\pi - \operatorname{tg} 0{,}15\pi}$.

I.463. $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{9} + \operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{36}}{1 + \operatorname{tg}\dfrac{8\pi}{9}\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{36}}$.

I.464. $\dfrac{\operatorname{ctg} 78^\circ - \operatorname{ctg} 303^\circ}{1 + \operatorname{tg}(-192^\circ)\operatorname{ctg} 237^\circ}$.

I.465. $\dfrac{\operatorname{tg} 225^\circ - \operatorname{ctg} 81^\circ \operatorname{ctg} 69^\circ}{\operatorname{ctg} 261^\circ + \operatorname{tg} 201^\circ}$.

I.466. $\dfrac{\left(\sin\dfrac{4\pi}{9}\cos\dfrac{\pi}{9} - \sin\dfrac{\pi}{18}\cos\dfrac{7\pi}{18}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}\right)}{\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12} - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}}$.

I.467. $\dfrac{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)\operatorname{tg}\alpha}$.

I.468. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8} + \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8} - \alpha\right)}$.

* * *

Пример I.469. Доказать тождества:

а) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta - 1}{\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}(\alpha-\beta);$

б) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta) - \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\alpha;$

в) $\dfrac{(1+\operatorname{tg}\alpha)\sin(45^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \sin(45^\circ+\alpha).$

Решение. *а)* Применяя формулы разности квадратов, котангенса суммы и котангенса разности, получаем:

$$\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta - 1}{\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} =$$

$$= \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}(\alpha-\beta),$$

что и требовалось доказать.

б) Из формулы тангенса разности получаем

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha-\beta)(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta).$$

Тогда $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta) - \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta) - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}\beta} =$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta) - \operatorname{tg}(\alpha-\beta)(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}\beta} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)(1-1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}\beta} = \frac{-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

что и требовалось доказать.

в) $\dfrac{(1+\operatorname{tg}\alpha)\sin(45^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\alpha}\cdot\sin(45^\circ-\alpha) =$

$$= \operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)\sin(45^\circ-\alpha) = \frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos(45^\circ+\alpha)}\cdot\cos(45^\circ+\alpha) =$$

$$= \sin(45^\circ+\alpha),$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.470. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\beta} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta).$

I.471. $\operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha) + \dfrac{1 - \operatorname{ctg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha} = 0.$

I.472. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = 1.$

I.473. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) - \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 0.$

I.474. $(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) -$

$$- (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = 2.$$

I.475. $\dfrac{(1 - \operatorname{tg}\alpha)\cos(45^\circ - \alpha)}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \cos(45^\circ + \alpha).$

I.476. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = 1.$

I.477. $\dfrac{3\operatorname{ctg}^2 15^\circ - 1}{3 - \operatorname{ctg}^2 15^\circ} = \operatorname{ctg} 15^\circ.$

I.478. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\cdot(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \sin(\alpha+\beta).$

I.479. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta) - \dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta} = 0.$

I.480. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)} + 2\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{2}{\cos^2\alpha}.$

* * *

Пример I.481. Пользуясь формулами сложения, найти $\cos 15^\circ$.

Решение. $\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) =$

$$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$

Упражнения

I.482. Пользуясь формулами сложения, найти:

а) $\sin 15°$;

б) $\operatorname{tg} 15°$;

в) $\cos 75°$;

г) $\sin 75°$;

д) $\operatorname{ctg} 105°$;

е) $\cos 105°$;

ж) $\sin 105°$.

* * *

Пример I.483. Дано: $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$, $270° < \alpha < 360°$. Найти $\cos(60° + \alpha)$.

Решение. $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{15}{17}\right)^2 = 1 - \frac{225}{189} = \frac{64}{289}$. Так как $270° < \alpha < 360°$, то $\cos\alpha > 0$ и $\cos\alpha = \frac{8}{17}$. Тогда $\cos(60° + \alpha) = \cos 60° \cos\alpha - \sin 60° \sin\alpha =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{17} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{15}{17}\right) = \frac{8 + 15\sqrt{3}}{34}.$$

Ответ: $\frac{8 + 15\sqrt{3}}{34}$.

Пример I.484. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{8}{15}$, $\operatorname{ctg}\beta = -\frac{7}{24}$, $0° < \alpha < 180°$, $0° < \beta < 180°$. Найти $\sin(\alpha + \beta)$.

Решение. Так как $0° < \alpha < 180°$ и $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, то $0° < \alpha < 90°$, $\sin\alpha > 0$. $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 + \frac{64}{225} = \frac{289}{225}$,

$$\sin^2\alpha = \frac{225}{289}, \quad \sin\alpha = \frac{15}{17},$$

$$\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \sin\alpha = \frac{8}{15} \cdot \frac{15}{17} = \frac{8}{17}.$$

Так как $0° < \beta < 180°$ и $\operatorname{ctg}\beta < 0$, то $90° < \beta < 180°$, $\sin\beta > 0$. $\frac{1}{\sin^2\beta} = 1 + \operatorname{ctg}^2\beta = 1 + \frac{49}{576} = \frac{625}{576}$,

$$\sin^2\beta = \frac{576}{625}, \quad \sin\beta = \frac{24}{25},$$

$$\cos\beta = \operatorname{ctg}\beta \sin\beta = -\frac{7}{24} \cdot \frac{24}{25} = -\frac{7}{25}.$$

Следовательно, $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta =$

$$= \frac{15}{17} \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) + \frac{8}{17} \cdot \frac{24}{25} = \frac{87}{425}.$$

Ответ: $\frac{87}{425}$.

Пример I.485. Дано: $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Найти $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2} =$

$$= -\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = -\frac{5}{13},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{12}{13} : \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{5}.$$

Тогда $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\frac{12}{5} - 1}{1 + \frac{12}{5}} = \dfrac{12 - 5}{5 + 12} = \dfrac{7}{17}.$

Ответ: $\frac{7}{17}$.

Упражнения

I.486. Дано: $\sin\alpha = 0{,}6$, $\sin\beta = -0{,}28$, $0° < \alpha < 90°$, $180° < \beta < 270°$. Найти $\cos(\alpha - \beta)$.

I.487. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = -3\frac{5}{16}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{33}{56}$, $90° < \alpha < 180°$, $0° < \beta < 180°$. Найти $\cos(\alpha + \beta)$.

I.488. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $180° < \alpha < 270°$. Найти $\cos(30° - \alpha)$.

I.489. Дано: $\sin\alpha = 0{,}8$, $\sin\beta = 0{,}96$, $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$. Найти $\sin(\alpha - \beta)$.

I.490. Дано: $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, $90° < \alpha < 180°$. Найти $\sin(\alpha + 45°)$.

I.491. Дано: $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $0° < \alpha < 90°$. Найти $\sin(30° + \alpha)$.

I.492. Дано: $\cos\alpha = -0{,}6$, $180° < \alpha < 270°$. Найти $\sin(60° - \alpha)$.

I.493. Найти $\sin(\alpha + \beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{16}{63}$, $\operatorname{ctg}\beta = -1\frac{23}{33}$, $0° < \alpha < 90°$, $90° < \beta < 180°$.

I.494. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$. Найти $\operatorname{tg}(45° + \alpha)$.

I.495. Дано: $\sin\alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$, $180° < \alpha < 270°$. Найти $\operatorname{ctg}(\alpha + 45°)$.

I.496. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\beta = \frac{3}{5}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Найти $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

* * *

Пример I.497. Синусы двух острых углов треугольника равны соответственно $\frac{7}{25}$ и $\frac{4}{5}$. Найти косинус третьего угла треугольника.

Решение. Пусть α, β, γ — углы данного треугольника, $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$. Тогда $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{24}{25}$,

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \frac{3}{5},\ \gamma = 180° - (\alpha + \beta).$$

Следовательно, $\cos\gamma = \cos(180° - (\alpha + \beta)) =$

$$= -\cos(\alpha + \beta) = -(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) =$$

$$= -\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{24}{25} - \frac{7}{25}\cdot\frac{4}{5}\right) = -\frac{44}{125}.$$

Ответ: $-\frac{44}{125}$.

Упражнения

I.498. Синусы двух острых углов треугольника равны соответственно $\frac{20}{29}$ и $\frac{3}{25}$. Найти косинус внешнего угла треугольника, не смежного с двумя данными углами.

I.499. Косинусы двух углов треугольника равны соответственно $\frac{12}{13}$ и $\frac{20}{101}$. Найти синус третьего угла.

* * *

Пример I.500. Упростить выражение

$$\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ - \sin 100^\circ.$$

Решение. $\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ - \sin 100^\circ =$

$$= \sin(30^\circ - 10^\circ) + 2\sin(30^\circ + 10^\circ) - \sin(90^\circ + 10^\circ) =$$

$$= \sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ + 2\sin 30^\circ \cos 10^\circ +$$

$$+ 2\cos 30^\circ \sin 10^\circ - \cos 10^\circ = \sin 30^\circ \cos 10^\circ + \cos 30^\circ \sin 10^\circ +$$

$$+ 2 \cdot \frac{1}{2}\cos 10^\circ - \cos 10^\circ = \sin(30^\circ + 10^\circ) = \sin 40^\circ.$$

Ответ: $\sin 40^\circ$.

Пример I.501. Найти $\operatorname{tg}\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -1$.

1-й способ. Подставляя в формулу тангенса суммы $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ значения $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ и $\operatorname{tg}\alpha$, получаем уравнение для нахождения $\operatorname{tg}\beta$: $-1 = \frac{2 + \operatorname{tg}\beta}{1 - 2\operatorname{tg}\beta}$.

Тогда $2 + \operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\beta - 1$, $\operatorname{tg}\beta = 3$.

2-й способ. $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}((\alpha + \beta) - \alpha)$. Применяя формулу тангенса разности, получаем:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}((\alpha + \beta) - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{tg}\alpha} = \frac{-1 - 2}{1 - 1 \cdot 2} = 3.$$

Ответ: 3.

Пример I.502. Дано: $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=-\frac{2}{5}$, $\frac{5\pi}{6}<\alpha<\frac{4\pi}{3}$. Найти $\sin\alpha$.

Решение. $\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right)=$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$$

Так как $\frac{5\pi}{6}<\alpha<\frac{4\pi}{3}$, то

$$-\frac{4\pi}{3}<-\alpha<-\frac{5\pi}{6},\ -\pi<\frac{\pi}{3}-\alpha<-\frac{\pi}{2}.$$

Тогда $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)<0$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=-\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=-\sqrt{1-\frac{4}{25}}=-\frac{\sqrt{21}}{5}.$$

Подставляя найденное значение $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$, данное значение $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ и табличные значения в выражение для $\sin\alpha$, получаем:

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)=\frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{10}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{10}$.

Упражнения

I.503. Упростить выражение $\cos 10^\circ-2\cos 50^\circ-\cos 70^\circ$.

I.504. Дано: $\operatorname{tg}(\alpha-45^\circ)=3$. Найти $\operatorname{tg}\alpha$.

I.505. Дано: $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Найти $\sin\alpha$.

I.506. Дано: $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{5}$, $\frac{5\pi}{6}<\alpha<\frac{11\pi}{6}$. Найти $\cos\alpha$.

I.507. Дано: $\operatorname{tg}\beta=3$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=1$. Найти $\operatorname{tg}\alpha$.

I.508. Дано: $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8}+\alpha\right)=2$. Найти $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)$.

I.509. Дано: $\cos(25^\circ-\alpha)=-\frac{7}{25}$, $-125^\circ<\alpha<-100^\circ$. Найти $\sin(55^\circ-\alpha)$.

I.510. Дано: $\cos(5^\circ+\alpha)=0{,}6$, $0^\circ<\alpha<55^\circ$. Найти $\operatorname{tg}(35^\circ+\alpha)$.

I.511. Дано: $\operatorname{tg}(5^\circ+\alpha)=\frac{1}{3}$, $0^\circ<\alpha<40^\circ$. Найти $\cos(50^\circ+\alpha)$.

I.512. Дано: $\cos\alpha=\frac{1}{9}$, $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{2}{7}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$. Найти $\cos\beta$.

I.513. Дано: $\sin 10^\circ=a$. Найти $\sin 35^\circ$.

I.514. Дано: $\sin(40^\circ+\alpha)=a$, $0^\circ<\alpha<45^\circ$. Найти $\cos(70^\circ+\alpha)$.

I.515. Дано: $\sin(\alpha+\beta)=a$, $\sin(\alpha+\gamma)=b$, $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$, $0<\beta<\frac{\pi}{4}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{4}$. Найти $\sin(\beta-\gamma)$.

I.516. Найти $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-x\right)$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\frac{3}{4}$.

I.517. Дано: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=5$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=3$. Найти $\operatorname{tg}2\alpha$ и $\operatorname{tg}2\beta$.

* * *

Пример I.518. Дано: $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$. Найти $\alpha+\beta$.

Решение. Так как $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$, то $0^\circ<\alpha+\beta<180^\circ$. На интервале $(0^\circ;\ 180^\circ)$ (I и II четверти) синус принимает каждое свое значение из интервала $(0;\ 1]$ дважды, а косинус каждое свое значение из интервала $(-1;\ 1)$ — один раз. Следовательно, найдя $\cos(\alpha+\beta)$, можно определить и значение $\alpha+\beta$. Имеем

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Тогда $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{5}{\sqrt{50}} = -\frac{5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Итак, учитывая, что $0° < \alpha+\beta < 180°$, получаем

$$\alpha+\beta = 135°.$$

Ответ: $135°$.

Пример I.519. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Найти $\alpha - \beta$.

Решение. Так как $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} < -\beta < 0$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha-\beta < \frac{\pi}{2}$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (IV и I четверти) тангенс принимает каждое свое значение один раз.

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{5}{3}}{1+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{3}} = -1.$$

Учитывая, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha-\beta < \frac{\pi}{2}$, получаем $\alpha-\beta = -\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}$.

Упражнения

I.520. Дано: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{50}}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$. Доказать, что $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$.

I.521. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 5$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{2}{3}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Доказать, что $\alpha+\beta = \frac{3\pi}{4}$.

I.522. Дано: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{21}}{14}$, $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$. Найти $\alpha + \beta$.

I.523. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$, $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$. Найти $\alpha + \beta$.

I.524. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\operatorname{tg}\beta = 3$, $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$. Найти $\alpha + \beta$.

I.525. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{7}$, $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$. Найти $\alpha - \beta$.

I.526. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{8}$, $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$, $0° < \gamma < 90°$. Доказать, что $\alpha + \beta + \gamma = 45°$.

I.527. Дано: $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}$, $\sin\beta = 0{,}6$, $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$. Доказать, что $\alpha - \beta = 30°$.

I.528. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}5$, $\operatorname{tg}\beta = 3$, $90° < \alpha < 180°$, $0° < \beta < 90°$. Найти $\alpha + \beta$.

I.529. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{9}$, $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$. Найти $\alpha + \beta$.

I.530. Дано: $\sin\alpha = \frac{40}{41}$, $\sin\beta = -\frac{9}{41}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$. Найти $\alpha - \beta$.

I.531. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{4 - a}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{a - 1}{\sqrt{3}}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Доказать, что $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$.

I.532. Дано: $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{1}{3\sqrt{11}}$, $\sin\gamma = \frac{3}{\sqrt{11}}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Доказать, что $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

* * *

Пример I.533. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$; *б)* $2\sin\alpha - 5\cos\alpha$.

Решение. *а)* Представим данное выражение в виде синуса суммы. Для этого умножим и разделим данное выражение на 2: $\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = 2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$.

Обозначим $\frac{1}{2} = \sin 30°$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$. Тогда

$$\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = 2(\sin 30° \cos\alpha + \cos 30° \sin\alpha) =$$
$$= 2\sin(30° + \alpha).$$

Следовательно, наибольшее значение данного выражения равно 2 (достигается при $\sin(30° + \alpha) = 1$), наименьшее значение равно -2 (достигается при $\sin(30° + \alpha) = -1$).

Ответ: 2; -2.

б) Для представления выражения $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ в виде синуса суммы или разности умножим и разделим его на число $M = \sqrt{a^2 + b^2}$. Тогда $\frac{a}{M} = \cos\varphi$, $\frac{b}{M} = \sin\varphi$, где φ — некоторый угол. Такая замена правомерна, т.к. $\left(\frac{a}{M}\right)^2 + \left(\frac{b}{M}\right)^2 = 1$.

В данном случае $a = 2$, $b = -5$, $M = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$,

$$2\sin\alpha - 5\cos\alpha = \sqrt{29}\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\sin\alpha - \frac{5}{\sqrt{29}}\cos\alpha\right) =$$
$$= \sqrt{29}(\sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi) = \sqrt{29}\sin(\alpha - \varphi).$$

Следовательно, наибольшее значение данного выражения равно $\sqrt{29}$, а наименьшее значение равно $-\sqrt{29}$.

Ответ: $\sqrt{29}$, $-\sqrt{29}$.

Упражнения

I.534. Найти наибольшее значение выражения:

а) $\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha$;

б) $\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha$;

в) $\sin\alpha + \cos\alpha$;

г) $\sqrt{2}\sin\alpha + \sqrt{6}\cos\alpha$;

д) $3\sin\alpha + 4\cos\alpha$;

е) $3\sin\alpha + \cos\alpha$.

* * *

Пример I.535. Исключить α из системы равенств

$$\begin{cases}\cos(a+\alpha)=m,\\ \cos(a-\alpha)=n.\end{cases}$$

Решение. $(a+\alpha)+(a-\alpha)=2a$. Найдем $\cos 2a$.

$$\sin(a+\alpha)=\sqrt{1-m^2} \text{ или } \sin(a+\alpha)=-\sqrt{1-m^2},\ |m|\leqslant 1.$$

$$\sin(a-\alpha)=\sqrt{1-n^2} \text{ или } \sin(a-\alpha)=-\sqrt{1-n^2}.$$

$$\cos 2a=\cos((a+\alpha)+(a-\alpha))=$$

$$=\cos(a+\alpha)\cos(a-\alpha)-\sin(a+\alpha)\sin(a-\alpha).$$

Если $\sin(a-\alpha)\sin(a+\alpha)>0$, то

$$\cos 2a=mn-\sqrt{(1-m^2)(1-n^2)}.$$

Если $\sin(a-\alpha)\sin(a+\alpha)<0$, то

$$\cos 2a=mn+\sqrt{(1-m^2)(1-n^2)}.$$

Ответ: $\cos 2a=mn\pm\sqrt{(1-m^2)(1-n^2)}$.

Упражнения

I.536. Исключить α из системы равенств:

а) $\begin{cases}\operatorname{tg}(\alpha+x)=a,\\ \operatorname{tg}(\alpha-y)=b;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\operatorname{tg}(22{,}5^\circ+\alpha)=a,\\ \operatorname{tg}(22{,}5^\circ-\alpha)=b;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=a,\\ \operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=b;\end{cases}$

г) $\begin{cases}\sin(a+\alpha)=m,\\ \sin(a-\alpha)=n.\end{cases}$

* * *

Пример I.537. Выразить: *а)* $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$; *б)* $\sin 3\alpha$ через тригонометрические функции аргумента α.

Решение. *а)* Положив в формулах $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$ $\beta=\alpha$, получаем:

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$

Ответ: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$

б) $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha.$

Далее воспользуемся выражениями для $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, полученными выше:

$$\sin 3\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha =$$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha =$$

$$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha =$$

$$= 3\sin\alpha - 3\sin^3\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Ответ: $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$

Пример I.538. Выразить $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ через тригонометрические функции аргументов α, β, γ.

Решение. $\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos((\alpha + \beta) + \gamma) =$

$$= \cos(\alpha + \beta)\cos\gamma - \sin(\alpha + \beta)\sin\gamma =$$

$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\cos\gamma -$$

$$- (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\sin\gamma =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma -$$

$$- \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Ответ: $\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma -$
$- \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

Упражнения

I.539. Выразить через тригонометрические функции аргумента α: *а)* $\operatorname{tg} 2\alpha$; *б)* $\cos 3\alpha$; *в)* $\operatorname{tg} 3\alpha$.

I.540. Выразить через тригонометрические функции аргументов α, β, γ:

а) $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$; *б)* $\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma)$.

I.541. Доказать, что

$$\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha.$$

* * *

4. Формулы двойного и тройного аргументов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Пример I.542. Выразить данные тригонометрические функции через функции вдвое меньшего аргумента:

а) $\sin\alpha$;

б) $\sin 4\alpha$;

в) $\cos 5\alpha$;

г) $\cos\frac{\alpha}{2}$;

д) $\sin\frac{3\alpha}{4}$;

е) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$;

ж) $\operatorname{tg}\left(4\alpha - \frac{\beta}{3}\right)$.

Решение. *а)* $\alpha = 2\cdot\frac{\alpha}{2}$; $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$;

б) $4\alpha = 2\cdot 2\alpha$; $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$;

в) $5\alpha = 2\cdot\frac{5\alpha}{2}$; $\cos 5\alpha = \cos^2\frac{5\alpha}{2} - \sin^2\frac{5\alpha}{2}$;

г) $\frac{\alpha}{2} = 2\cdot\frac{\alpha}{4}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{4} - \sin^2\frac{\alpha}{4}$;

д) $\frac{3\alpha}{4} = 2\cdot\frac{3\alpha}{8}$; $\sin\frac{3\alpha}{4} = 2\sin\frac{3\alpha}{8}\cos\frac{3\alpha}{8}$;

е) $\frac{\pi}{3} + \alpha = 2\cdot\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)$; $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \dfrac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)}$;

ж) $4\alpha - \frac{\beta}{3} = 2\cdot\left(2\alpha - \frac{\beta}{6}\right)$; $\operatorname{tg}\left(4\alpha - \frac{\beta}{3}\right) = \dfrac{2\operatorname{tg}\left(2\alpha - \frac{\beta}{6}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(2\alpha - \frac{\beta}{6}\right)}$.

Упражнения

I.543. Выразить данные тригонометрические функции через функции вдвое меньшего аргумента:

а) $\cos\alpha$;

б) $\sin 3\alpha$;

в) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$;

г) $\sin 10\alpha$;

д) $\cos 6\alpha$;

е) $\operatorname{tg} 7\alpha$;

ж) $\sin(\alpha + \beta)$;

з) $\cos 1$;

и) $\sin 8\alpha$;

к) $\operatorname{tg} 54°$;

л) $\sin\left(\frac{2x}{3} - 30°\right)$;

м) $\cos\left(\frac{2\pi}{7} + x\right)$;

н) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 4\gamma\right)$;

о) $\operatorname{tg} 6\alpha$;

п) $\sin\frac{x}{3}$;

р) $\cos\frac{x}{5}$.

* * *

Пример I.544. Упростить выражения:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$;

б) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$;

в) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}}$;

г) $\dfrac{\sin^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\sin 2\alpha}$;

д) $\dfrac{\cos 70°}{\cos 35° + \sin 35°}$;

е) $\dfrac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Решение. *а)* Применяя формулу синуса двойного аргумента $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, получаем:

$$\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha} = \sin\alpha.$$

Ответ: $\sin\alpha$.

б) Применяя формулу косинуса двойного аргумента $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, получаем: $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha =$

$$= 2\cos^2\alpha - (2\cos^2\alpha - 1) = 2\cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = 1.$$

Ответ: 1.

в) Применяя формулы косинуса двойного аргумента $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ и разности квадратов, получаем:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}} = -\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $-\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

г) Применяя формулу синуса двойного аргумента и выражая тангенс через синус и косинус, получаем:

$$\frac{\sin^2\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

д) Применяя формулу косинуса двойного аргумента для угла 70°, получаем:

$$\frac{\cos 70^\circ}{\cos 35^\circ + \sin 35^\circ} = \frac{\cos^2 35^\circ - \sin^2 35^\circ}{\cos 35^\circ + \sin 35^\circ} =$$

$$= \frac{(\cos 35^\circ - \sin 35^\circ)(\cos 35^\circ + \sin 35^\circ)}{\cos 35^\circ + \sin 35^\circ} = \cos 35^\circ - \sin 35^\circ.$$

Ответ: $\cos 35^\circ - \sin 35^\circ$.

е) Применя формулу синуса двойного аргумента для угла α, получаем: $\dfrac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Ответ: $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Упражнения

I.545. Упростить выражения:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$;

б) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$;

в) $\cos 2\alpha + \sin^2\alpha$;

г) $\dfrac{\sin 50^\circ}{2\cos 25^\circ}$;

д) $\dfrac{\sin 80^\circ}{\cos 40^\circ}$;

е) $\dfrac{\cos 44^\circ + \sin^2 22^\circ}{\cos^2 22^\circ}$;

ж) $\dfrac{\sin\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$;

з) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$;

и) $1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{4}$;

к) $2\cos^2\dfrac{11\alpha}{2} - 1$;

л) $\cos 4\beta + \sin^2 2\beta$;

м) $2\sin 20^\circ\cos 20^\circ$;

н) $\cos^2 10\varphi - \sin^2 10\varphi$;

о) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha\operatorname{tg}\alpha}$;

п) $\cos 6\alpha + 2\sin^2 3\alpha$.

* * *

Пример I.546. Упростить выражения:

а) $\dfrac{1 + \sin 2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}$;

б) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$;

в) $\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$;

г) $1 - 8\sin^2\beta\cos^2\beta$.

Решение. *а)* $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2} =$

$$= \frac{1+\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{1+\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = 1.$$

Ответ: 1.

б) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \cos 2\alpha.$

Ответ: $\cos 2\alpha$.

в) Из тождества $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ следует

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

Тогда, применяя дважды это равенство, имеем:

$$\sin\alpha\cos\alpha\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 4\alpha = \frac{1}{4}\sin 4\alpha.$$

Ответ: $\frac{1}{4}\sin 4\alpha$.

г) $1 - 8\sin^2\beta\cos^2\beta = 1 - 2\cdot 4\sin^2\beta\cos^2\beta =$

$$= 1 - 2\sin^2 2\beta = \cos 4\beta.$$

Ответ: $\cos 4\beta$.

Упражнения

I.547. Упростить выражения:

а) $(\sin\varphi - \cos\varphi)^2 + \sin 2\varphi$;

б) $\frac{1}{8} - \cos^2\gamma + \cos^4\gamma$;

в) $\dfrac{(\cos 0{,}75\alpha - \sin 0{,}75\alpha)^2}{1 - \sin 1{,}5\alpha}$;

г) $\dfrac{1 - \sin 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$;

д) $2\sin^2(45^\circ + 1{,}5\alpha) - 1$;

е) $4\sin^4\alpha + \sin^2 2\alpha$;

ж) $\left(\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\right)$;

з) $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$;

и) $\cos^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$;

к) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$;

л) $\cos^4\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

м) $\frac{\sin 4\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}$;

н) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha}$;

о) $\frac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$;

п) $\frac{4\sin^4\frac{\alpha}{4}}{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}$;

р) $\cos^2 2\alpha+4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

с) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

т) $\sin^2(\beta-45^\circ)-\cos^2(\beta-45^\circ)$;

у) $\frac{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)}$;

ф) $4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha$;

х) $4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\sin(270^\circ-\alpha)$.

* * *

Пример I.548. Вычислить:

а) $\cos^2 15° - \cos^2 75°$;

б) $2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\left(\cos^2\frac{\pi}{24} - \sin^2\frac{\pi}{24}\right)$;

в) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}$.

Решение. *а)* Заменяя по формулам приведения $\cos 75° = \sin 15°$, получаем: $\cos^2 15° - \cos^2 75° =$

$$= \cos^2 15° - \sin^2 15° = \cos(2 \cdot 15°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) Применяя формулы синуса и косинуса двойного аргумента к углу $\frac{\pi}{24}$, получаем:

$$2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\left(\cos^2\frac{\pi}{24} - \sin^2\frac{\pi}{24}\right) = \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}.$$

Теперь применим формулу синуса двойного аргумента к углу $\frac{\pi}{12}$: $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

в) Применяя формулу тангенса двойного аргумента, получаем: $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}} = 2 \cdot \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}} = \dfrac{2}{\operatorname{tg}\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right)} = \dfrac{2}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = 2.$

Ответ: 2.

Упражнения

I.549. Вычислить:

а) $2\sin 15° \cos 15°$;

б) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$;

в) $\dfrac{2\operatorname{tg} 75°}{1 - \operatorname{tg}^2 75°}$;

г) $1 - 2\sin^2 15°$;

д) $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$;

е) $\sin 22°30' \cos 22°30'$;

ж) $\cos^2 22°30' - \sin^2 22°30'$;

з) $\frac{\operatorname{tg} 22°30'}{1 - \operatorname{tg}^2 22°30'}$;

и) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}}{3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}$;

к) $\sin 75° \sin 15°$;

л) $\sqrt{2}\left(\sin^4\frac{\pi}{8} - \cos^4\frac{\pi}{8}\right)$;

м) $\sin 75° \cos 75°$;

н) $\frac{1 - 2\sin^2 22{,}5°}{2\cos^2 15° - 1}$;

о) $\sin^4\frac{3\pi}{8} - \cos^4\frac{3\pi}{8}$;

п) $\frac{2\operatorname{tg} 165°}{1 - \operatorname{tg}^2 165°}$;

р) $8\sin^2\frac{15\pi}{16}\cos^2\frac{17\pi}{16} - 1$;

с) $\sin^4\frac{23\pi}{12} - \cos^4\frac{13\pi}{12}$.

* * *

Пример I.550. Упростить выражения:

а) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$;

в) $\frac{2\sin 4\alpha\,(1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha)}{1 + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}$;

г) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - 6}{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2}$.

Решение. а) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} =$

$$= \frac{\sin 3\alpha\cos\alpha - \cos 3\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 2.$$

Ответ: 2.

б) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} =$

$$= \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= -\frac{2\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = -\frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -2\operatorname{ctg} 2\alpha.$$

Ответ: $-2\operatorname{ctg} 2\alpha$.

в) $$\frac{2\sin 4\alpha\,(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)}{1+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)} = \frac{2\sin 4\alpha\,(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha} =$$

$$= \frac{2\sin 4\alpha\,(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)}{\frac{1}{\cos^2 2\alpha}} = 2\sin 4\alpha\,(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)\cos^2 2\alpha =$$

$$= 2\sin 4\alpha\,(\cos^2 2\alpha - \operatorname{tg}^2 2\alpha\cos^2 2\alpha) =$$

$$= 2\sin 4\alpha\left(\cos^2 2\alpha - \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\cdot\cos^2 2\alpha\right) =$$

$$= 2\sin 4\alpha\,(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha) = 2\sin 4\alpha\cos 4\alpha = \sin 8\alpha.$$

Ответ: $\sin 8\alpha$.

г) $$\frac{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - 6}{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2} = \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 + \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 - 6}{(\operatorname{tg}^2\alpha + 1) + (\operatorname{ctg}^2\alpha + 1)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} - 8}{\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha}} = \frac{\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{1 - 2\cdot 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} : \frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{1 - 2\sin^2 2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2 2\alpha = \cos 4\alpha.$$

Ответ: $\cos 4\alpha$.

Упражнения

Упростить выражения:

I.551. $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$.

I.552. $\dfrac{\cos 3\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\sin 3\alpha}{\cos\alpha}$.

I.553. $\dfrac{\sin 9\alpha}{\sin 3\alpha} - \dfrac{\cos 9\alpha}{\cos 3\alpha} - 2$.

I.554. $\dfrac{\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha} - \dfrac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha} + 2$.

I.555. $\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$.

I.556. $\dfrac{2\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$.

I.557. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}$.

I.558. $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$.

I.559. $(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)^2(1 - 2\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{ctg}4\alpha)$.

I.560. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$.

I.561. $\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{3} - \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{3}\right)\operatorname{tg}\dfrac{2\alpha}{3}$.

I.562. $\operatorname{tg} 0{,}5\alpha + \operatorname{ctg} 0{,}5\alpha$.

I.563. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$.

I.564. $\dfrac{1}{1 + \operatorname{ctg}\alpha} - \dfrac{1}{1 - \operatorname{ctg}\alpha}$.

I.565. $\dfrac{2\operatorname{tg} 1{,}5\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 1{,}5\alpha}$.

I.566. $\dfrac{\operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha)}{\operatorname{ctg}^2(45^\circ - \alpha) - 1}$.

I.567. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$.

Доказать тождества:

I.568. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha\,(\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha)} = \dfrac{1}{4}$.

I.569. $\dfrac{4\operatorname{tg}\alpha\,(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)^2} = \sin 4\alpha$.

I.570. $\dfrac{\sin^2 3\alpha}{\sin^2\alpha} - \dfrac{\cos^2 3\alpha}{\cos^2\alpha} = 8\cos 2\alpha$.

I.571. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha} + \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{1}{\cos 2\alpha}$.

I.572. $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = -\dfrac{1}{4}\sin^2\alpha$.

I.573. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg} 2\alpha} - \cos 8\alpha\operatorname{ctg} 4\alpha = \sin 8\alpha$.

I.574. $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha} = \cos 4\alpha$.

I.575. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1}{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha - \dfrac{5\pi}{4}\right) + 1} = -\sin 4\alpha$.

I.576. $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \sin 2\alpha$.

I.577. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \cos 2\alpha$.

I.578. $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 4$.

I.579. $\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ = 2\operatorname{tg} 20^\circ$.

I.580. $\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$.

I.581. $(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha)\sin 2\alpha = 1$.

I.582. $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$

I.583. $\dfrac{2}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\cos 2\alpha.$

I.584. $1-\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha.$

I.585. $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-\dfrac{1}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos 2\alpha}.$

I.586. $\dfrac{4\operatorname{tg}\alpha\,(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-6\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}=\operatorname{tg}4\alpha.$

* * *

Пример I.587. Упростить выражение

$$\frac{\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}.$$

Решение. $\dfrac{\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}=$

$$=\frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha+4(\sin^2\alpha-1)}=\frac{4\sin^2\alpha(\cos^2\alpha-1)}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-4\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{4\sin^2\alpha(-\sin^2\alpha)}{4\cos^2\alpha(\sin^2\alpha-1)}=-\frac{4\sin^4\alpha}{4\cos^2\alpha(-\cos^2\alpha)}=\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{tg}^4\alpha$.

Упражнения

Упростить выражения:

I.588. $\dfrac{\sin^2 2\alpha-4\cos^2\alpha}{\sin^2 2\alpha+4\cos^2\alpha-4}.$

I.589. $\dfrac{\sin^2 2\alpha+4\sin^4\alpha-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4-\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}.$

I.590. $\dfrac{\sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha - 4 + 4\sin^4\alpha}$.

I.591. $\dfrac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha}$.

I.592. $\dfrac{4\cos^2(\alpha - \pi) - 4\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right) + 3\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{2} - \alpha\right)}{4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\dfrac{7\pi}{2} - \alpha\right)}$.

I.593. $\dfrac{\sin^2(3\pi - 4\alpha) + 4\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) - 4}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - 4\alpha\right) - 4\cos^2\left(2\alpha - \dfrac{5\pi}{2}\right)}$.

I.594. $\dfrac{\sin^2(\alpha - \pi) - 4\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha - \dfrac{5\pi}{2}\right) - 4 + 4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

* * *

Пример I.595. Доказать тождество

$$\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha.$$

Решение. $\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$

$$= \frac{\sin\alpha\,(2\cos^2\alpha - 1)}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.596. Доказать тождество

$$2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin^2\alpha\sin^2\beta - 1 = \cos 2\alpha\cos 2\beta.$$

Решение. $2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin^2\alpha\sin^2\beta - 1 =$

$$= 2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin^2\alpha\sin^2\beta - (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) =$$

$$= 2\cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\alpha =$$

$$= \cos^2\alpha\,(2\cos^2\beta - 1) + \sin^2\alpha\,(2\sin^2\beta - 1) =$$

$$= \cos^2\alpha \cos 2\beta - \sin^2\alpha \cos 2\beta = \cos 2\beta\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$$

$$= \cos 2\beta \cos 2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.597. Доказать тождество

$$8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1 = \cos 4\alpha.$$

Решение. $8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1 = 8\cos^2\alpha\,(\cos^2\alpha - 1) + 1 =$

$$= 1 - 8\cos^2\alpha \sin^2\alpha = 1 - 2\cdot 4\cos^2\alpha \sin^2\alpha =$$

$$= 1 - 2\sin^2 2\alpha = \cos 4\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.598. $\operatorname{ctg}\alpha - \sin 2\alpha = \cos 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha.$

I.599. $8\sin^4\alpha - 8\sin^2\alpha + 1 = \cos 4\alpha.$

I.600. $\cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha = \cos 4\alpha.$

I.601. $$\frac{\cos^2\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)\right)\sin\alpha} = 4\cos 2\alpha.$$

I.602. $$\frac{\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} - \frac{\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta} = \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta}{2\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)}.$$

I.603. $$\frac{\cos 2\alpha + 1 - \cos^2\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

I.604. $$\frac{2\sin(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha}{2\cos\alpha + 1 + \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \sin\alpha.$$

I.605. $$\frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} - \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = 0.$$

I.606. $$\frac{\sin(180^\circ-\alpha)\cos(360^\circ-\alpha)}{\cos^2(180^\circ+\alpha)-\cos^2(270^\circ-\alpha)}-$$
$$-\frac{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)}{\operatorname{tg}^2(180^\circ-\alpha)-1}=\operatorname{tg}2\alpha.$$

I.607. $1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha.$

I.608. $$\frac{1}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}-\frac{(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2}{4\operatorname{tg}^2\alpha}=1.$$

I.609. $$\frac{\cos 2\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}-\frac{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}=0.$$

I.610. $1-\cos\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}=1.$

I.611. $\left(\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)\sin 2\alpha=4\sin\alpha.$

I.612. $\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$

I.613. $\cos^2\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{3\pi-\alpha}{2}=\cos\alpha.$

I.614. $$\frac{4\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(2\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-\operatorname{tg}^2\left(2\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)}-1=-\cos^2 4\alpha.$$

* * *

Пример I.615. Упростить выражение

$$\frac{2\cos^2\alpha-1}{4\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}.$$

Решение. Так как сумма аргументов $\frac{\pi}{4}-\alpha$ и $\frac{\pi}{4}+\alpha$ равна $\frac{\pi}{2}$, то $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. Тогда

$$\frac{2\cos^2\alpha - 1}{4\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)} = \frac{2\cos^2\alpha - 1}{4\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{4\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = \frac{\cos 2\alpha}{4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}.$$

Применив формулу синуса двойного аргумента к углу $\frac{\pi}{4}-\alpha$, получаем $\dfrac{\cos 2\alpha}{4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} =$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)} = \frac{\cos 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример I.616. Доказать тождество

$$\frac{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\mathrm{tg}\,(2\pi-2\alpha)}{\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)-\mathrm{tg}\,\alpha} - 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) =$$

$$= 2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right).$$

Решение.

$$\frac{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\mathrm{tg}\,(2\pi-2\alpha)}{\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)-\mathrm{tg}\,\alpha} - 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) =$$

$$= \frac{-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot(-\mathrm{tg}\,2\alpha)}{\mathrm{tg}\,2\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha} - 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}}{\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} -$$

$$- \sqrt{3}\cos 2\alpha = \frac{\sin\alpha \sin 2\alpha}{\cos\alpha \cos 2\alpha} : \frac{\sin 2\alpha \cos\alpha - \cos 2\alpha \sin\alpha}{\cos 2\alpha \cos\alpha} -$$

$$- \sqrt{3}\cos 2\alpha = \frac{\sin\alpha \sin 2\alpha}{\cos\alpha \cos 2\alpha} : \frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha \cos\alpha} - \sqrt{3}\cos 2\alpha =$$

$$= \frac{\sin\alpha \sin 2\alpha}{\cos\alpha \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos 2\alpha \cos\alpha}{\sin\alpha} - \sqrt{3}\cos 2\alpha =$$

$$= \sin 2\alpha - \sqrt{3}\cos 2\alpha = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha\right) =$$

$$= 2\left(\sin 2\alpha \cos\frac{\pi}{3} - \cos 2\alpha \sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right),$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Упростить выражения:

I.617. $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

I.618. $(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ)(\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)$.

I.619. $(\sin(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha)) \times$
$\times (\cos(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ - \alpha))$.

I.620. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)\right)^2 - \cos 4\alpha$.

I.621. $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$.

I.622. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\sin 3\alpha \cos\alpha - \cos 3\alpha \sin\alpha}$.

I.623. $\dfrac{2\sin^2 4\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} + 4\alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4} - 4\alpha\right)}$.

I.624. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4} - 4\alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{4} + 4\alpha\right)}{1 - 2\cos^2 4\alpha}$.

Доказать тождества:

I.625. $\operatorname{tg}(\alpha + 45^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ) - 2\operatorname{tg} 2\alpha = 0$.

I.626. $\dfrac{\sin(180^\circ + \alpha)}{4\sin\left(20^\circ + \dfrac{\alpha}{4}\right)\sin\left(70^\circ - \dfrac{\alpha}{4}\right)} = \cos\left(40^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

I.627. $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi + 2\alpha)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} +$

$$+ 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right).$$

* * *

Пример I.628. Доказать тождество

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \frac{3\cos^2 2\alpha + 1}{4}.$$

Решение. Применив формулу суммы кубов, получаем:

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) =$$

$$= \sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Выделяя в выражении $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$ квадрат разности, а затем применяя формулы косинуса и синуса двойного аргумента, имеем: $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha =$

$$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 + \sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= \cos^2 2\alpha + \frac{1}{4}\cdot 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \cos^2 2\alpha + \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha =$$

$$= \frac{4\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{4} = \frac{4\cos^2 2\alpha + 1 - \cos^2 2\alpha}{4} = \frac{3\cos^2 2\alpha + 1}{4},$$

что и требовалось доказать.

Пример I.629. Доказать тождество

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}+4\alpha\right)-\sin^6\left(\frac{5\pi}{2}+2\alpha\right)+\cos^6\left(\frac{7\pi}{2}-2\alpha\right)=$$
$$=\frac{1}{8}\sin 8\alpha\sin 4\alpha.$$

Решение.

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}+4\alpha\right)-\sin^6\left(\frac{5\pi}{2}+2\alpha\right)+\cos^6\left(\frac{7\pi}{2}-2\alpha\right)=$$
$$=\cos 4\alpha-\cos^6 2\alpha+\sin^6 2\alpha=\cos 4\alpha-(\cos^6 2\alpha-\sin^6 2\alpha)=$$
$$=\cos 4\alpha-(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha)\times$$
$$\times(\cos^4 2\alpha+\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha+\sin^4 2\alpha)=$$
$$=\cos 4\alpha-\cos 4\alpha((\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha)^2-\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha)=$$
$$=\cos 4\alpha-\cos 4\alpha\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 4\alpha\right)=$$
$$=\cos 4\alpha-\cos 4\alpha+\frac{1}{4}\sin^2 4\alpha\cos 4\alpha=$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\sin 4\alpha\cdot 2\sin 4\alpha\cos 4\alpha=\frac{1}{8}\sin 4\alpha\sin 8\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.630. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\dfrac{5+3\cos 4\alpha}{8}.$

I.631. $\sin^6\dfrac{\alpha}{2}-\cos^6\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin^2\alpha-4}{4}\cos\alpha.$

I.632. $\cos^6\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin^6\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)-$
$$-\frac{3}{4}\left(\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)\right)^2=\frac{1}{4}.$$

I.633. $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha\,(3+\cos 4\alpha)}{4}.$

Пример I.634. Упростить выражение

$$\sqrt{\frac{\sin 4\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} + 1,$$

если $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$.

Решение. Преобразуя выражение, стоящее под знаком корня, имеем: $\sqrt{\frac{\sin 4\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} + 1 =$

$$= \sqrt{\frac{\sin 4\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} + 1 =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin 4\alpha}{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} + 1 =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin 4\alpha \sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} + 1 =$$

$$= \sqrt{\frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} + 1 =$$

$$= \frac{\sqrt{\sin^2 2\alpha}}{\sin 2\alpha} + 1 = \frac{|\sin 2\alpha|}{\sin 2\alpha} + 1.$$

Так как $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$, то $\frac{3\pi}{2} < 2\alpha < 2\pi$ и $\sin 2\alpha < 0$. Тогда

$$\frac{|\sin 2\alpha|}{\sin 2\alpha} + 1 = \frac{-\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha} + 1 = 0.$$

Ответ: 0.

Упражнения

Упростить выражения:

I.635. $\sqrt{(\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha)\cos 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$, если $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

I.636. $\sqrt{(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)\, 2\operatorname{ctg} 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + 2$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.

I.637. $\sqrt{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}$, если $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

I.638. $\sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}}$, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$.

I.639. $\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(\operatorname{ctg}^2\alpha+1)}\,\sin 2\alpha$, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$.

* * *

Пример I.640. Дано: $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{8}{17}$, $\sin\frac{\alpha}{2}>0$. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

Решение. Так как $\cos\frac{\alpha}{2}<0$ и $\sin\frac{\alpha}{2}>0$, то $\frac{\alpha}{2}$ — угол II четверти. $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{1-\frac{64}{289}}=\frac{15}{17}$.

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cdot\frac{15}{17}\cdot\left(-\frac{8}{17}\right)=-\frac{240}{289}.$$

$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=2\cdot\frac{64}{289}-1=-\frac{161}{289}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{240}{289}:\left(-\frac{161}{289}\right)=\frac{240}{161}.$$

Ответ: $\sin\alpha=-\frac{240}{289}$, $\cos\alpha=-\frac{161}{289}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{240}{161}$.

Пример I.641. Дано: $\operatorname{tg}\beta=2$. Найти $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\beta\right)$.

Решение. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\beta\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}2\beta}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}2\beta}=\frac{1-\operatorname{tg}2\beta}{1+\operatorname{tg}2\beta}$.

$$\operatorname{tg}2\beta=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{4}{1-4}=-\frac{4}{3}.$$

Тогда $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\beta\right)=\frac{1+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}}=-7$.

Ответ: -7.

Пример I.642. Дано: $\sin\gamma = \frac{1}{3}$. Найти $\cos 4\gamma$.

Решение. $\cos 2\gamma = 1 - 2\sin^2\gamma = 1 - 2\cdot\frac{1}{9} = \frac{7}{9}$,

$$\cos 4\gamma = 2\cos^2 2\gamma - 1 = 2\cdot\frac{49}{81} - 1 = \frac{17}{81}.$$

Ответ: $\frac{17}{81}$.

Пример I.643. Дано: $\cos\alpha = \frac{2n}{n^2+1}$. Найти $\sin 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Решение. $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{4n^2}{(n^2+1)^2} =$

$$= \frac{n^4 + 2n^2 + 1 - 4n^2}{(n^2+1)^2} = \frac{n^4 - 2n^2 + 1}{(n^2+1)^2} = \frac{(n^2-1)^2}{(n^2+1)^2}.$$

Следовательно, $\sin\alpha = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ или $\sin\alpha = \frac{1-n^2}{n^2+1}$. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{n^2-1}{n^2+1} : \frac{2n}{n^2+1} = \frac{n^2-1}{2n} \text{ или } \operatorname{tg}\alpha = \frac{1-n^2}{2n}.$$

Если $\sin\alpha = \frac{n^2-1}{n^2+1}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{n^2-1}{2n}$, то:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{n^2-1}{n^2+1}\cdot\frac{2n}{n^2+1} = \frac{4n(n^2-1)}{(n^2+1)^2};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 2\cdot\frac{n^2-1}{2n} : \left(1 - \frac{(n^2-1)^2}{4n^2}\right) =$$

$$= \frac{n^2-1}{n} : \frac{4n^2 - n^4 + 2n^2 - 1}{4n^2} = \frac{4n(n^2-1)}{6n^2 - n^4 - 1}.$$

Если $\sin\alpha = \frac{1-n^2}{n^2+1}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-n^2}{2n}$, то

$$\sin 2\alpha = \frac{4n(1-n^2)}{(n^2+1)^2}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4n(1-n^2)}{6n^2 - n^4 - 1}.$$

Ответ: $\sin 2\alpha = \dfrac{4n(n^2-1)}{(n^2+1)^2}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{4n(n^2-1)}{6n^2-n^4-1}$ или

$\sin 2\alpha = \dfrac{4n(1-n^2)}{(n^2+1)^2}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{4n(1-n^2)}{6n^2-n^4-1}$.

Упражнения

I.644. Дано: $\sin\alpha = 0{,}96$, $0° < \alpha < 90°$. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

I.645. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}4$, $90° < \alpha < 180°$. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$.

I.646. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = -2$. Найти $\operatorname{tg} 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 4\alpha$.

I.647. Дано: $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{6} = 0{,}5$. Найти $\operatorname{tg}\left(45° - \dfrac{\varphi}{3}\right)$.

I.648. Дано: $\cos\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}1$. Найти $\cos\alpha$.

I.649. Дано: $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

I.650. Дано: $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{7}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1}{2}$. Найти $\operatorname{tg}(\beta - \alpha)$.

I.651. Дано: $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\sin\beta = \dfrac{1}{2}$, $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$. Найти $\sin(2\alpha + 2\beta)$.

I.652. Дано: $\sin\alpha = 0{,}8$, $\cos\beta = -\dfrac{5}{13}$, $90° < \alpha < 180°$, $90° < \beta < 180°$. Найти:

а) $\sin(\alpha + 2\beta)$; *б)* $\cos(2\alpha - \beta)$; *в)* $\operatorname{tg}(2(\alpha - \beta))$.

I.653. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}75$, $\operatorname{tg}\beta = 2{,}4$, $90° < \alpha < 180°$, $0° < \beta < 90°$. Найти: *а)* $\sin(\alpha - 2\beta)$; *б)* $\cos(2\alpha + \beta)$.

I.654. Дано: $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}$, $a > 0$, $b > 0$, α не является углом первой четверти. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

* * *

Пример I.655. Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$. Найти $\sin 2\alpha$.

Решение. Возведя обе части данного равенства в квадрат, имеем: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{1}{4}$, $\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{4}$,

$$1 + \sin 2\alpha = \frac{1}{4}, \quad \sin 2\alpha = -\frac{3}{4}.$$

Ответ: $-\frac{3}{4}$.

Пример I.656. Дано: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = a$. Найти $\dfrac{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \sin\alpha}$.

Решение. $$\frac{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - a}{1 + a}.$$

Ответ: $\frac{1 - a}{1 + a}$.

Пример I.657. Вычислить

$$\sin^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}.$$

Решение. $\cos^4\frac{3\pi}{8} = \cos^4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin^4\frac{\pi}{8}$,

$$\sin^4\frac{5\pi}{8} = \sin^4\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \cos^4\frac{\pi}{8},$$

$$\cos^4\frac{7\pi}{8} = \cos^4\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \cos^4\frac{\pi}{8}.$$

Следовательно, $\sin^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} =$

$$= 2\left(\sin^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{\pi}{8}\right) = 2\left(\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}\right) =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2}\cdot 4\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2 - \sin^2\frac{\pi}{4} = 2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Упражнения

I.658. Дано: $\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = 1{,}4$. Найти $\sin\alpha$.

I.659. Вычислить $\frac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}$, если $\cos\alpha = \frac{1}{5}$.

I.660. Вычислить $\cos^4\frac{\alpha}{2} - \sin^4\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -\frac{13}{14}$, $900° < \alpha < 990°$.

I.661. Вычислить $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - 2\alpha\right)\cos(3\pi - \alpha)\sin\alpha$ при $\alpha = \frac{3\pi}{16}$.

I.662. Вычислить $\operatorname{ctg} 7{,}5° + \operatorname{tg} 67{,}5° - \operatorname{tg} 7{,}5° - \operatorname{ctg} 67{,}5°$.

I.663. Дано: $\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) = -\frac{1}{9}$, $\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) = \frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Найти $\cos(\alpha + \beta)$.

I.664. Вычислить $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{18}} - \frac{\sqrt{3}}{\cos\frac{\pi}{18}}$.

* * *

Пример I.665. Доказать тождество

$$\frac{4\sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ} = 1.$$

Решение. Применяя формулы приведения, получаем:

$$\frac{4\sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{4\sin 20^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ}{\sin 80^\circ}.$$

Далее, дважды применив формулу синуса двойного аргумента, получаем: $\frac{4\sin 20^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ}{\sin 80^\circ} =$

$$= \frac{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.666. Доказать тождество

$$\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha = \frac{\sin 32\alpha}{32\sin\alpha}.$$

Решение. Умножив и разделив левую часть данного равенства на $\sin\alpha$, применим многократно формулу синуса двойного аргумента: $\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha =$

$$= \frac{\sin\alpha \cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha}{2\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 4\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha}{4\sin\alpha} = \frac{\sin 8\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha}{8\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 16\alpha \cos 16\alpha}{16\sin\alpha} = \frac{\sin 32\alpha}{32\sin\alpha},$$

что и требовалось доказать.

Пример I.667. Доказать тождество

$$16\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = 1.$$

Решение. Умножив и разделив левую часть данного равенства на $\sin 20^\circ$, применим многократно формулу синуса двойного аргумента:

$$16\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ =$$

$$= \frac{16\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 60^\circ}{\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{8\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \cdot \frac{1}{2}}{\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.668. Доказать тождество $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$.

Решение. $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \dfrac{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} =$

$$= \frac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{4},$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.669. $\dfrac{4\sin 25^\circ \sin 65^\circ}{\cos 40^\circ} = 2.$

I.670. $\dfrac{10\sin 40^\circ \sin 50^\circ}{\cos 10^\circ} = 5.$

I.671. $8\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \operatorname{ctg} 10^\circ.$

I.672. $\cos 3\alpha \cos 6\alpha \cos 12\alpha = \dfrac{\sin 24\alpha}{8\sin 3\alpha}.$

I.673. $\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha \cos 32\alpha = \dfrac{\sin 64\alpha}{64\sin\alpha}.$

I.674. $\sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \dfrac{1}{8}.$

I.675. $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$.

I.676. $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{8}$.

I.677. $\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}$.

I.678. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\ldots\cos\frac{7\pi}{15} = \frac{1}{128}$.

I.679. $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ = \frac{1}{16}$.

I.680. $4\sin 18^\circ \sin 306^\circ = -1$.

I.681. $96\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6} = 9$.

I.682. $\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\ldots\cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}}$.

* * *

Пример I.683. Исключить α из системы равенств

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \\ y = \sin\alpha. \end{cases}$$

Решение. $x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$

$$= \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = -\frac{2\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= -\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha} = -2\operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{x}{2}.$$

$$y^2 = \sin^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}} = \frac{4}{4 + x^2}.$$

Ответ: $y^2 = \dfrac{4}{4 + x^2}$.

Упражнения

Исключить α из системы равенств:

I.684. $\begin{cases} \sin\alpha + \cos\alpha = x, \\ \sin 2\alpha = y. \end{cases}$

I.685. $\begin{cases} x = \sin\alpha, \\ y = \cos 2\alpha. \end{cases}$

I.686. $\begin{cases} x = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha, \\ y = \sin 2\alpha + \cos 2\alpha. \end{cases}$

I.687. $\begin{cases} x = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha, \\ y = \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha. \end{cases}$

I.688. $\begin{cases} x = \sin\alpha + \cos\alpha, \\ y = \sin 3\alpha + \cos 3\alpha. \end{cases}$

* * *

Пример I.689. Доказать тождество

$$\sin 3\alpha \sin^3\alpha + \cos 3\alpha \cos^3\alpha = \cos^3 2\alpha.$$

Решение. Применяя формулы синуса и косинуса тройного аргумента, имеем: $\sin 3\alpha \sin^3\alpha + \cos 3\alpha \cos^3\alpha =$

$$= (3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)\sin^3\alpha + (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)\cos^3\alpha =$$

$$= 3\sin^4\alpha - 4\sin^6\alpha + 4\cos^6\alpha - 3\cos^4\alpha =$$

$$= 3(\sin^4\alpha - \cos^4\alpha) + 4(\cos^6\alpha - \sin^6\alpha) =$$

$$= 3(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) +$$

$$+ 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha) =$$

$$= -3\cos 2\alpha + 4\cos 2\alpha\,((\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - \cos^2\alpha\sin^2\alpha) =$$

$$= \cos 2\alpha\,(-3 + 4\,(1 - \cos^2\alpha \sin^2\alpha)) =$$

$$= \cos 2\alpha\,(-3 + 4 - 4\cos^2\alpha \sin^2\alpha) = \cos 2\alpha\,(1 - \sin^2 2\alpha) =$$

$$= \cos 2\alpha \cos^2 2\alpha = \cos^3 2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.690. Вычислить $\sin 18°$.

Решение. Имеем $\sin 36° = \cos 54°$. Тогда

$$\sin(2 \cdot 18°) = \cos(3 \cdot 18°),$$

$$2 \sin 18° \cos 18° = 4\cos^3 18° - 3\cos 18°,$$

$$2 \sin 18° \cos 18° = \cos 18°\,(4\cos^2 18° - 3),$$

$$2 \sin 18° = 4\cos^2 18° - 3, \qquad 2 \sin 18° = 4\,(1 - \sin^2 18°) - 3,$$

$$2 \sin 18° = 4 - 4\sin^2 18° - 3, \qquad 4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0.$$

Рассматривая последнее равенство как квадратное уравнение относительно $\sin 18°$ и учитывая, что $\sin 18° > 0$, получаем $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Ответ: $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Упражнения

Доказать тождества:

I.691. $\dfrac{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 3.$

I.692. $\dfrac{\sin 3\alpha + 4\sin^3\alpha}{\cos 3\alpha - 4\cos^3\alpha} = \dfrac{\cos 3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin 3\alpha + \sin^3\alpha}.$

I.693. $\sin^3 2\alpha \cos 6\alpha + \cos^3 2\alpha \sin 6\alpha = \dfrac{3}{4}\sin 8\alpha.$

I.694. $\dfrac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$

I.695. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2 60°}{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2 60°} = 3\operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{ctg}\alpha.$

I.696. $3\sin\alpha\cos 3\alpha + 9\sin\alpha\cos\alpha - \sin 3\alpha\cos 3\alpha -$

$$- 3\sin 3\alpha\cos\alpha = 2\sin^3 2\alpha.$$

I.697. $\sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{1}{4}.$

I.698. $\operatorname{tg}^2 18^\circ \operatorname{tg}^2 54^\circ = \frac{1}{5}.$

I.699. $\dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 9^\circ}{2\operatorname{tg} 9^\circ} = \sqrt{5} + 1.$

* * *

Пример I.700. Доказать тождество

$$4\cos\alpha\cos(60^\circ - \alpha)\cos(60^\circ + \alpha) = \cos 3\alpha.$$

Решение. Применив формулы косинуса разности и косинуса суммы, получаем: $4\cos\alpha\cos(60^\circ - \alpha)\cos(60^\circ + \alpha) =$

$$= 4\cos\alpha(\cos 60^\circ\cos\alpha + \sin 60^\circ\sin\alpha) \times$$

$$\times (\cos 60^\circ\cos\alpha - \sin 60^\circ\sin\alpha) =$$

$$= 4\cos\alpha(\cos^2 60^\circ\cos^2\alpha - \sin^2 60^\circ\sin^2\alpha) =$$

$$= 4\cos\alpha\left(\frac{1}{4}\cos^2\alpha - \frac{3}{4}\sin^2\alpha\right) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha =$$

$$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha =$$

$$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.701. Доказать тождество

$$16\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ = 1.$$

Решение. Имеем $16\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ =$

$$= 16\cdot\frac{1}{2}\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ = 8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ.$$

Так как $40^\circ = 60^\circ - 20^\circ$, $80^\circ = 60^\circ + 20^\circ$, то можем применить тождество, доказанное в номере **I.700** (при $\alpha = 20^\circ$):

$$8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ = 2\cos(3\cdot 20^\circ) = 1,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.702. $4 \sin \alpha \sin (60^\circ - \alpha) \sin (60^\circ + \alpha) = \sin 3\alpha$.

I.703. $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (60^\circ - \alpha) \operatorname{tg} (60^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha$.

I.704. $16 \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = 3$.

I.705. $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}$.

* * *

Пример I.706. Пользуясь формулой косинуса двойного аргумента, вывести формулу понижения степени для квадрата синуса.

Решение. Из формулы $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ получаем

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Ответ: $\sin^2 \alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

Пример I.707. Пользуясь формулой синуса тройного аргумента, вывести формулу понижения степени для куба синуса.

Решение. Из формулы $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ имеем:

$$4 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - \sin 3\alpha, \quad \sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}.$$

Ответ: $\sin^3 \alpha = \dfrac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$.

Упражнения

I.708. Вывести формулы понижения степени для:

а) квадрата косинуса;

б) квадрата тангенса;

в) куба косинуса.

* * *

5. Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \text{ или } 1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha;$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \text{ или } 1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha};$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4};$$

$$\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}.$$

Пример I.709. Применить формулы понижения степени к следующим выражениям:

а) $\cos^2 1{,}5\alpha$; *б)* $\sin^2(\alpha-\beta)$; *в)* $\sin^2\frac{\alpha}{2}$; *г)* $\operatorname{tg}^2\left(3\gamma+\frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. Применяя формулы понижения степени, получаем:

а) $\cos^2 1{,}5\alpha = \frac{1+\cos 3\alpha}{2}$;

б) $\sin^2(\alpha-\beta) = \frac{1-\cos(2\alpha-2\beta)}{2}$;

в) $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$;

г) $\operatorname{tg}^2\left(3\gamma+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1-\cos\left(6\gamma+\frac{\pi}{3}\right)}{1+\cos\left(6\gamma+\frac{\pi}{3}\right)}$.

Упражнения

I.710. Применить формулы понижения степени к следующим выражениям:

а) $\cos^2\pi x$;

б) $\sin^2\left(40^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)$;

в) $\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\frac{\pi}{8}\right)$;

г) $\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;

д) $\sin^2 3\alpha$;

е) $\cos^2 7\alpha$;

ж) $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4}$;

з) $\operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right)$;

и) $\sin^2 \frac{3\alpha}{4}$;

к) $\cos^2 \left(\frac{\beta}{2} + \varphi\right)$.

* * *

Пример I.711. Представить в виде произведения выражение:

а) $1 + \cos 4\alpha$; б) $1 - \cos 6\alpha$; в) $1 + \cos \alpha$; г) $1 - \sin \alpha$.

Решение. а) Применяя формулу $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha$, получаем $1 + \cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha$.

б) Применяя формулу $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$, получаем

$$1 - \cos 6\alpha = 2\sin^2 3\alpha.$$

в) $1 + \cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

г) Заменив с помощью формул приведения синус косинусом, применим формулу $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$:

$$1 - \sin \alpha = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Упражнения

I.712. Представить в виде произведения выражение:

а) $1 + \cos \frac{\alpha}{2}$;

б) $1 - \cos 10\alpha$;

в) $1 + \cos 3\beta$;

г) $1 + \cos 4$;

д) $1 - \cos 70°$;

е) $1 + \cos \frac{6\pi}{11}$;

ж) $1 + \sin 2\alpha$;

з) $1 - \sin \frac{\alpha}{4}$;

и) $1 - \cos \frac{\alpha}{5}$;

к) $1 + \cos \frac{3\alpha}{2}$;

л) $1 - \sin 40°$;

м) $1 + \sin \frac{7\pi}{10}$.

* * *

Пример I.713. Упростить выражение

$$2\sin^2(45^\circ - \alpha) + \sin 2\alpha.$$

Решение. Применив формулу понижения степени для синуса, а затем формулу приведения, получим:

$$2\sin^2(45^\circ - \alpha) + \sin 2\alpha = 1 - \cos(90^\circ - 2\alpha) + \sin 2\alpha =$$

$$= 1 - \sin 2\alpha + \sin 2\alpha = 1.$$

Ответ: 1.

Пример I.714. Упростить выражение

$$\cos^2\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right).$$

Решение. Применив формулу понижения степени для косинуса, а затем формулы приведения, получаем:

$$\cos^2\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right) =$$

$$= \frac{1 + \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 4\alpha\right)}{2} - \frac{1 + \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 4\alpha\right)}{2} =$$

$$= \frac{1 + \sin 4\alpha}{2} - \frac{1 - \sin 4\alpha}{2} = \frac{1 + \sin 4\alpha - 1 + \sin 4\alpha}{2} = \sin 4\alpha.$$

Ответ: $\sin 4\alpha$.

Пример I.715. Доказать тождество

$$\cos^4\alpha = \frac{1}{8}\cos 4\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{3}{8}.$$

Решение. Так как $\cos^4\alpha = (\cos^2\alpha)^2$, то применив к $\cos^2\alpha$ формулу понижения степени, имеем:

$$\cos^4\alpha = \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{4}\cos^2 2\alpha.$$

Далее применим формулу понижения степени к $\cos^2 2\alpha$:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{4}\cos^2 2\alpha=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4\alpha}{2}=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1+\cos 4\alpha}{8}=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4\alpha=\frac{1}{8}\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{3}{8},$$

что и требовалось доказать.

Пример I.716. Доказать тождество

$$\sin^2(\alpha-30^\circ)+\sin^2(\alpha+30^\circ)-\sin^2\alpha=0{,}5.$$

Решение. $\sin^2(\alpha-30^\circ)+\sin^2(\alpha+30^\circ)-\sin^2\alpha=$

$$=\frac{1-\cos(2\alpha-60^\circ)}{2}+\frac{1-\cos(2\alpha+60^\circ)}{2}-\sin^2\alpha=$$

$$=\frac{1-\cos 2\alpha\cos 60^\circ-\sin 2\alpha\sin 60^\circ}{2}+$$

$$+\frac{1-\cos 2\alpha\cos 60^\circ+\sin 2\alpha\sin 60^\circ}{2}-$$

$$-\sin^2\alpha=\frac{2-2\cos 60^\circ\cos 2\alpha}{2}-\sin^2\alpha=1-\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\sin^2\alpha=$$

$$=1-\frac{1}{2}(1-2\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=1-\frac{1}{2}+\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=0{,}5,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.717. Доказать тождество

$$2\cos^2\alpha\cos^2\beta+2\sin^2\alpha\sin^2\beta-1=\cos 2\alpha\cos 2\beta.$$

Решение. $2\cos^2\alpha\cos^2\beta+2\sin^2\alpha\sin^2\beta-1=$

$$=2\cdot\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\cdot\frac{1+\cos 2\beta}{2}+$$

$$+2\cdot\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\cdot\frac{1-\cos 2\beta}{2}-1=$$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha+\cos 2\beta+1+$$

$$+\cos 2\alpha\cos 2\beta-\cos 2\alpha-\cos 2\beta)-1=$$

$$= \frac{1}{2}(2 + 2\cos 2\alpha \cos 2\beta) - 1 = 1 + \cos 2\alpha \cos 2\beta - 1 =$$

$$= \cos 2\alpha \cos 2\beta,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.718. $2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha = 1.$

I.719. $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1.$

I.720. $2\cos^2(45^\circ - \alpha) - \sin 2\alpha = 1.$

I.721. $\sin^2\left(\frac{5\pi}{4} - 4\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + 4\alpha\right) = -\sin 8\alpha.$

I.722. $\sin^4\alpha = \frac{1}{8}\cos 4\alpha - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{3}{8}.$

I.723. $\dfrac{1 + \sin\alpha - 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{4\cos\frac{\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2}.$

I.724. $\sin^2\alpha + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{3}{2}.$

I.725. $4\sin^4\alpha + 4\cos^4\alpha + \cos 4\alpha - 1 = 4\cos^2 2\alpha.$

I.726. $\sin^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \sin 2\alpha \sin 2\beta = 1.$

I.727. $2(1 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha)^2 - \sin^8\alpha - \cos^8\alpha = 1.$

* * *

Пример I.728. Доказать тождество

$$\operatorname{ctg} 2\alpha\,(1 - \cos 4\alpha) = \sin 4\alpha.$$

Решение. $\operatorname{ctg} 2\alpha\,(1 - \cos 4\alpha) = \dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot 2\sin^2 2\alpha =$

$$= \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\alpha = \sin 4\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.729. Доказать тождество

$$\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}.$$

Решение. $$\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{4}-2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}{2\sin^2\frac{\alpha}{4}-2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{\alpha}{4}\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{4}\left(\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\right)}=-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4},$$

что и требовалось доказать.

Пример I.730. Доказать тождество

$$(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Решение. $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=$

$$=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta+\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=$$

$$=2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2(1+\cos(\alpha-\beta))=$$

$$=2\cdot 2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2},$$

что и требовалось доказать.

Пример I.731. Доказать тождество

$$\frac{2\cos 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha+\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}^2(45^\circ-\alpha).$$

Решение. $$\frac{2\cos 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha+\sin 4\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos 2\alpha-2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos 2\alpha(1-\sin 2\alpha)}{2\cos 2\alpha(1+\sin 2\alpha)}=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=$$

$$= \frac{1 - \cos(90^\circ - 2\alpha)}{1 + \cos(90^\circ - 2\alpha)} = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \alpha),$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.732. $\operatorname{tg}\alpha\,(1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha.$

I.733. $\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2\alpha} = 2.$

I.734. $1 + 2\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 4\cos^2\alpha\cos 2\alpha.$

I.735. $1 - 2\cos 3\alpha + \cos 6\alpha = -4\sin^2\dfrac{3\alpha}{2}\cos 3\alpha.$

I.736. $\dfrac{1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$

I.737. $\dfrac{1 - \sin(30^\circ - \alpha)}{1 + \sin(30^\circ + \alpha)} = \operatorname{tg}^2\left(30^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right).$

I.738. $\dfrac{\sin\alpha + \sin\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \cos\alpha + \cos\dfrac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}.$

I.739. $\dfrac{1 - \cos 4\alpha}{\cos^{-2} 2\alpha - 1} + \dfrac{1 + \cos 4\alpha}{\sin^{-2} 2\alpha - 1} = 2.$

I.740. $\dfrac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{2}\sin 4\alpha.$

I.741. $\dfrac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha} \cdot \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$

I.742. $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}.$

I.743. $\dfrac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$

I.744. $\sin\alpha\,(\sin\alpha + \sin\beta) + \cos\alpha\,(\cos\alpha + \cos\beta) =$

$$= 2\cos^2\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

I.745. $\sin\alpha\,(\sin\alpha - \sin\beta) + \cos\alpha\,(\cos\alpha - \cos\beta) =$

$$= 2\sin^2\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

I.746. $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 = 4\sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}.$

I.747. $\dfrac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^2\alpha - 4}{1 - 8\sin^2\alpha - \cos 4\alpha} = \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^4\alpha.$

I.748. $\dfrac{\cos\left(4\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} + 2\alpha\right)}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha.$

* * *

Пример I.749. Доказать тождество

$$3 + 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha = 8\cos^4 2\alpha.$$

Решение. $3 + 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha =$

$$= 3 + 4\cos 4\alpha + 2\cos^2 4\alpha - 1 = 2 + 4\cos 4\alpha + 2\cos^2 4\alpha =$$

$$= 2(1 + 2\cos 4\alpha + \cos^2 4\alpha) = 2(1+\cos 4\alpha)^2 =$$

$$= 2(2\cos^2 2\alpha)^2 = 2\cdot 4\cos^4 2\alpha = 8\cos^4 2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.750. Доказать тождество

$$\frac{4\cos^2(\alpha-\pi) - 4\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right) + 3\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{2} - \alpha\right)}{4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\dfrac{7\pi}{2} - \alpha\right)} = \operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}.$$

Решение.

$$\frac{4\cos^2(\alpha-\pi) - 4\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right) + 3\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{2} - \alpha\right)}{4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\dfrac{7\pi}{2} - \alpha\right)} =$$

$$= \frac{4\cos^2\alpha - 4\cos^2\dfrac{\alpha}{2} + 3\sin^2\alpha}{4\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{4\cos^2\alpha - 2(1+\cos\alpha) + 3(1-\cos^2\alpha)}{4\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{4\cos^2\alpha - 2 - 2\cos\alpha + 3 - 3\cos^2\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{(1 - \cos\alpha)^2}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}} = \frac{4\sin^4\frac{\alpha}{2}}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2},$$

что и требовалось доказать.

В этом примере формулы понижения степени были применены дважды с противоположной целью: первый раз для замены квадрата косинуса функцией первой степени $\left(4\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2(1 + \cos\alpha)\right)$, второй раз — для замены выражения $1 - \cos\alpha$ произведением $2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Упражнения

Доказать тождества:

I.751. $3 + 4\sin\left(4\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(8\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) = 8\sin^4 2\alpha.$

I.752. $\frac{3 + 4\cos\alpha + \cos 2\alpha}{3 - 4\cos\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}^4\frac{\alpha}{2}.$

I.753. $\frac{\cos^2(4\alpha - 3\pi) - 4\cos^2(2\alpha - \pi) + 3}{\cos^2(4\alpha + 3\pi) + 4\cos^2(2\alpha + \pi) - 1} = \operatorname{tg}^4 2\alpha.$

I.754. $\frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha - \cos^2\alpha}{2(\cos\alpha - 1)} = \cos^2\frac{\alpha}{2}.$

* * *

Пример I.755. Дано: $\operatorname{tg} 3\alpha = 3\frac{3}{7}$, $60° < \alpha < 90°$. Найти $\sin\frac{3\alpha}{2}$, $\cos\frac{3\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}$.

Решение. $\frac{1}{\cos^2 3\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 3\alpha = 1 + \left(\frac{24}{7}\right)^2 = \frac{625}{49},$

$$\cos^2 3\alpha = \frac{49}{625}.$$

Так как $60° < \alpha < 90°$, то $180° < 3\alpha < 270°$. Следовательно, $\cos 3\alpha < 0$ и $\cos 3\alpha = -\frac{7}{25}$.

Так как $90° < \frac{3\alpha}{2} < 135°$, то $\sin\frac{3\alpha}{2} > 0$, а $\cos\frac{3\alpha}{2} < 0$. Тогда $\sin\frac{3\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 3\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+7/25}{2}} = \frac{4}{5}$,

$$\cos\frac{3\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos 3\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1-7/25}{2}} = -\frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{\cos\frac{3\alpha}{2}} = -\frac{4}{3}.$$

Ответ: $\sin\frac{3\alpha}{2} = \frac{4}{5}$, $\cos\frac{3\alpha}{2} = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2} = -\frac{4}{3}$.

Пример I.756. Дано: $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $45° < \frac{\alpha}{4} < 90°$. Найти $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$.

Решение. Так как $45° < \frac{\alpha}{4} < 90°$, то $90° < \frac{\alpha}{2} < 180°$ и $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$. Тогда

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1+3/5}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Так как $45° < \frac{\alpha}{4} < 90°$, то $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4} > 0$ и

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha/2)}{1-\cos(\alpha/2)}} = \sqrt{\frac{1-(2/\sqrt{5})}{1+(2/\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-2)^2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}} = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = \sqrt{5}-2.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4} = \sqrt{5}-2$.

Пример I.757. Дано: $\sin 2\alpha = 0{,}25$. Найти $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

Решение. $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \dfrac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)} =$

$$= \frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \frac{1-0{,}25}{1+0{,}25} = \frac{0{,}75}{1{,}25} = \frac{3}{5},$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \sqrt{0{,}6} \text{ или } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = -\sqrt{0{,}6}.$$

Ответ: $\sqrt{0{,}6}$ или $-\sqrt{0{,}6}$.

Упражнения

I.758. Дано: $\cos\alpha = \frac{161}{289}$, $0° < \alpha < 90°$. Найти $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

I.759. Дано: $\sin 2\alpha = \frac{120}{169}$, $180° < \alpha < 225°$. Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

I.760. Дано: $\cos 2\alpha = -\frac{527}{625}$, $45° < \alpha < 90°$. Найти $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$.

I.761. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = -2{,}4$, $270° < \alpha < 360°$. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

I.762. Дано: $\cos 2\alpha = -0{,}6$. Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

I.763. Дано: $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найти $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

I.764. Дано: $\cos 3\alpha = -\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$. Найти $\sin\frac{3\alpha}{2}$ и $\cos\frac{3\alpha}{2}$.

I.765. Дано: $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $135° < \alpha < 180°$. Найти $\sin\alpha$.

I.766. Дано: $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $90° < \frac{\alpha}{2} < 135°$. Найти $\cos\frac{\alpha}{2}$.

I.767. Дано: $\sin 2\alpha = -\frac{1}{3}$. Найти $\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)$.

I.768. Дано: $\sin\alpha = \frac{a-b}{a+b}$, $a \neq -b$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найти $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

* * *

Пример I.769. Пользуясь формулами понижения степени, найти $\sin 22° 30'$ и $\cos 22° 30'$.

Решение. $\sin 22° 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos 45°}{2}} =$

$$= \sqrt{\frac{1 - (\sqrt{2}/2)}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

$$\cos 22° 30' = \sqrt{\frac{1 + \cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{(1 + (\sqrt{2}/2)}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

Ответ: $\sin 22° 30' = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$, $\cos 22° 30' = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

Пример I.770. Дано: $\cos 20° = m$. Найти $\cos 5°$.

Решение. $\cos 10° = \sqrt{\frac{1 + \cos 20°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + m}{2}} =$

$$= \sqrt{\frac{2(1 + m)}{4}} = \frac{\sqrt{2(1 + m)}}{2},$$

$$\cos 5° = \sqrt{\frac{1 + \cos 10°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (\sqrt{2(1 + m)}/2)}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2(1 + m)}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2(1 + m)}}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2(1 + m)}}}{2}$.

Упражнения

I.771. Пользуясь формулами понижения степени, найти:

а) $\sin 15°$;

б) $\cos 15°$;

в) $\operatorname{tg} 75°$;

г) $\cos 75°$;

д) $\operatorname{tg} 112°30'$;

е) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$.

I.772. Дано: $\sin 22° = a$. Найти $\sin 34°$.

* * *

Пример I.773. Упростить выражение

$$\sqrt{0{,}5 + 0{,}5\sqrt{0{,}5 + 0{,}5\cos\alpha}},$$

если $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

Решение. $\sqrt{0{,}5 + 0{,}5\sqrt{0{,}5 + 0{,}5\cos\alpha}} =$

$$= \sqrt{0{,}5 + 0{,}5\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \sqrt{0{,}5 + 0{,}5\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \sqrt{0{,}5 + 0{,}5\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

Так как $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, то $0 \leqslant \frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \cos\frac{\alpha}{2}$.

Тогда $\sqrt{0{,}5 + 0{,}5\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|} = \sqrt{0{,}5 + 0{,}5\cos\frac{\alpha}{2}} =$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha/2)}{2}} = \sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{4}} = \left|\cos\frac{\alpha}{4}\right|.$$

Так как $0 \leqslant \frac{\alpha}{4} \leqslant \frac{\pi}{4}$, то $\left|\cos\frac{\alpha}{4}\right| = \cos\frac{\alpha}{4}$.

Ответ: $\cos\frac{\alpha}{4}$.

Пример I.774. Упростить выражение

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

Решение. $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=$

$$=\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}=\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|+\left|\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right|=$$

$$=\frac{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}+\frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}=\frac{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|^2+\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|^2}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}=$$

$$=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|}=\frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|}=$$

$$=\frac{2}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|}=\frac{2}{|\sin\alpha|}.$$

Ответ: $\dfrac{2}{|\sin\alpha|}$.

Пример I.775. Упростить выражение

$$\sqrt{1+\sin\varphi}-\sqrt{1-\sin\varphi},$$

если $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. $\sqrt{1+\sin\varphi}-\sqrt{1-\sin\varphi}=$

$$=\sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}-\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}=$$

$$=\sqrt{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}-\sqrt{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}=$$

$$=\sqrt{2}\left(\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\right|-\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\right|\right).$$

Так как $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$, то $0<\dfrac{\varphi}{2}<\dfrac{\pi}{4}$, $-\dfrac{\pi}{4}<-\dfrac{\varphi}{2}<0$, $0<\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}<\dfrac{\pi}{4}$. Следовательно,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)>0 \text{ и } \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)>0.$$

Тогда $\sqrt{2}\left(\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\right|-\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\right|\right)=$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\sin\frac{\varphi}{2}=2\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Ответ: $2\sin\frac{\varphi}{2}$.

Пример I.776. Упростить выражение $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\alpha}}$, если $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Решение. $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\alpha}}=\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos 4\alpha)}}=$

$$=\sqrt{2+\sqrt{4\cos^2 2\alpha}}=\sqrt{2+2|\cos 2\alpha|}=\sqrt{2(1+|\cos 2\alpha|)}.$$

Так как $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $0\leqslant 2\alpha\leqslant\pi$ и $\cos 2\alpha\geqslant 0$ при $0\leqslant 2\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\cos 2\alpha<0$ при $\frac{\pi}{2}<2\alpha\leqslant\pi$.

При $0\leqslant 2\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ $\left(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\sqrt{2(1+|\cos 2\alpha|)}=\sqrt{2(1+\cos 2\alpha)}=\sqrt{4\cos^2\alpha}=2\cos\alpha.$$

При $\frac{\pi}{2}<2\alpha\leqslant\pi$ $\left(\frac{\pi}{4}<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\sqrt{2(1+|\cos 2\alpha|)}=\sqrt{2(1-\cos 2\alpha)}=\sqrt{4\sin^2\alpha}=2\sin\alpha.$$

Ответ: если $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$, то $2\cos\alpha$;

если $\frac{\pi}{4}<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $2\sin\alpha$.

Упражнения

Упростить выражения:

I.777. $\sqrt{2(1+\cos 2\alpha)}$, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

I.778. $\sqrt{0{,}5-0{,}5\cos 4\alpha}$, если $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

I.779. $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha}$.

I.780. $\sqrt{2\sin 2\alpha+2}$.

I.781. $\sqrt{0{,}5-0{,}5\sqrt{0{,}5+0{,}5\cos\alpha}}$.

I.782. $\sqrt{0{,}5+0{,}5\sqrt{0{,}5+0{,}5\sqrt{0{,}5+0{,}5\cos\alpha}}}$, если $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$.

I.783. $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos 2\alpha}}-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos 2\alpha}}$, если $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

I.784. $\frac{\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1-\sin\alpha}}-\frac{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1+\sin\alpha}}$, если $0^\circ<\alpha<180^\circ$.

I.785. $4\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\sqrt{4\sin^4\alpha+\sin^2 2\alpha}$, если $180^\circ<\alpha<270^\circ$.

I.786. $4\sin^2\frac{\alpha}{4}-\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{3\alpha}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{3\alpha}{2}\right)^2}$, если $180^\circ<\alpha<270^\circ$.

I.787. $\sqrt{1+\sin\varphi}-\sqrt{1-\sin\varphi}$, если $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$.

I.788. $\sqrt{1+\cos\varphi}-\sqrt{1-\cos\varphi}$, если $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

I.789. $\sqrt{\frac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1$, если $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

I.790. $\left(\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}\right)\operatorname{tg} 2\alpha+2$, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

I.791. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, если $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

I.792. $\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\alpha}}$, если $2\pi\leqslant\alpha\leqslant 4\pi$.

* * *

Пример I.793. Доказать тождество

$$\sin^3 2\alpha\cos 6\alpha+\cos^3 2\alpha\sin 6\alpha=\frac{3}{4}\sin 8\alpha.$$

Решение. Применив формулы понижения степени для куба синуса и куба косинуса, получаем:

$$\sin^3 2\alpha\cos 6\alpha+\cos^3 2\alpha\sin 6\alpha=\frac{3\sin 2\alpha-\sin 6\alpha}{4}\cdot\cos 6\alpha+$$

$$+\frac{3\cos 2\alpha+\cos 6\alpha}{4}\cdot\sin 6\alpha=$$

$$=\frac{1}{4}(3\sin 2\alpha\cos 6\alpha-\sin 6\alpha\cos 6\alpha+3\cos 2\alpha\sin 6\alpha+$$

$$+\cos 6\alpha\sin 6\alpha)=\frac{3}{4}(\sin 2\alpha\cos 6\alpha+\cos 2\alpha\sin 6\alpha)=\frac{3}{4}\sin 8\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.794. $\sin^3\alpha\cos^3\alpha=\dfrac{3}{32}\sin 2\alpha-\dfrac{1}{32}\sin 6\alpha.$

I.795. $\sin^3\alpha+\sin^3\left(\dfrac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\sin^3\left(\dfrac{4\pi}{3}+\alpha\right)=-\dfrac{3}{4}\sin 3\alpha.$

I.796. $\sin 3\alpha\sin^3\alpha+\cos 3\alpha\cos^3\alpha=\cos^3 2\alpha.$

* * *

Пример I.797. Доказать, что $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Решение. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}} =$

$$= \frac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

I.798. Доказать, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

* * *

6. Выражение тангенса и котангенса половинного аргумента через синус и косинус целого аргумента

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Пример I.799. Дано: $\sin 2\alpha = -0{,}8$, $135^\circ < \alpha < 180^\circ$. Найти $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. $\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$. Так как $135^\circ < \alpha < 180^\circ$, то $270^\circ < 2\alpha < 360^\circ$ и $\cos 2\alpha > 0$. Следовательно, $\cos 2\alpha = 0{,}6$. Тогда $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1+0{,}6}{-0{,}8} = -2$.

Ответ: -2.

Пример I.800. Дано: $\sin\alpha = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $mn \neq 0$.

Решение. $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2 =$

$$= \frac{(m^2+n^2)^2-(m^2-n^2)^2}{(m^2+n^2)^2} = \frac{4m^2n^2}{(m^2+n^2)^2}, \quad \cos\alpha = \frac{2\,|mn|}{m^2+n^2}.$$

При $mn > 0$ $\cos\alpha = \frac{2mn}{m^2+n^2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} =$

$$= \frac{1-\frac{2mn}{m^2+n^2}}{\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}} = \frac{m^2+n^2-2mn}{m^2-n^2} =$$

$$= \frac{(m-n)^2}{(m-n)(m+n)} = \frac{m-n}{m+n}.$$

При $mn < 0$ $\cos\alpha = -\frac{2mn}{m^2+n^2}$ $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} =$

$$= \frac{1+\frac{2mn}{m^2+n^2}}{\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}} = \frac{m^2+n^2+2mn}{m^2-n^2} =$$

$$= \frac{(m+n)^2}{(m-n)(m+n)} = \frac{m+n}{m-n}.$$

Ответ: если $mn > 0$, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{m-n}{m+n}$;

если $mn < 0$, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{m+n}{m-n}$.

Упражнения

I.801. Дано: $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, α не является углом I четверти. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

I.802. Дано: $\sin 2\alpha = \frac{1}{3}$. Найти $\operatorname{tg}\alpha$.

I.803. Дано: $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{a}}{1+a}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

* * *

Пример I.804. Представить дробь $\frac{\cos 12^\circ}{1 - \sin 12^\circ}$ в виде тангенса некоторого угла.

Решение. Применив формулы приведения, представим данную дробь в виде $\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$, где α — некоторый угол:

$$\frac{\cos 12^\circ}{1 - \sin 12^\circ} = \frac{\cos(102^\circ - 90^\circ)}{1 - \sin(102^\circ - 90^\circ)} =$$

$$= \frac{\sin 102^\circ}{1 + \cos 102^\circ} = \operatorname{tg}\frac{102^\circ}{2} = \operatorname{tg} 51^\circ.$$

Ответ: $\frac{\cos 12^\circ}{1 - \sin 12^\circ} = \operatorname{tg} 51^\circ$.

Пример I.805. Упростить выражение

$$\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha}.$$

Решение. Применив к дроби $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$ формулу котангенса половинного аргумента, получаем:

$$\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Упражнения

I.806. Представить данные дроби в виде тангенса некоторого аргумента:

а) $\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}$;

б) $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$;

в) $\frac{\cos 40^\circ}{1 + \sin 40^\circ}$;

г) $\frac{1 - \sin(30^\circ + 2\alpha)}{\cos(30^\circ + 2\alpha)}$;

д) $\frac{\sin(\alpha + \pi/3)}{1 + \cos(\alpha + \pi/3)}$.

I.807. Упростить выражения:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}}$;

б) $\dfrac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}\cdot\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$;

в) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$.

* * *

Пример I.808. Доказать тождество

$$\left(\frac{1}{\cos 2\alpha}+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}+2\alpha\right)\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)=1.$$

Решение. $\left(\dfrac{1}{\cos 2\alpha}+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2}+2\alpha\right)\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{4}-\alpha\right)=$

$$=\left(\frac{1}{\cos 2\alpha}-\operatorname{tg}2\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right).$$

$\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{4}-\alpha\right)$ рассмотрим как котангенс половинного аргумента. Из формул $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$ выберем ту, в которой сумма (разность) стоит в знаменателе, в «противовес» первому множителю полученного выражения, где разность стоит в числителе. Имеем

$$\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}-2\alpha\right)}{1-\cos\left(\frac{5\pi}{2}-2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=1,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.809. $$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

I.810. $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=1.$$

I.811. $$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)}{1-\sin(3\alpha-\pi)}=\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right).$$

I.812. $$\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)(1+\sin 2\alpha)=\cos 2\alpha.$$

I.813. $$\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(4\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)=-1.$$

I.814. $$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)(1+\sin 2\alpha)}{\cos\left(\frac{5\pi}{2}-2\alpha\right)}=\operatorname{ctg}2\alpha.$$

I.815. $$\frac{\cos\left(4\alpha-\frac{9\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+2\alpha\right)\left(1-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+4\alpha\right)\right)}=\operatorname{tg}4\alpha.$$

I.816. $$\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)\right)}{\cos\left(2\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)}=\operatorname{ctg}2\alpha.$$

* * *

7. Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Пример I.817. Преобразовать в произведение:

а) $\sin 26^\circ + \sin 14^\circ$;

б) $\sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{18}$;

в) $\cos 6\alpha + \cos 4\alpha$;

г) $\cos\alpha - \cos 8\alpha$;

д) $\operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ$;

е) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}$.

Решение. *а)* Применяя формулу суммы синусов, имеем:

$$\sin 26^\circ + \sin 14^\circ = 2\sin\frac{26^\circ+14^\circ}{2}\cos\frac{26^\circ-14^\circ}{2} = 2\sin 20^\circ\cos 6^\circ.$$

б) Применяя формулу разности синусов, имеем:

$$\sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{18} = 2\sin\frac{\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{18}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{18}}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\frac{5\pi}{72}}{2}\cos\frac{\frac{13\pi}{72}}{2} = 2\sin\frac{5\pi}{144}\cos\frac{13\pi}{144}.$$

в) Применяя формулу суммы косинусов, имеем:

$$\cos 6\alpha + \cos 4\alpha = 2\cos\frac{6\alpha + 4\alpha}{2}\cos\frac{6\alpha - 4\alpha}{2} = 2\cos 5\alpha\cos\alpha.$$

г) Применяя формулу разности косинусов

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

имеем: $\cos\alpha - \cos 8\alpha = 2\sin\frac{\alpha + 8\alpha}{2}\sin\frac{8\alpha - \alpha}{2} =$

$$= 2\sin\frac{9\alpha}{2}\sin\frac{7\alpha}{2}.$$

д) Применяя формулу суммы тангенсов, имеем:

$$\operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\sin(25^\circ + 15^\circ)}{\cos 25^\circ\cos 15^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\cos 25^\circ\cos 15^\circ}.$$

е) Применяя формулу разности котангенсов, имеем:

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{10} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{12}\right)}{\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{10}} = \frac{\sin\frac{\pi}{60}}{\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{10}}.$$

Упражнения

I.818. Преобразовать в произведение:

а) $\cos 50^\circ + \cos 20^\circ$;

б) $\cos 16^\circ - \cos 36^\circ$;

в) $\sin 28^\circ + \sin 12^\circ$;

г) $\sin 5^\circ - \sin 3^\circ$;

д) $\sin 105^\circ - \sin 75^\circ$;

е) $\cos 3\alpha + \cos 5\alpha$;

ж) $\sin\frac{11\pi}{12} + \sin\frac{5\pi}{12}$;

з) $\sin 12^\circ + \sin 20^\circ$;

и) $\sin\frac{\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{20}$;

к) $\cos\frac{\pi}{18} + \cos\frac{\pi}{12}$;

л) $\cos 2\alpha - \cos 4\alpha$;

м) $\sin 7\alpha - \sin 3\alpha$;

н) $\sin\beta + \sin 4\beta$;

о) $\cos 6\alpha - \cos 3\alpha$;

п) $\sin 2\alpha - \sin 10\alpha$;

р) $\cos 3\gamma + \cos 8\gamma$;

с) $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 17^\circ$;

т) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} - \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$;

у) $\operatorname{ctg} 24^\circ + \operatorname{ctg} 16^\circ$;

ф) $\operatorname{ctg} 55^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ$;

х) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{24} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$;

ц) $\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} 4\alpha$;

ч) $\operatorname{ctg} 5\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$;

ш) $\operatorname{ctg} 2\gamma + \operatorname{ctg} 3\beta$;

щ) $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x$.

* * *

Пример I.819. Преобразовать в произведение:

а) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$;

б) $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha)$;

в) $\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$;

г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Решение. *а*) Применяя формулу суммы косинусов, имеем:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta - \alpha + \beta}{2} = 2\cos\alpha\cos\beta.$$

Ответ: $2\cos\alpha\cos\beta$.

б) Применяя формулу разности синусов, имеем:

$$\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha) =$$

$$= 2\sin\frac{60^\circ + \alpha - 60^\circ + \alpha}{2}\cos\frac{60^\circ + \alpha + 60^\circ - \alpha}{2} =$$

$$= 2\sin\alpha\cos 60^\circ = 2\sin\alpha \cdot \frac{1}{2} = \sin\alpha.$$

Ответ: $\sin\alpha$.

в) Применяя формулу разности косинусов, имеем:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -2\sin\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}-\alpha-\frac{\pi}{6}}{2}\sin\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}+\alpha+\frac{\pi}{6}}{2} =$$

$$= -2\sin\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}}{2}\sin\frac{\frac{3\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}}{2} = -2\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{3\alpha}{4}+\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{3\alpha}{4}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ: $2\sin\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{3\alpha}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$.

г) Применяя формулу разности тангенсов, имеем:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Так как $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, то

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Тогда

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}\alpha.$$

Ответ: $2\operatorname{tg}\alpha$.

Упражнения

I.820. Преобразовать в произведение:

а) $\sin(x+\alpha)+\sin(x-\alpha)$;

б) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$;

в) $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$;

г) $\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)-\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha)$;

д) $\operatorname{tg}(x+\alpha)-\operatorname{tg}(x-\alpha)$;

е) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}(\alpha-30^\circ)$;

ж) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;

з) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

и) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

к) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

* * *

Пример I.821. Преобразовать в произведение:

а) $\sin 50^\circ+\cos 20^\circ$;

б) $\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{7}$;

в) $\operatorname{tg} 25^\circ-\operatorname{ctg} 55^\circ$;

г) $\sin\alpha+\cos\alpha$;

д) $\sin\alpha-\cos\beta$;

е) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta$.

Решение. *а)* Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение содержат одноименные функции, а в данной сумме присутствуют и синус, и косинус. С помощью формул приведения данную сумму можно преобразовать в сумму синусов или сумму косинусов, при этом, в зависимости от выбора вида суммы, будут получаться, на первый взгляд, разные ответы, в действительности же равные между собой. Перейдя в данном примере к сумме синусов, имеем: $\sin 50^\circ+\cos 20^\circ=$

$$=\sin 50^\circ+\sin 70^\circ=2\sin 60^\circ\cos 10^\circ=\sqrt{3}\cos 10^\circ.$$

Ответ: $\sqrt{3}\cos 10^\circ$.

б) В данном примере перейдем к разности косинусов:

$$\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{7} = \cos\frac{\pi}{8} - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{5\pi}{14} =$$

$$= 2\sin\frac{\frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{14}}{2}\sin\frac{\frac{5\pi}{14} - \frac{\pi}{8}}{2} = 2\sin\frac{\frac{27\pi}{56}}{2}\sin\frac{\frac{13\pi}{56}}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{27\pi}{112}\sin\frac{13\pi}{112}.$$

Ответ: $2\sin\frac{27\pi}{112}\sin\frac{13\pi}{112}$.

в) Перейдя к разности тангенсов, имеем:

$$\operatorname{tg} 25^\circ - \operatorname{ctg} 55^\circ = \operatorname{tg} 25^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ =$$

$$= \frac{\sin(25^\circ - 35^\circ)}{\cos 25^\circ \cos 35^\circ} = -\frac{\sin 10^\circ}{\cos 25^\circ \cos 35^\circ}.$$

Ответ: $-\frac{\sin 10^\circ}{\cos 25^\circ \cos 35^\circ}$.

г) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

$$= 2\sin\frac{\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha}{2}\cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ: $\sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

д) $\sin\alpha - \cos\beta = \sin\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) =$

$$= 2\sin\frac{\alpha - \frac{\pi}{2} + \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \frac{\pi}{2} - \beta}{2} =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ: $2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

е) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) =$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta - \alpha\right)}{\sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right)}{\sin\alpha\cos\beta} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

Ответ: $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

Отметим, что в последнем примере можно было получить ответ иначе, представив $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ в виде дробей, приведенных затем к общему знаменателю.

Упражнения

I.822. Преобразовать в произведение:

а) $\sin 20° + \cos 20°$;

б) $\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}$;

в) $\sin 25° + \cos 55°$;

г) $\cos 22° - \sin 66°$;

д) $\sin\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{5}$;

е) $\sin\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}$;

ж) $\sin\alpha - \cos\alpha$;

з) $\sin\alpha + \cos\beta$;

и) $\operatorname{tg} 12° - \operatorname{ctg} 40°$;

к) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{24} + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$;

л) $\sin\alpha - \cos(\alpha - 60°)$;

м) $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

* * *

Пример I.823. Преобразовать в произведение:

а) $0{,}5 + \cos\alpha$;

б) $1 + \operatorname{tg}\alpha$;

в) $\sqrt{3} - 2\sin\alpha$;

г) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha - 1$.

Решение. *а)* $0{,}5 + \cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} + \cos\alpha =$

$$= 2\cos\frac{\frac{\pi}{3} + \alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3} - \alpha}{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

б) $1 + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\alpha =$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos\alpha}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos\alpha}$.

в) $\sqrt{3} - 2\sin\alpha = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\alpha\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin\alpha\right) =$

$$= 2 \cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{3} - \alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3} + \alpha}{2} = 4\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $4\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

г) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha - 1 = \sqrt{3}\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}\left(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right) =$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha}.$$

Ответ: $\frac{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha}$.

Упражнения

I.824. Преобразовать в произведение:

а) $1 - 2\cos\alpha$;

б) $1 + 2\sin\alpha$;

в) $1 - 2\sin\alpha$;

г) $1 - \operatorname{tg}\alpha$;

д) $1 + \operatorname{ctg}\alpha$;

е) $1 - \operatorname{ctg}\alpha$;

ж) $\sqrt{3} + 2\cos\alpha$;

з) $1 - \sqrt{2}\sin\alpha$;

и) $\sqrt{3} + \operatorname{ctg}\alpha$;

к) $\sqrt{2} + 2\cos\alpha$;

л) $\sqrt{3} - 2\cos\alpha$;

м) $\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha$.

* * *

Пример I.825. Доказать тождество

$$\sin 4\alpha - \sin 5\alpha - \sin 6\alpha + \sin 7\alpha = -4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{11\alpha}{2}.$$

Решение. Объединив первое и четвертое, второе и третье слагаемые, преобразуем суммы синусов в произведение: $\sin 4\alpha - \sin 5\alpha - \sin 6\alpha + \sin 7\alpha =$

$$= (\sin 4\alpha + \sin 7\alpha) - (\sin 5\alpha + \sin 6\alpha) =$$

$$= 2\sin\frac{11\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2} - 2\sin\frac{11\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{11\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Преобразовав разность косинусов, стоящую в скобках, в произведение, получаем: $2\sin\frac{11\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right) =$

$$= 2\sin\frac{11\alpha}{2}\cdot\left(-2\sin\frac{\frac{3\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}}{2}\sin\frac{\frac{3\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}}{2}\right) =$$

$$= -4\sin\frac{11\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2},$$

что и требовалось доказать.

Пример I.826. Доказать тождество

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{10}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{10}+\alpha\right) +$$
$$+ \cos\left(\frac{\pi}{10}+\alpha\right) = \sin\alpha.$$

Решение. Объединив первое и четвертое, второе и третье слагаемые, имеем:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{10}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{10}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{10}+\alpha\right) =$$

$$= \left(\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{10}+\alpha\right)\right) -$$

$$- \left(\cos\left(\frac{3\pi}{10}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{10}-\alpha\right)\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\frac{3\pi}{10}-\alpha+\frac{\pi}{10}+\alpha}{2}\cos\frac{\frac{3\pi}{10}-\alpha-\frac{\pi}{10}-\alpha}{2} -$$

$$- 2\cos\frac{\frac{3\pi}{10}+\alpha+\frac{\pi}{10}-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{3\pi}{10}+\alpha-\frac{\pi}{10}+\alpha}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{5}\cos\left(\frac{\pi}{10}-\alpha\right) - 2\cos\frac{\pi}{5}\cos\left(\frac{\pi}{10}+\alpha\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{10}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{10}+\alpha\right)\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{5}\cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{10}+\alpha-\frac{\pi}{10}+\alpha}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{10}-\alpha+\frac{\pi}{10}+\alpha}{2} =$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{5}\sin\alpha\sin\frac{\pi}{10}.$$

Так как $\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}$ (докажите самостоятельно), то

$$4\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}\sin\alpha = 4\cdot\frac{1}{4}\sin\alpha = \sin\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.827. Доказать тождество

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) =$$

$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

Решение. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) =$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\gamma-\alpha-\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha+\beta+\gamma}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\times$$

$$\times\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)=$$

$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta+2\gamma-\alpha+\beta}{4}\sin\frac{\alpha-\beta+\alpha+\beta+2\gamma}{4}=$$

$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{2\beta+2\gamma}{4}\sin\frac{2\alpha+2\gamma}{4}=$$

$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

что и требовалось доказать.

Пример I.828. Доказать тождество $\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma =$

$$= \frac{1}{4}(\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)-$$

$$-\cos(\alpha+\beta-\gamma)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)).$$

Решение. Преобразуем правую часть данного тождества:

$$\frac{1}{4}(\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)-$$

$$-(\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\beta+\gamma))=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma+\beta+\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma-\beta-\gamma+\alpha}{2}-\right.$$

$$\left.-2\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma+\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma-\alpha-\beta-\gamma}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(2\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma)=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\gamma(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\gamma\cdot 2\sin\frac{\alpha-\beta+\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}=$$

$$=\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.829. $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha =$
$$= 4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha.$$

I.830. $\sin 5\alpha + \sin 6\alpha + \sin 7\alpha + \sin 8\alpha =$
$$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{13\alpha}{2}.$$

I.831. $\cos 5\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha + \cos 12\alpha =$
$$= 4\cos\frac{3\alpha}{2}\cos 2\alpha\cos\frac{17\alpha}{2}.$$

I.832. $\sin 5\alpha - \sin 6\alpha - \sin 7\alpha + \sin 8\alpha =$
$$= -4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{13\alpha}{2}.$$

I.833. $\cos 3\alpha - \cos 4\alpha - \cos 5\alpha + \cos 6\alpha =$
$$= -4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{9\alpha}{2}.$$

I.834. $\cos\left(\frac{2\pi}{5} - 2\alpha\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{10} - 2\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{5} - 2\alpha\right) +$
$$+ \sin\left(\frac{\pi}{10} - 2\alpha\right) = -\cos 2\alpha.$$

I.835. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma) =$
$$= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

I.836. $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}(\cos(\alpha + \beta + \gamma) +$
$$+ \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta - \gamma)).$$

I.837. $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{4}(\sin(\beta + \gamma - \alpha) +$
$$+ \sin(\alpha - \beta + \gamma) + \sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\alpha + \beta + \gamma)).$$

I.838. $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}(\sin(\alpha + \beta + \gamma) +$
$$+ \sin(\alpha - \beta + \gamma) + \sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma - \alpha)).$$

* * *

Пример I.839. Доказать тождество

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha - \beta) = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Решение. Преобразовав сумму $\sin\alpha + \sin\beta$ в произведение, а $\sin(\alpha - \beta)$ расписав как синус двойного аргумента, имеем: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha - \beta) =$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= 4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2},$$

что и требовалось доказать.

Пример I.840. Преобразовать в произведение выражение

$$\sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha.$$

Решение. Преобразовав сумму $\sin 3\alpha + \sin 7\alpha$ в произведение, получаем: $\sin 3\alpha + \sin 7\alpha + \sin 5\alpha =$

$$= 2\sin 5\alpha\cos 2\alpha + \sin 5\alpha = 2\sin 5\alpha\left(\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right).$$

Представив $\frac{1}{2}$ как косинус $\frac{\pi}{3}$, имеем:

$$2\sin 5\alpha\left(\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right) = 2\sin 5\alpha\left(\cos 2\alpha + \cos\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\sin 5\alpha\cdot 2\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 4\sin 5\alpha\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right).$$

Ответ: $4\sin 5\alpha\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right).$

Пример I.841. Преобразовать в произведение выражение

$$1 + \sin\alpha + \cos\alpha.$$

Решение. Применив к сумме $1 + \cos\alpha$ формулу понижения степени, а к $\sin\alpha$ формулу синуса двойного аргумента, получаем: $1 + \cos\alpha + \sin\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Представив выражение, стоящее в скобках, в виде суммы косинусов и преобразовав ее в произведение, имеем:

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2} \cdot 2\cos\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}{2}\cos\frac{\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}}{2} =$$

$$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 4\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Пример I.842. Доказать тождество

$$8\cos^4\alpha + 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1 = 2\cos\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Решение. $8\cos^4\alpha + 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1 =$

$$= 8\cos^2\alpha(\cos^2\alpha - 1) + (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) + 1 =$$

$$= 1 - 8\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \cos 3\alpha = 1 - 2\sin^2 2\alpha + \cos 3\alpha =$$

$$= \cos 4\alpha + \cos 3\alpha = 2\cos\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.843. $1 - \sin\alpha - \cos\alpha = 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ\right)$.

I.844. $1 + \sin\alpha - \cos\alpha = 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

I.845. $1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha = -4\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

I.846. $1 - 2\sin\alpha - \cos 2\alpha = -4\sin\alpha\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

I.847. $\sin 16^\circ + \sin 24^\circ + \sin 40^\circ = 4\sin 20^\circ\cos 22^\circ\cos 18^\circ$.

I.848. $\cos 16^\circ + \sin 56^\circ + \sin 50^\circ = 4\cos 25^\circ\sin 53^\circ\cos 28^\circ$.

I.849. $\cos(54^\circ + \alpha) + \cos(18^\circ - \alpha) + \sin(36^\circ + 2\alpha) =$

$$= 4\cos(18^\circ + \alpha)\sin\left(36^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(18^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

I.850. $\sin\alpha + \cos 2\alpha + \sin 3\alpha + \cos 4\alpha =$

$$= 4\cos\alpha\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{5\alpha}{2}\right).$$

I.851. $\cos\alpha + \sin 2\alpha + \cos 3\alpha + \sin 4\alpha =$

$$= 4\cos\alpha\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{5\alpha}{2}\right).$$

I.852. $1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos(\alpha - \beta) =$

$$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

I.853. $1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha =$

$$= 4\cos\alpha\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

I.854. $\sin\alpha + \sin 3\alpha - \sin 2\alpha = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{3\alpha}{2}$.

I.855. $\sin\alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin\beta = 4\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$.

I.856. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha =$

$$= 4\cos 2\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$$

I.857. $\sin(\alpha - 2\beta) + \sin(\beta - 2\alpha) - \sin(\alpha + \beta) =$

$$= -4\cos\frac{\alpha - 2\beta}{2}\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{2\alpha - \beta}{2}.$$

I.858. $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \cos 20^\circ = 0.$

I.859. $\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - \cos 25^\circ = 0.$

I.860. $\sin\alpha + \cos\alpha - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) =$

$$= \sqrt{6}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right).$$

I.861. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 4\alpha\right) + \sin(3\pi - 8\alpha) - \sin(4\pi - 12\alpha) =$

$$= 4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha.$$

I.862. $\cos\alpha + \cos(240^\circ + \alpha) + \cos(240^\circ - \alpha) = 0.$

I.863. $\sin\alpha + \sin 60^\circ + \sin(\alpha + 60^\circ) =$

$$= 2\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ\right).$$

I.864. $\sin(5\alpha + \beta) + \sin(3\alpha + \beta) + \sin 2\alpha =$

$$= 4\cos\alpha\sin\frac{5\alpha + \beta}{2}\cos\frac{3\alpha + \beta}{2}.$$

I.865. $4\cos^2\left(2\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(2\alpha - \pi) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 6\alpha\right) =$

$$= 32\sin^4\alpha\cos^2\alpha.$$

I.866. $\cos 11\alpha + 3\cos 9\alpha + 3\cos 7\alpha + \cos 5\alpha =$

$$= 8\cos 8\alpha\cos^3\alpha.$$

I.867. $1 + 2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha +$

$$+ \cos 10\alpha = 8\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha\cos 4\alpha.$$

* * *

Пример I.868. Доказать тождество

$$\operatorname{tg} 6\alpha - \operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 6\alpha\operatorname{tg} 4\alpha\operatorname{tg} 2\alpha.$$

Решение. $\operatorname{tg} 6\alpha - \operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 6\alpha\cos 4\alpha} - \operatorname{tg} 2\alpha =$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 6\alpha \cos 4\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cos 6\alpha \cos 4\alpha}{\cos 6\alpha \cos 4\alpha \cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha (\cos 2\alpha - \cos 6\alpha \cos 4\alpha)}{\cos 6\alpha \cos 4\alpha \cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha (\cos (6\alpha - 4\alpha) - \cos 6\alpha \cos 4\alpha)}{\cos 6\alpha \cos 4\alpha \cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha (\cos 6\alpha \cos 4\alpha + \sin 6\alpha \sin 4\alpha - \cos 6\alpha \cos 4\alpha)}{\cos 6\alpha \cos 4\alpha \cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha \sin 6\alpha \sin 4\alpha}{\cos 6\alpha \cos 4\alpha \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 6\alpha \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.869. Доказать тождество

$$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ = 4.$$

Решение. $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ =$

$$= (\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ) - (\operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 27^\circ) =$$

$$= \frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\cos 63^\circ \cos 27^\circ} = \frac{1}{\cos 9^\circ \sin 9^\circ} -$$

$$- \frac{1}{\sin 27^\circ \cos 27^\circ} = \frac{2}{2 \cos 9^\circ \sin 9^\circ} - \frac{2}{2 \sin 27^\circ \cos 27^\circ} =$$

$$= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2 (\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \sin 18^\circ \cos 36^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \frac{4 \cos 36^\circ}{\sin 54^\circ} = 4,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.870. $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha} = \cos 4\alpha.$

I.871. $\operatorname{ctg} 6\alpha - \operatorname{ctg} 4\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha = - \operatorname{ctg} 6\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha.$

I.872. $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha.$

I.873. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \sin 2\alpha.$

I.874. $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{\operatorname{ctg} 3\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{ctg} 4\alpha.$

I.875. $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \dfrac{8\cos 20^\circ}{\sqrt{3}}.$

I.876. $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} 5\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \sin 2\alpha.$

I.877. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{ctg} 3\alpha = \dfrac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}.$

* * *

Пример I.878. Доказать тождество

$$\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta.$$

Решение. 1-й способ. Разложив левую часть данного равенства как разность квадратов на множители, преобразовываем полученные разность и сумму синусов в произведение, а затем применяем формулу синуса двойного аргумента:

$$\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) =$$

$$= (\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta))(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)) =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}\times$$

$$\times 2\sin\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2} =$$

$$= 2\sin\beta\cos\alpha \cdot 2\sin\alpha\cos\beta =$$

$$= 2\sin\alpha\cos\alpha \cdot 2\sin\beta\cos\beta = \sin 2\alpha \sin 2\beta,$$

что и требовалось доказать.

2-й способ. Применить формулы понижения степени, затем преобразовать полученную разность косинусов в произведение: $\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) =$

$$= \frac{1 - \cos(2\alpha + 2\beta)}{2} - \frac{1 - \cos(2\alpha - 2\beta)}{2} =$$

$$= \frac{1 - \cos(2\alpha + 2\beta) - 1 + \cos(2\alpha - 2\beta)}{2} =$$

$$= \frac{\cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\alpha + 2\beta)}{2} =$$

$$= \sin\frac{2\alpha - 2\beta + 2\alpha + 2\beta}{2} \sin\frac{2\alpha + 2\beta - 2\alpha + 2\beta}{2} = \sin 2\alpha \sin 2\beta,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.879. Доказать тождество

$$1 - 4\sin^2\alpha = 4\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right).$$

Решение. $1 - 4\sin^2\alpha = 4\left(\frac{1}{4} - \sin^2\alpha\right) =$

$$= 4\left(\sin^2\frac{\pi}{6} - \sin^2\alpha\right) = 4\left(\sin\frac{\pi}{6} - \sin\alpha\right)\left(\sin\frac{\pi}{6} + \sin\alpha\right) =$$

$$= 4\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 4\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right),$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.880. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$.

I.881. $\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\beta - \alpha)$.

I.882. $\cos^2(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta$.

I.883. $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$.

I.884. $\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

I.885. $\sin^2\alpha - 0{,}75 = \sin(\alpha - 60^\circ)\sin(\alpha + 60^\circ)$.

I.886. $4\cos^2\alpha - 3 = 4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

I.887. $3 - \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{4\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)}{\cos^2\alpha}$.

I.888. $1 - 3\operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{4\sin(\alpha+60^\circ)\sin(\alpha-60^\circ)}{\sin^2\alpha}$.

* * *

Пример I.889. Доказать тождество

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Решение. Преобразовав числитель и знаменатель данной дроби в произведение, получаем: $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} =$

$$= \frac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2},$$

что и требовалось доказать.

Пример I.890. Упростить выражение

$$\frac{\cos(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ-\alpha)}{\cos(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ-\alpha)}.$$

Решение. Преобразовав числитель и знаменатель данной дроби в произведение, получаем:

$$\frac{\cos(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ-\alpha)}{\cos(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ-\alpha)} =$$

$$= \frac{2\cos\frac{45^\circ + \alpha + 45^\circ - \alpha}{2}\cos\frac{45^\circ + \alpha - 45^\circ + \alpha}{2}}{-2\sin\frac{45^\circ + \alpha + 45^\circ - \alpha}{2}\sin\frac{45^\circ + \alpha - 45^\circ + \alpha}{2}} =$$

$$= -\frac{\cos 45^\circ \cos\alpha}{\sin 45^\circ \sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $-\operatorname{ctg}\alpha$.

Пример I.891. Упростить выражение

$$\frac{2\cos 10\alpha + 2\cos 6\alpha + 4\cos 2\alpha}{\sin 6\alpha + \sin 2\alpha}.$$

Решение. $\dfrac{2\cos 10\alpha + 2\cos 6\alpha + 4\cos 2\alpha}{\sin 6\alpha + \sin 2\alpha} =$

$$= \frac{2(\cos 10\alpha + \cos 6\alpha) + 4\cos 2\alpha}{2\sin 4\alpha\cos 2\alpha} = \frac{4\cos 8\alpha\cos 2\alpha + 4\cos 2\alpha}{2\sin 4\alpha\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{4\cos 2\alpha(\cos 8\alpha + 1)}{2\sin 4\alpha\cos 2\alpha} = \frac{2(\cos 8\alpha + 1)}{\sin 4\alpha} =$$

$$= \frac{4\cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha} = 4\operatorname{ctg} 4\alpha\cos 4\alpha.$$

Ответ: $4\operatorname{ctg} 4\alpha\cos 4\alpha$.

Пример I.892. Упростить выражение

$$\frac{\sin\alpha - \sin 3\alpha - \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}.$$

Решение. $\dfrac{\sin\alpha - \sin 3\alpha - \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} =$

$$= \frac{(\sin\alpha - \sin 3\alpha) + (\sin 7\alpha - \sin 5\alpha)}{(\cos\alpha - \cos 3\alpha) + (\cos 5\alpha - \cos 7\alpha)} =$$

$$= \frac{-2\sin\alpha\cos 2\alpha + 2\sin\alpha\cos 6\alpha}{2\sin 2\alpha\sin\alpha + 2\sin 6\alpha\sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha(\cos 6\alpha - \cos 2\alpha)}{2\sin\alpha(\sin 2\alpha + \sin 6\alpha)} =$$

$$= \frac{-2\sin 4\alpha \sin 2\alpha}{2\sin 4\alpha \cos 2\alpha} = -\operatorname{tg} 2\alpha.$$

Ответ: $-\operatorname{tg} 2\alpha$.

Упражнения

Доказать тождества:

I.893. $\dfrac{\sin 2\alpha - \sin 40^\circ}{\cos 2\alpha + \cos 40^\circ} = \operatorname{tg}(\alpha - 20^\circ).$

I.894. $\dfrac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \operatorname{tg}\dfrac{\beta - \alpha}{2}.$

I.895. $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$

I.896. $\dfrac{\sin 19^\circ - \sin 37^\circ}{\cos 65^\circ - \cos 47^\circ} = \dfrac{1}{2\sin 18^\circ}.$

I.897. $\dfrac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg}\alpha.$

I.898. $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{3\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}.$

I.899. $\dfrac{\sin(45^\circ + \alpha) + \sin(45^\circ - \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha)} = \operatorname{ctg}\alpha.$

I.900. $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}\alpha.$

I.901. $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)} = -\operatorname{ctg}\alpha.$

I.902. $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right).$

I.903. $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha + 15^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha - 15^\circ)}{\operatorname{tg}(\alpha + 15^\circ) - \operatorname{tg}(\alpha - 15^\circ)} = 2\sin 2\alpha.$

I.904. $\dfrac{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)}{\operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha) + \operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha)} = \sin 2\alpha.$

I.905. $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha.$

I.906. $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$

I.907. $\dfrac{\cos\alpha - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha - \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 5\alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha.$

I.908. $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma)} =$

$$= \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

I.909. $\dfrac{\sin\alpha + 2\sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\sin 3\alpha + 2\sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}.$

I.910. $\dfrac{\sin\alpha - 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$

I.911. $\dfrac{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1} = 2\cos\alpha.$

I.912. $\dfrac{2(\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1)}{\cos\alpha - \sin\alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha}.$

I.913. $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha - \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}.$

I.914. $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos(\alpha-\beta)}.$

I.915. $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 6\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha} = -4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha.$

I.916. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta) + \sin\alpha} - \dfrac{\cos(\alpha+\beta) + \cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha} =$

$$= \frac{2\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\beta}.$$

I.917. $\cos\alpha - \dfrac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{2\cos\alpha} =$

$$= \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$$

* * *

8. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)).$$

Пример I.918. Преобразовать в сумму произведение:

а) $\sin 15^\circ \cos 10^\circ$;

б) $\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{8}$;

в) $\cos\alpha\cos 3\alpha$;

г) $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;

д) $2\sin 2\alpha\cos 5\alpha$.

Решение.

а) $\sin 15^\circ \cos 10^\circ = \frac{1}{2}(\sin(15^\circ - 10^\circ) + \sin(15^\circ + 10^\circ)) =$

$$= \frac{1}{2}(\sin 5^\circ + \sin 25^\circ).$$

б) $\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{8}\right)\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}\right) - \cos\frac{5\pi}{24}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} - \cos\frac{5\pi}{24}\right).$$

в) $\cos\alpha\cos 3\alpha = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - 3\alpha) + \cos(\alpha + 3\alpha)) =$

$$= \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha).$$

г) $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) =$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta-\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta+\alpha-\beta)) =$$

$$= \sin 2\beta + \sin 2\alpha.$$

д) $2\sin 2\alpha\cos 5\alpha =$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}(\sin(2\alpha - 5\alpha) + \sin(2\alpha + 5\alpha)) =$$

$$= \sin(-3\alpha) + \sin 7\alpha = \sin 7\alpha - \sin 3\alpha.$$

Упражнения

Преобразовать данные произведения в сумму:

I.919. $\cos 15^\circ \cos 5^\circ$.

I.920. $2\cos 18^\circ \cos 66^\circ$.

I.921. $2\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{5}$.

I.922. $2\cos 3\alpha \cos 2\alpha$.

I.923. $2\cos(2\alpha + \beta)\cos(\alpha - 3\beta)$.

I.924. $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$.

I.925. $2\cos\alpha\cos(\alpha + 2)$.

I.926. $2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$.

I.927. $\sin 15^\circ \cos 40^\circ$.

I.928. $2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{40}$.

I.929. $\sin 6\alpha \cos 4\alpha$.

I.930. $2\sin 8\alpha \cos 20\alpha$.

I.931. $\sin(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta)$.

I.932. $\sin 28^\circ \sin 24^\circ$.

I.933. $\sin 48^\circ \sin 74^\circ$.

I.934. $2\sin\alpha\sin 2\alpha$.

I.935. $2\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$.

I.936. $\sin 5\alpha \sin 3\alpha$.

I.937. $\sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha)$.

I.938. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$.

* * *

Пример I.939. Преобразовать в сумму произведение:

а) $\sin 10^\circ \sin 8^\circ \cos 6^\circ$;

б) $4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \sin \frac{3\alpha}{2}$;

в) $\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha - \gamma) \cos(\gamma - \beta)$.

Решение. *а)* Преобразовав произведение $\sin 8^\circ \cos 6^\circ$ в сумму, получаем: $\sin 10^\circ \sin 8^\circ \cos 6^\circ =$

$$= \sin 10^\circ \cdot \frac{1}{2}(\sin 2^\circ + \sin 14^\circ) =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 10^\circ \sin 2^\circ + \sin 14^\circ \sin 10^\circ).$$

Применив повторно формулы преобразования произведения в сумму (теперь для произведения синусов), имеем:

$$\frac{1}{2}(\sin 10^\circ \sin 2^\circ + \sin 14^\circ \sin 10^\circ) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\cos 8^\circ - \cos 12^\circ) + \frac{1}{2}(\cos 4^\circ - \cos 24^\circ)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 8^\circ - \cos 12^\circ + \cos 4^\circ - \cos 24^\circ).$$

Ответ: $\frac{1}{4}(\cos 8^\circ - \cos 12^\circ + \cos 4^\circ - \cos 24^\circ)$.

б) Применив дважды формулы преобразования произведения в сумму, а также формулу синуса двойного аргумента, получаем: $4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \sin \frac{3\alpha}{2} = 4 \sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3\alpha}{2}\right) =$

$$= 2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha.$$

Ответ: $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$.

в) $\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha - \gamma) \cos(\gamma - \beta) =$

$$= \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)(\cos(\alpha - \gamma - \gamma + \beta) + \cos(\alpha - \gamma + \gamma - \beta)) =$$

$$= \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)(\cos(\alpha + \beta - 2\gamma) + \cos(\alpha - \beta)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta - 2\gamma) + \cos^2(\alpha - \beta)) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta - \alpha - \beta + 2\gamma) + \cos(\alpha - \beta + \alpha + \beta - 2\gamma)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\alpha - 2\beta)\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\cos(2\gamma - 2\beta) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cos(2\alpha - 2\gamma) + 1 + \cos(2\alpha - 2\beta)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(\cos(2\gamma - 2\beta) + \cos(2\alpha - 2\gamma) + \cos(2\alpha - 2\beta) + 1).$$

Отметим, что была использована также формула понижения степени для квадрата косинуса.

Ответ: $\frac{1}{4}(\cos(2\gamma - 2\beta) + \cos(2\alpha - 2\gamma) + \cos(2\alpha - 2\beta) + 1)$.

Пример I.940. Доказать тождество

$$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{5\alpha}{2} = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha.$$

Решение. $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{5\alpha}{2} =$

$$= 2\cos\alpha\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{5\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{5\alpha}{2}\right)\right) =$$

$$= 2\cos\alpha(\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) = 2\cos 2\alpha\cos\alpha + 2\cos 3\alpha\cos\alpha =$$

$$= \cos(2\alpha - \alpha) + \cos(2\alpha + \alpha) + \cos(3\alpha - \alpha) + \cos(3\alpha + \alpha) =$$

$$= \cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.941. Доказать тождество

$$4\cos\alpha\cos(60^\circ - \alpha)\cos(60^\circ + \alpha) = \cos 3\alpha.$$

Решение. Дважды применяя формулу преобразования произведения косинусов в сумму, получаем:

$$4\cos\alpha\cos(60^\circ - \alpha)\cos(60^\circ + \alpha) =$$

$$= 2\cos\alpha(\cos(60^\circ - \alpha - 60^\circ - \alpha) + \cos(60^\circ - \alpha + 60^\circ + \alpha)) =$$

$$= 2\cos\alpha(\cos 2\alpha + \cos 120^\circ) = 2\cos\alpha\left(\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha = \cos\alpha + \cos 3\alpha - \cos\alpha = \cos 3\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.942. Доказать тождество $\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma =$

$$= \frac{1}{4}(\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)-$$

$$-\cos(\alpha+\beta-\gamma)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)).$$

Решение. $\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma =$

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha(\sin(\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)) =$$

$$= \frac{1}{4}(\cos(\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\beta-\gamma)-$$

$$-\cos(\alpha+\beta+\gamma)) = \frac{1}{4}(\cos(\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+$$

$$+\cos(\beta+\gamma-\alpha)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)),$$

что и требовалось доказать.

Пример I.943. Упростить выражение

$$\sin 2\alpha + 2\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12}+\alpha\right).$$

Решение. $\sin 2\alpha + 2\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12}+\alpha\right) =$

$$= \sin 2\alpha + \sin\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha-\frac{5\pi}{12}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha+\frac{5\pi}{12}+\alpha\right) =$$

$$= \sin 2\alpha + \sin(-2\alpha)+\sin\frac{5\pi}{6} =$$

$$= \sin 2\alpha - \sin 2\alpha + \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Пример I.944. Доказать тождество

$$\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ = 1.$$

Решение. $\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ = \frac{1-4\sin 70^\circ\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ} =$

$$= \frac{1 - 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)}{2 \sin 10^\circ} = \frac{1 - 2\left(\frac{1}{2} - \sin 10^\circ\right)}{2 \sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{1 - 1 + 2 \sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Преобразовать в сумму произведения:

I.945. $4 \sin 10^\circ \cos 8^\circ \cos 6^\circ$.

I.946. $4 \sin 25^\circ \cos 15^\circ \sin 5^\circ$.

I.947. $4 \sin 12^\circ \sin 14^\circ \sin 16^\circ$.

I.948. $2 \cos 25^\circ \cos 35^\circ \cos 15^\circ$.

I.949. $\sin \alpha \sin \beta \cos (\alpha + \beta)$.

I.950. $\sin \alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha$.

I.951. $\sin (45^\circ + \alpha) \sin (45^\circ - \alpha) \cos 2\alpha$.

Доказать тождества:

I.952. $4 \sin 20^\circ \cos 50^\circ \cos 80^\circ =$

$$= \frac{1}{2} - \sin 10^\circ - \cos 20^\circ + \sin 50^\circ.$$

I.953. $4 \cos 15^\circ \sin 20^\circ \sin 40^\circ =$

$$= \cos 5^\circ - \cos 75^\circ + \cos 35^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

I.954. $4 \sin \alpha \sin (60^\circ - \alpha) \sin (60^\circ + \alpha) = \sin 3\alpha$.

I.955. $16 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = 1$.

I.956. $16 \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = 3$.

I.957. $4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin \frac{3\alpha}{2}$.

I.958. $\cos 55^\circ \cos 65^\circ \cos 175^\circ = -\frac{1 + \sqrt{3}}{8\sqrt{2}}$.

I.959. $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4} (\cos (\alpha + \beta + \gamma) +$

$+ \cos (\beta + \gamma - \alpha) + \cos (\gamma + \alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta - \gamma))$.

I.960. $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{4}(\sin(\beta+\gamma-\alpha) +$
$+ \sin(\alpha-\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) - \sin(\alpha+\beta+\gamma))$.

I.961. $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}(\sin(\alpha+\beta+\gamma) +$
$+ \sin(\alpha-\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) - \sin(\beta+\gamma-\alpha))$.

I.962. $6\cos 80^\circ - \frac{3\sqrt{3}}{2\cos 50^\circ} = -3$.

I.963. $8\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = 1$.

I.964. $4\cos 2\alpha \cos\left(\frac{\alpha}{2}+30^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-30^\circ\right) =$
$= \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$.

I.965. $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{5\alpha}{2} = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$.

I.966. $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = 3$.

Упростить выражения:

I.967. $2\sin 10^\circ \sin 40^\circ + \cos 50^\circ$.

I.968. $2\cos 20^\circ \cos 40^\circ - \cos 20^\circ$.

I.969. $\sin\alpha\,(1 + 2\cos 2\alpha)$.

I.970. $2\cos\alpha\cos 2\alpha - \cos 3\alpha$.

I.971. $\cos 2\alpha + 2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.

I.972. $2\sin 2\alpha\sin\alpha + \cos 3\alpha$.

I.973. $\sin\alpha - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+15^\circ\right)$.

I.974. $\sin\alpha\sin(\beta-\gamma) + \sin\beta\sin(\gamma-\alpha) + \sin\gamma\sin(\alpha-\beta)$.

I.975. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma) +$
$+ \sin(\gamma+\alpha)\sin(\gamma-\alpha)$.

* * *

Пример I.976. Преобразовать в сумму произведение

$$8\cos 1^\circ \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ.$$

Решение. $8\cos 1^\circ \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ =$

$$= 4\cos 1^\circ \cos 2^\circ (\cos 4^\circ + \cos 12^\circ) =$$

$$= 2\cos 1^\circ (2\cos 2^\circ \cos 4^\circ + 2\cos 2^\circ \cos 12^\circ) =$$

$$= 2\cos 1^\circ (\cos 2^\circ + \cos 6^\circ + \cos 10^\circ + \cos 14^\circ) =$$

$$= 2\cos 1^\circ \cos 2^\circ + 2\cos 1^\circ \cos 6^\circ + 2\cos 1^\circ \cos 10^\circ +$$

$$+ 2\cos 1^\circ \cos 14^\circ = \cos 1^\circ + \cos 3^\circ + \cos 5^\circ + \cos 7^\circ + \cos 9^\circ +$$

$$+ \cos 11^\circ + \cos 13^\circ + \cos 15^\circ.$$

Ответ: $\cos 1^\circ + \cos 3^\circ + \cos 5^\circ + \cos 7^\circ + \cos 9^\circ +$
$+ \cos 11^\circ + \cos 13^\circ + \cos 15^\circ.$

Пример I.977. Доказать тождество

$$\sin 3\alpha - \sin 2\alpha \cos \alpha = \sin \alpha \cos 2\alpha.$$

Решение. $\sin 3\alpha - \sin 2\alpha \cos \alpha =$

$$= \sin 3\alpha - \frac{1}{2}(\sin \alpha + \sin 3\alpha) = \sin 3\alpha - \frac{1}{2}\sin \alpha - \frac{1}{2}\sin 3\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 3\alpha - \frac{1}{2}\sin \alpha = \frac{1}{2}(\sin 3\alpha - \sin \alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha.$$

Пример I.978. Доказать тождество

$$1 + 2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha + 2\cos 6\alpha = \frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha}.$$

Решение. Рассмотрим разность левой и правой частей данного равенства:

$$1 + 2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha + 2\cos 6\alpha - \frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{\sin \alpha + 2\sin \alpha \cos 2\alpha + 2\sin \alpha \cos 4\alpha + 2\sin \alpha \cos 6\alpha - \sin 7\alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{\sin \alpha - \sin \alpha + \sin 3\alpha - \sin 3\alpha}{\sin \alpha} +$$

$$+\frac{\sin 5\alpha - \sin 5\alpha + \sin 7\alpha - \sin 7\alpha}{\sin\alpha} = 0.$$

Следовательно, данное тождество верно.

Упражнения

Преобразовать в сумму произведения:

I.979. $8\sin 9^\circ \cos 4^\circ \cos 2^\circ \cos 1^\circ$.

I.980. $8\sin\alpha\cos 2\alpha\sin 3\alpha\cos 4\alpha$.

I.981. $4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha\sin 4\alpha$.

Доказать тождества:

I.982. $\cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 4\alpha\sin\alpha = \cos 3\alpha\cos 2\alpha$.

I.983. $\sin 1^\circ + \sin 91^\circ + 2\sin 203^\circ(\sin 112^\circ + \sin 158^\circ) = 0$.

I.984. $\cos 35^\circ + \cos 125^\circ + 2\sin 185^\circ(\sin 130^\circ + \sin 140^\circ) = 0$.

I.985. $\cos\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha - \cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + 2\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha\cos\frac{3\alpha}{2}$.

I.986. $\cos\frac{11\pi}{56}\cos\frac{3\pi}{56} - \sin\frac{5\pi}{21}\sin\frac{2\pi}{21} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}$.

I.987. $1 + 2\cos 7\alpha = \frac{\sin 10{,}5\alpha}{\sin 3{,}5\alpha}$.

I.988. $1 - 2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha - 2\cos 6\alpha = -\frac{\cos 7\alpha}{\cos\alpha}$.

9. Формулы, выражающие $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Пример I.989. Дано: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 3$. Найти $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Решение. $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\cdot 3}{1+9} = 0{,}6,$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-9}{1+9} = -0{,}8.$$

$$\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}6 - 0{,}8 = -0{,}2.$$

Ответ: $-0{,}2$.

Пример I.990. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = 2$. Найти $\sin 4\alpha$.

Решение. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = 0{,}5,$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot 0{,}5}{1-0{,}25} = \frac{1}{0{,}75} = \frac{4}{3},$$

$$\sin 4\alpha = \frac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{\frac{8}{3}}{1+\frac{16}{9}} = \frac{24}{25}.$$

Ответ: $\dfrac{24}{25}$.

Пример I.991. Дано: $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$. Найти $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$.

Решение.

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = -\cos 2\alpha.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1-\frac{16}{9}}{1+\frac{16}{9}} = -\frac{7}{25},$$

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = -\cos 2\alpha = \frac{7}{25}.$$

Ответ: $\frac{7}{25}$.

Пример I.992. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$. Найти $\frac{5}{6 + 7\sin 2\alpha}$.

Решение. $\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2 \cdot 0{,}2}{1 + 0{,}04} = \frac{5}{13}$,

$$\frac{5}{6 + 7\sin 2\alpha} = \frac{5}{6 + 7 \cdot \frac{5}{13}} = \frac{65}{113}.$$

Ответ: $\frac{65}{113}$.

Пример I.993. Найти $\cos 2\alpha$, если известно, что

$$2\operatorname{ctg}^2\alpha + 7\operatorname{ctg}\alpha + 3 = 0 \text{ и } \frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}.$$

Решение. Рассматривая данное равенство как квадратное уравнение относительно $\operatorname{ctg}\alpha$, находим $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2}$ или $\operatorname{ctg}\alpha = -3$.

Так как $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$, то $\operatorname{ctg}\alpha > \operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4} = -1$. (Напомним, что если α и β — углы IV четверти и $\alpha > \beta$, то $\operatorname{ctg}\alpha < \operatorname{ctg}\beta$). Следовательно, в данном случае $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2$. Тогда $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}$.

Ответ: $-\frac{3}{5}$.

Упражнения

I.994. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 5$.

I.995. Найти $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -3$.

I.996. Найти $\cos 4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -4$.

I.997. Найти $\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

I.998. Дано: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 6$. Найти $\sin\alpha - \cos\alpha$.

I.999. Вычислить $\frac{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

I.1000. Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{5}$. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

I.1001. Вычислить $1 + 5\sin 2\alpha - \frac{3}{\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

I.1002. Вычислить $2 - 13\cos 2\alpha + \sin^{-1} 2\alpha$, если

$$\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{5}.$$

I.1003. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}3$. Найти $\frac{2}{3 + 4\cos 2\alpha}$.

I.1004. Найти $\sin 2\alpha$, если известно, что

$$2\operatorname{tg}^2\alpha - 7\operatorname{tg}\alpha + 3 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

* * *

§3. Применение всех формул

Пример I.1005. Упростить выражение

$$\frac{\sin 4\alpha \cos 2\alpha\,(1-\cos 2\alpha)}{(\sin 3\alpha-\sin\alpha)(\cos 3\alpha-\cos 5\alpha)}.$$

Решение. Применяя формулы понижения степени и преобразования разности тригонометрических функций в произведение, получаем:

$$\frac{\sin 4\alpha \cos 2\alpha\,(1-\cos 2\alpha)}{(\sin 3\alpha-\sin\alpha)(\cos 3\alpha-\cos 5\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin 4\alpha \cos 2\alpha\cdot 2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos 2\alpha\cdot 2\sin\alpha\sin 4\alpha}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример I.1006. Упростить выражение

$$\left(\frac{1}{\cos 3\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}\right).$$

Решение. Применяя формулы сложения, преобразования суммы в произведение, двойного аргумента, получаем:

$$\left(\frac{1}{\cos 3\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}\right)=$$

$$=\frac{\cos\alpha+\cos 3\alpha}{\cos 3\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos 2\alpha\cos\alpha}{\cos 3\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{\cos 3\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{4\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=4\operatorname{ctg} 2\alpha.$$

Ответ: $4\operatorname{ctg} 2\alpha$.

Упражнения

Упростить выражения:

I.1007. $\dfrac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-1+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}$.

I.1008. $\dfrac{\sin 2\alpha\cos 4\alpha\,(1+\cos 2\alpha)}{(\sin 3\alpha+\sin\alpha)(\cos 3\alpha+\cos 5\alpha)}$.

I.1009. $\dfrac{\left(1-8\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1\right)}{\cos 3\alpha+\cos\alpha}$.

I.1010. $\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}\right)\cdot\dfrac{\cos\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha}$.

I.1011. $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2}2\alpha-1}+\dfrac{1+\cos 4\alpha}{\sin^{-2}2\alpha-1}$.

I.1012. $\dfrac{(\cos\alpha-\cos 3\alpha)(\sin\alpha+\sin 3\alpha)}{1-\cos 4\alpha}$.

I.1013. $\left(\dfrac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 4\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\dfrac{1}{\sin 3\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)$.

I.1014. $\left(\dfrac{1}{\sin 2\alpha}-\dfrac{1}{\sin 6\alpha}\right)\cdot\dfrac{\cos 7\alpha-\cos 5\alpha}{\sin^2 2\alpha-\cos^2 2\alpha}$.

I.1015. $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha-\sin\alpha}-\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha}$.

* * *

Пример I.1016. Доказать тождество

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2-(\sin\alpha-\sin\beta)^2=-4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos(\alpha+\beta).$$

Решение. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2-(\sin\alpha-\sin\beta)^2=$

$$=\left(-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2=$$

$$=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}-4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$=-4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=-4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos(\alpha+\beta),$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.1017. $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

I.1018. $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

I.1019. $\sin\alpha(\sin\alpha + \sin\beta) +$

$$+ \cos\alpha(\cos\alpha + \cos\beta) = 2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

I.1020. $\sin\alpha(\sin\alpha - \sin\beta) +$

$$+ \cos\alpha(\cos\alpha - \cos\beta) = 2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

I.1021. $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 - (\sin\alpha + \sin\beta)^2 =$

$$= 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos(\alpha+\beta).$$

I.1022. $(\cos\alpha - \cos 2\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin 2\beta)^2 = 4\sin\dfrac{\alpha+2\beta}{2}$.

* * *

Пример I.1023. Упростить выражение

$$\frac{\cos\left(\dfrac{5\pi}{2} - 6\alpha\right) + \sin(\pi + 4\alpha) + \sin(3\pi - \alpha)}{\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} + 6\alpha\right) + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos(\alpha + 2\pi)}.$$

Решение. Применив формулы приведения, преобразования суммы и разности в произведение, получаем:

$$\frac{\cos\left(\dfrac{5\pi}{2} - 6\alpha\right) + \sin(\pi + 4\alpha) + \sin(3\pi - \alpha)}{\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} + 6\alpha\right) + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos(\alpha + 2\pi)} =$$

$$= \frac{\sin 6\alpha - \sin 4\alpha + \sin\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 4\alpha + \cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos 5\alpha + \sin\alpha}{2\cos\alpha\cos 5\alpha + \cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha(2\cos 5\alpha + 1)}{\cos\alpha(2\cos 5\alpha + 1)} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha$.

Пример I.1024. Упростить выражение

$$\frac{1+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(4\alpha+\pi)+\cos\left(4\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}.$$

Решение. Применив формулы приведения, понижения степени, двойного аргумента, получаем:

$$\frac{1+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(4\alpha+\pi)+\cos\left(4\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{1+\cos 4\alpha+\sin 4\alpha}{1-\cos 4\alpha+\sin 4\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos^2 2\alpha+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2\sin^2 2\alpha+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos 2\alpha(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)}{2\sin 2\alpha(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)}=\operatorname{ctg} 2\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

Упражнения

Доказать тождества:

I.1025. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)=$
$=4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha.$

I.1026. $\dfrac{\sin(2\alpha+2\pi)+2\sin(4\alpha-\pi)+\sin(6\alpha+4\pi)}{\cos(6\pi-2\alpha)+2\cos(4\alpha-\pi)+\cos(6\alpha-4\pi)}=$
$=\operatorname{tg} 4\alpha.$

I.1027. $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin(2\alpha-\beta)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos(2\alpha+\beta)+\cos(2\alpha-\beta)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}=\operatorname{tg} 2\alpha.$

I.1028. $\dfrac{1+\cos(2\alpha+630^\circ)+\sin(2\alpha+810^\circ)}{1-\cos(2\alpha-630^\circ)+\sin(2\alpha+990^\circ)}=\operatorname{ctg}\alpha.$

I.1029. $\dfrac{1+\cos(2\alpha-2\pi)+\cos(4\alpha+2\pi)-\cos(6\alpha-\pi)}{\cos(2\pi-2\alpha)+2\cos^2(2\alpha+\pi)-1}=$
$=2\cos 2\alpha.$

I.1030. $1 + \sin\left(3\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)\cos 2\alpha +$

$$+ 2\sin 3\alpha \cos(3\pi - \alpha)\sin(\alpha - \pi) = 2\sin^2\frac{5\alpha}{2}.$$

I.1031. $\dfrac{\cos^2(4\alpha - 3\pi) - 4\cos^2(2\alpha - \pi) + 3}{\cos^2(4\alpha + 3\pi) + 4\cos^2(2\alpha + \pi) - 1} = \operatorname{tg}^4 2\alpha.$

I.1032. $\dfrac{\cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{2} + 2\alpha\right)}{(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha.$

I.1033. $\dfrac{\sin^2(\alpha - \pi) - 4\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) - 4 + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)} = \operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}.$

* * *

Пример I.1034. Упростить выражение

$$\frac{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Решение. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha} =$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right)} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha}{\sin^2\operatorname{tg}^2\alpha} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример I.1035. Упростить выражение

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \operatorname{ctg}^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Решение. $$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos 2\alpha\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha}{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha.$$

Ответ: $\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$.

Пример I.1036. Упростить выражение

$$\frac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin^4\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)-1}.$$

Решение. $$\frac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin^4\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)-1}=$$

$$=\frac{\cos^4\alpha}{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}=\frac{\cos^4\alpha}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}=$$

$$=\frac{\cos^4\alpha}{-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=-\frac{\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha$.

Упражнения

Упростить выражения:

I.1037. $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$.

I.1038. $\dfrac{\cos^2(\alpha-270^\circ)}{\sin^{-2}(\alpha+90^\circ)-1}+\dfrac{\sin^2(\alpha+270^\circ)}{\cos^{-2}(\alpha-90^\circ)-1}$.

I.1039. $\dfrac{\sin^2\left(4\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\alpha\right)}$.

I.1040. $\dfrac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$.

I.1041. $\dfrac{1 - \cos(8\alpha - 3\pi)}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha}$.

I.1042. $\dfrac{4\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{7\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}^2\left(5\pi + \dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

I.1043. $\dfrac{4\sin^4\left(2\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right)}{\sin^4\left(2\alpha - \dfrac{9\pi}{2}\right) + \cos^4\left(\dfrac{5\pi}{2} - 2\alpha\right) - 1}$.

* * *

Пример I.1044. Преобразовать в произведение выражение

$$1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

Решение. $1 - \sin\left(\dfrac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2\dfrac{\alpha}{4} + \sin^2\dfrac{\alpha}{4} =$

$$= 1 + \sin\frac{\alpha}{2} - \left(\cos^2\frac{\alpha}{4} - \sin^2\frac{\alpha}{4}\right) = 1 - \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2\sin^2\frac{\alpha}{4} + 2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4} = 2\sin\frac{\alpha}{4}\left(\sin\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\alpha}{4}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{4}\left(\sin\frac{\alpha}{4} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right)\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{4}\cdot 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right).$$

Ответ: $2\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{4}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{4}\right)$.

Пример I.1045. Преобразовать в произведение выражение

$$1 - \cos(\pi - 8\alpha) - \cos(\pi + 4\alpha).$$

Решение. $1 - \cos(\pi - 8\alpha) - \cos(\pi + 4\alpha) =$

$$= 1 + \cos 8\alpha + \cos 4\alpha = 2\cos^2 4\alpha + \cos 4\alpha =$$

$$= 2\cos 4\alpha\left(\cos 4\alpha + \frac{1}{2}\right) = 2\cos 4\alpha\left(\cos 4\alpha + \cos\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 4\cos 4\alpha\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right).$$

Упражнения

Преобразовать в произведение выражения:

I.1046. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha.$

I.1047. $\sin 4\alpha - 2\cos^2 2\alpha + 1.$

I.1048. $1 + \cos(2\alpha + 270°) + \sin(2\alpha + 450°).$

I.1049. $1 - \cos(2\alpha - 270°) + \sin(2\alpha + 270°).$

I.1050. $1 - \cos(2\alpha - \pi) + \cos(4\alpha - 2\pi).$

I.1051. $2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{3\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) - 1.$

I.1052. $1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3\alpha\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{2} + 3\alpha\right).$

* * *

Пример I.1053. Доказать тождество

$$\sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha\right) = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Решение. Применив формулы понижения степени, преобразования суммы в произведение, получаем:

$$\sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha\right) =$$

$$= \frac{1 - \cos\left(\frac{15\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} - \frac{1 + \cos\left(\frac{17\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} =$$

$$= \frac{1 - \cos\left(\frac{15\pi}{4} - 4\alpha\right) - 1 - \cos\left(\frac{17\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} =$$

$$= -\frac{\cos\left(\frac{17\pi}{4} - 4\alpha\right) + \cos\left(\frac{15\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} =$$

$$= -\cos(4\pi - 4\alpha)\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}},$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.1054. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$.

I.1055. $\sin^2\left(\frac{9\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{17\pi}{8} - \alpha\right) = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$.

I.1056. $\cos^2\left(\frac{5\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{15\pi}{8} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha$.

I.1057. $\cos^2\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right) = \sin 4\alpha$.

I.1058. $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + 2\beta\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta\right) = \sin\alpha\sin 4\beta$.

I.1059. $\cos^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1 = -\sin 2\alpha\sin 4\beta$.

I.1060. $\sin^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1 = -\cos 2\alpha\cos 4\beta$.

I.1061. $\sin^2\left(\beta + \frac{5\pi}{12}\right) - \cos^2\left(\beta + \frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\beta$.

I.1062. $\cos^4 x + \sin^2 y + \frac{1}{4}\sin^2 2x - 1 =$

$= \sin(y + x)\sin(y - x)$.

I.1063. $\sin^2\alpha + \sin^2(120^\circ - \alpha) + \sin^2(120^\circ + \alpha) = \frac{3}{2}$.

* * *

Пример I.1064. Доказать тождество

$$\sin^2 2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right)\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}.$$

Решение. Применив формулы понижения степени и преобразования произведения в сумму, получаем:

$$\sin^2 2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right)\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} - \frac{1}{2}\left(\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2\alpha\right) + \right.$$

$$\left. + \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - 2\alpha\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \cos 4\alpha - \sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \cos 4\alpha + \cos 4\alpha - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4},$$

что и требовалось доказать.

Пример I.1065. Упростить выражение

$$\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta.$$

Решение. $\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta =$

$$= \frac{1 + \cos(2\alpha + 2\beta)}{2} + \frac{1 + \cos(2\alpha - 2\beta)}{2} -$$

$$- \frac{1}{2}(\cos(2\alpha - 2\beta) + \cos(2\alpha + 2\beta)) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha + 2\beta) +$$

$$+ 1 + \cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\alpha + 2\beta)) = 1.$$

Ответ: 1.

Пример I.1066. Упростить выражение

$$\cos^2(45^\circ - \alpha) - \cos^2(60^\circ + \alpha) - \cos 75^\circ \sin(75^\circ - 2\alpha).$$

Решение.

$$\cos^2(45^\circ - \alpha) - \cos^2(60^\circ + \alpha) - \cos 75^\circ \sin(75^\circ - 2\alpha) =$$

$$= \frac{1 + \cos(90^\circ - 2\alpha)}{2} - \frac{1 + \cos(120^\circ + 2\alpha)}{2} -$$

$$-\frac{\sin(75^\circ-2\alpha-75^\circ)+\sin(75^\circ-2\alpha+75^\circ)}{2}=$$

$$=\frac{1+\sin 2\alpha-1-\cos(90^\circ+(30^\circ+2\alpha))+\sin 2\alpha-\sin(150^\circ-2\alpha)}{2}=$$

$$=\frac{2\sin 2\alpha+\sin(30^\circ+2\alpha)-\sin(180^\circ-(30^\circ+2\alpha))}{2}=$$

$$=\frac{2\sin 2\alpha+\sin(30^\circ+2\alpha)-\sin(30^\circ+2\alpha)}{2}=\sin 2\alpha.$$

Ответ: $\sin 2\alpha$.

Упражнения

Упростить выражения:

I.1067. $\sin^2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$.

I.1068. $\cos^2(45^\circ-\alpha)-\cos^2(60^\circ+\alpha)-\cos 75^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)$.

I.1069. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

I.1070. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

I.1071. $\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\sin 2\alpha\sin 2\beta$.

I.1072. $\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+$
$+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\sin^2\alpha$.

I.1073. $\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\beta}{2}-\alpha\right)$.

I.1074. $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sin\frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}+2\alpha\right)$.

I.1075. $\cos^2(45^\circ+\alpha)-\cos^2(30^\circ-\alpha)+$
$+\sin 15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)$.

I.1076.

$$\frac{\sin^2(135^\circ-\alpha)-\sin^2(210^\circ-\alpha)-\sin 195^\circ\cos(165^\circ-2\alpha)}{\cos^2(225^\circ+\alpha)-\cos^2(210^\circ+\alpha)+\sin 15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)}.$$

* * *

Пример I.1077. Доказать тождество

$$\sin^2(\alpha - 2\beta) - \cos^2\alpha - \cos^2 2\beta = -2\cos\alpha\cos 2\beta\cos(\alpha - 2\beta).$$

Решение. $\sin^2(\alpha - 2\beta) - \cos^2\alpha - \cos^2 2\beta =$

$$= \frac{1 - \cos(2\alpha - 4\beta)}{2} - \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \cos^2 2\beta =$$

$$= \frac{1 - \cos(2\alpha - 4\beta) - 1 - \cos 2\alpha}{2} - \cos^2 2\beta =$$

$$= -\frac{\cos(2\alpha - 4\beta) + \cos 2\alpha}{2} - \cos^2 2\beta =$$

$$= -\cos(2\alpha - 2\beta)\cos 2\beta - \cos^2 2\beta =$$

$$= -\cos 2\beta(\cos(2\alpha - 2\beta) + \cos 2\beta) =$$

$$= -\cos 2\beta \cdot 2\cos\alpha\cos(\alpha - 2\beta) =$$

$$= -2\cos\alpha\cos 2\beta\cos(\alpha - 2\beta),$$

что и требовалось доказать.

Пример I.1078. Доказать тождество

$$4\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha - \beta) - 2\cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\beta = \cos 2\alpha.$$

Решение.

$$4\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha - \beta) - 2\cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\beta =$$

$$= 2\cos(\alpha - \beta)(2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha - \beta)) - \cos 2\beta =$$

$$= 2\cos(\alpha - \beta)(2\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) -$$

$$- \cos 2\beta = 2\cos(\alpha - \beta)(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) - \cos 2\beta =$$

$$= 2\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) - \cos 2\beta =$$

$$= \cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\beta = \cos 2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.1079. $\sin^2(2\alpha - \beta) - \sin^2 2\alpha - \sin^2\beta =$

$$= -2\sin 2\alpha\sin\beta\cos(2\alpha - \beta).$$

I.1080. $\cos^2(\alpha - 2\beta) - \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2(2\beta - \pi) =$

$$= 2\sin\alpha\sin(2\beta - \alpha)\cos 2\beta.$$

I.1081. $\dfrac{\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2(\alpha + \beta) - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} = -\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$

I.1082. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha - \beta) =$

$$= \sin^2(\alpha + \beta).$$

I.1083. $\sin^2\alpha - \cos^2(\alpha - \beta) + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha - \beta) =$

$$= \cos^2\alpha.$$

I.1084. $\cos^2\alpha - \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha - \beta) =$

$$= \cos^2(\alpha - \beta).$$

* * *

Пример I.1085. Упростить выражение

$$\frac{2\sin^2 4\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 4\alpha\right)\cos^2\left(\frac{5\pi}{4} - 4\alpha\right)}.$$

Решение. $\dfrac{2\sin^2 4\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 4\alpha\right)\cos^2\left(\frac{5\pi}{4} - 4\alpha\right)} =$

$$= \frac{-\cos 8\alpha}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 4\alpha\right)\cos^2\left(\pi + \left(\frac{\pi}{4} - 4\alpha\right)\right)} =$$

$$= \frac{-\cos 8\alpha}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 4\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 4\alpha\right)}.$$

Так как $\left(\frac{\pi}{4} + 4\alpha\right) + \left(\frac{\pi}{4} - 4\alpha\right) = \frac{\pi}{2}$, то

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 4\alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 4\alpha\right).$$

Тогда $\dfrac{-\cos 8\alpha}{2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+4\alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-4\alpha\right)} =$

$$= \frac{-\cos 8\alpha}{2\cdot\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+4\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+4\alpha\right)}\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+4\alpha\right)} =$$

$$= \frac{-\cos 8\alpha}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+4\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+4\alpha\right)} = -\frac{\cos 8\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+8\alpha\right)} =$$

$$= -\frac{\cos 8\alpha}{\cos 8\alpha} = -1.$$

Ответ: -1.

Пример I.1086. Упростить выражение

$$\frac{(1+\sin\alpha)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}.$$

Решение. $\dfrac{(1+\sin\alpha)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)} =$

$$= \frac{\left(1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(2\pi-\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)\cos\left(\pi+\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)} =$$

$$= \frac{-2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)} = -\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)} = -\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$.

Упражнения

Упростить выражения:

I.1087. $\dfrac{1-2\cos^2 2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}$.

I.1088. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)\right)}{\cos\left(2\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)}$.

I.1089. $\dfrac{\cos\left(4\alpha-\frac{9\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+2\alpha\right)\left(1-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+4\alpha\right)\right)}$.

I.1090. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+4\alpha\right)}{1-2\cos^2 4\alpha}$.

I.1091. $\dfrac{2\cos^2 2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}-2\alpha\right)} -$

$- \operatorname{tg}\alpha + \cos 2\alpha - \sin 2\alpha.$

I.1092. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)} -$

$- \operatorname{tg}\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) - \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right).$

* * *

Пример I.1093. Доказать тождество

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{4}+15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}-15^\circ\right)=$$

$$=\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{3\alpha}{4}\right).$$

Решение. $2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{4}+15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}-15^\circ\right)=$

$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\sin 30^\circ+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\alpha\right)=\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{3\alpha}{4}\right),$$

что и требовалось доказать.

Пример I.1094. Доказать тождество

$$\sin 6\alpha\sin 3\alpha-\sin 9\alpha\sin 2\alpha=4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha\sin 5\alpha.$$

Решение. $\sin 6\alpha\sin 3\alpha-\sin 9\alpha\sin 2\alpha=$

$$=\frac{1}{2}(\cos 3\alpha-\cos 9\alpha)-\frac{1}{2}(\cos 7\alpha-\cos 11\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 3\alpha-\cos 9\alpha-\cos 7\alpha+\cos 11\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}((\cos 3\alpha-\cos 7\alpha)+(\cos 11\alpha-\cos 9\alpha))=$$

$$=\frac{1}{2}(2\sin 2\alpha\sin 5\alpha-2\sin 10\alpha\sin\alpha)=$$

$$=\sin 2\alpha\sin 5\alpha-\sin 10\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\sin 5\alpha-$$

$$-2\sin 5\alpha\cos 5\alpha\sin\alpha=2\sin 5\alpha\sin\alpha(\cos\alpha-\cos 5\alpha)=$$

$$=2\sin 5\alpha\sin\alpha\cdot 2\sin 3\alpha\sin 2\alpha=4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha\sin 5\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.1095. $\sin 2\alpha \cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) =$

$$= \cos\alpha \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{3\alpha}{2}.$$

I.1096. $\cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{3\alpha}{2} - \sin\alpha \sin 3\alpha - \sin 2\alpha \sin 3\alpha =$

$$= \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{9\alpha}{2}.$$

I.1097. $\sin\alpha \sin 3\alpha + \sin 4\alpha \sin 8\alpha = \sin 7\alpha \sin 5\alpha.$

I.1098. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + 4\alpha\right) +$

$$+ \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 4\alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{4} - 5\alpha\right) - \cos\alpha \cos 2\alpha = \sin 2\alpha \cos 7\alpha.$$

I.1099. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 5\alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) -$

$$- \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - 6\alpha\right) = \sin 4\alpha \cos\alpha.$$

I.1100. $\sin\frac{7\alpha}{2} \cos\frac{3\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{5\alpha}{2} + \sin 2\alpha \cos 7\alpha =$

$$= 2 \sin 3\alpha \cos^2 3\alpha.$$

I.1101. $\cos 3\alpha \cos 6\alpha - \cos 4\alpha \cos 7\alpha = \sin 10\alpha \sin\alpha.$

* * *

Пример I.1102. Доказать, что

$$\sin^5\alpha = \frac{5}{8}\sin\alpha - \frac{5}{16}\sin 3\alpha + \frac{1}{16}\sin 5\alpha.$$

Решение. $\sin^5\alpha = \sin\alpha \sin^4\alpha = \sin\alpha \cdot \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right)^2 =$

$$= \frac{1}{4}\sin\alpha\,(1 - 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{4}\sin\alpha\left(1 - 2\cos 2\alpha + \frac{1 + \cos 4\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\sin\alpha\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\cos 4\alpha\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\sin\alpha\cos 4\alpha =$$

$$= \frac{3}{8}\sin\alpha - \frac{1}{4}(\sin 3\alpha - \sin\alpha) + \frac{1}{16}(\sin 5\alpha - \sin 3\alpha) =$$

$$= \frac{3}{8}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha + \frac{1}{4}\sin\alpha + \frac{1}{16}\sin 5\alpha - \frac{1}{16}\sin 3\alpha =$$

$$= \frac{5}{8}\sin\alpha - \frac{5}{16}\sin 3\alpha + \frac{1}{16}\sin 5\alpha.$$

Упражнения

Доказать тождества:

I.1103. $\cos^4\alpha = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha.$

I.1104. $\sin^4\alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha.$

I.1105. $\sin^2\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}(\cos\alpha - \cos 3\alpha).$

I.1106. $\sin^2\alpha\cos^3\alpha = \frac{1}{8}\cos\alpha - \frac{1}{16}\cos 3\alpha - \frac{1}{16}\cos 5\alpha.$

I.1107. $\sin^3\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}\sin 2\alpha - \frac{1}{8}\sin 4\alpha.$

I.1108. $\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\cos 2\alpha - \frac{1}{4}\cos 4\alpha + \frac{1}{8}\cos 6\alpha.$

I.1109. $\cos^5\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{8}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{5}{16}\sin\left(3\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{16}\cos\left(5\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$

I.1110. $\sin^6\alpha = \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos 2\alpha + \frac{3}{16}\cos 4\alpha - \frac{1}{32}\cos 6\alpha.$

* * *

Пример I.1111. Доказать тождество

$$\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha.$$

Решение. $\sin 5\alpha = \sin(4\alpha + \alpha) =$

$$= \sin 4\alpha \cos\alpha + \cos 4\alpha \sin\alpha = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos\alpha +$$
$$+ \sin\alpha (1 - 2\sin^2 2\alpha) = 4\sin\alpha \cos^2\alpha (1 - 2\sin^2\alpha) +$$
$$+ \sin\alpha (1 - 8\sin^2\alpha \cos^2\alpha) = 4\sin\alpha \cos^2\alpha - 8\sin^3\alpha \cos^2\alpha +$$
$$+ \sin\alpha - 8\sin^3\alpha \cos^2\alpha = 4\sin\alpha \cos^2\alpha + \sin\alpha -$$
$$- 16\sin^3\alpha \cos^2\alpha = 4\sin\alpha (1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha -$$
$$- 16\sin^3\alpha (1 - \sin^2\alpha) = 4\sin\alpha - 4\sin^3\alpha + \sin\alpha - 16\sin^3\alpha +$$
$$+ 16\sin^5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать тождества:

I.1112. $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1.$

I.1113. $\cos 4x = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1.$

I.1114. $\cos 5x = 16\sin^4 x \cos x - 12\sin^2 x \cos x + \cos x.$

I.1115. $\sin 6x = 32\sin^5 x \cos x - 32\sin^3 x \cos x +$
$+ 6\sin x \cos x.$

I.1116. $\sin 7x = -64\sin^7 x + 112\sin^5 x - 56\sin^3 x + 7\sin x.$

* * *

Пример I.1117. Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = -4\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\beta}{2}\cos\frac{3\gamma}{2}$.

Решение. $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma =$

$$= 2\sin\frac{3(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{3(\alpha-\beta)}{2} + \sin 3\gamma =$$
$$= 2\sin\frac{3(\pi-\gamma)}{2}\cos\frac{3(\alpha-\beta)}{2} + \sin 3\gamma =$$
$$= 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{3\gamma}{2}\right)\cos\frac{3(\alpha-\beta)}{2} + \sin 3\gamma =$$
$$= -2\cos\frac{3\gamma}{2}\cos\frac{3\alpha-3\beta}{2} + 2\sin\frac{3\gamma}{2}\cos\frac{3\gamma}{2} =$$

$$= -2\cos\frac{3\gamma}{2}\left(\cos\frac{3\alpha-3\beta}{2} - \sin\frac{3(\pi-(\alpha+\beta))}{2}\right) =$$

$$= -2\cos\frac{3\gamma}{2}\left(\cos\frac{3\alpha-3\beta}{2} - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)\right) =$$

$$= -2\cos\frac{3\gamma}{2}\left(\cos\frac{3\alpha-3\beta}{2} + \cos\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right) =$$

$$= -2\cos\frac{3\gamma}{2}\cdot 2\cos\frac{3\alpha-3\beta+3\alpha+3\beta}{4}\cos\frac{3\alpha-3\beta-3\alpha-3\beta}{4} =$$

$$= -4\cos\frac{3\gamma}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\beta}{2}.$$

Пример I.1118. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Решение.

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{1-\cos 2\beta}{2} + \sin^2\gamma =$$

$$= 1 - \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} + \sin^2\gamma =$$

$$= 1 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 1 - \cos^2\gamma =$$

$$= 2 - \cos(\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta) - \cos^2\gamma =$$

$$= 2 + \cos\gamma\cos(\alpha-\beta) - \cos^2\gamma =$$

$$= 2 + \cos\gamma(\cos(\alpha-\beta) - \cos\gamma) =$$

$$= 2 + \cos\gamma(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\pi-(\alpha+\beta)) =$$

$$= 2 + \cos\gamma(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)) = 2 + 2\cos\gamma\cos\alpha\cos\beta.$$

Пример I.1119. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Решение.

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\gamma =$$

$$= \operatorname{tg}(\pi-\gamma)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\gamma(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\gamma =$$

$$= -\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Упражнения

Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то имеют место тождества:

I.1120. $\sin\alpha+\sin\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

I.1121. $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha-\beta)\sin\gamma$.

I.1122. $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos^2\frac{\gamma}{2}=\cos\alpha\cos\beta$.

I.1123. $\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}=\cos\beta\cos\gamma$.

I.1124. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

I.1125. $\sin\gamma=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

I.1126. $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}=\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma$.

I.1127. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

I.1128. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$.

I.1129. $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

I.1130. $\frac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$.

I.1131. $\sin 4\alpha+\sin 4\beta+\sin 4\gamma=-4\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$.

I.1132. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=$

$$=1+4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

I.1133. $\sin\alpha-\sin\beta+\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

I.1134. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

I.1135. $1-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

I.1136. $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

I.1137. $\sin(2n+1)\alpha + \sin(2n+1)\beta + \sin(2n+1)\gamma =$

$$= (-1)^n \cdot 4\cos\frac{2n+1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{2n+1}{2}\beta \cdot \cos\frac{2n+1}{2}\gamma, \quad n \in Z.$$

I.1138. $\sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma =$

$$= (-1)^{n+1} \cdot 4\sin n\alpha \sin n\beta \sin n\gamma, \quad n \in Z.$$

I.1139. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$

I.1140. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

I.1141. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$

I.1142. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma +$

$$+ \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

I.1143. $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma = 1.$

I.1144. $\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}2\beta + \operatorname{tg}2\gamma = \operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}2\beta\operatorname{tg}2\gamma.$

I.1145. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma.$

I.1146. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = -\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$

* * *

Пример I.1147. Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma =$

$$= 1 + 4\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Решение. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma =$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos(\alpha+\beta) =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 1 =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + 1 =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) + 1 =$$

$$= 2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\pi-\alpha-\beta}{2}\right) + 1 =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)\cdot 2\sin\frac{\pi-\alpha-\beta-\alpha+\beta}{4}\sin\frac{\pi-\alpha-\beta+\alpha-\beta}{4} + 1 =$$

$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) + 1.$$

Пример I.1148. Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, то

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + 1.$$

Решение. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\gamma =$

$$= \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \frac{1+\cos 2\beta}{2} - \cos^2(2\pi - (\alpha+\beta)) =$$

$$= 1 + \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} - \cos^2(\alpha+\beta) =$$

$$= 1 + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - \cos^2(\alpha+\beta) =$$

$$= 1 + \cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) =$$

$$= 1 + \cos(2\pi-\gamma)\cdot 2\sin\alpha\sin\beta = 1 + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$$

Пример I.1149. Дано: $\alpha + \beta + \gamma + \varphi = 2\pi$. Доказать, что

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\varphi = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

Решение. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\varphi =$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\gamma+\varphi}{2}\cos\frac{\gamma-\varphi}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\left(\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\gamma-\varphi}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\varphi}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\gamma-\varphi}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma-\varphi}{4}\cos\frac{\alpha-\beta-\gamma+\varphi}{4} =$$

$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma-(\beta+\varphi)}{4}\cos\frac{\alpha+\varphi-(\beta+\gamma)}{4} =$$

$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma-(2\pi-\alpha-\gamma)}{4}\cos\frac{2\pi-\beta-\gamma-(\beta+\gamma)}{4} =$$

$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta+\gamma}{2}\right) =$$

$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Пример I.1150. α и β — острые углы прямоугольного треугольника. Доказать, что

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\cos(\pi+\beta)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\alpha-\pi)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=0.$$

Решение. Так как $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, то $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$.

Тогда $$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\cos(\pi+\beta)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\alpha-\pi)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{-\cos\alpha-\sin\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\frac{\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{-\cos\alpha-\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\frac{-\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha}{-\left(\cos\alpha+\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$$

$$= \frac{\dfrac{\cos\alpha \sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} - \sin\alpha}{\cos\alpha + \dfrac{\sin\alpha \sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha \sin\dfrac{\alpha}{2} - \sin\alpha \cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} :$$

$$: \frac{\cos\alpha \cos\dfrac{\alpha}{2} + \sin\alpha \sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} - \alpha\right)}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\left(\alpha - \dfrac{\alpha}{2}\right)} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{-\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать, что при $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$ имеют место тождества:

I.1151. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2 + 2\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$

I.1152. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma.$

I.1153. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1 - 2\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$

I.1154. $\sin\beta + \sin\gamma - \cos\alpha = 4\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}.$

I.1155. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 2\cos\alpha \cos\beta \sin\gamma.$

I.1156. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma = 1.$

I.1157. $\dfrac{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma} = \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}.$

I.1158. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma} = \dfrac{\cos^2\gamma}{\cos^2\alpha}.$

I.1159. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma =$

$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right).$$

I.1160. $\cos\alpha - \cos\beta + \cos\gamma =$

$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right).$$

I.1161. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{ctg}\gamma = -\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\gamma.$

I.1162. $\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma +$

$$+ \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

I.1163. $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma +$

$$+ \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma = 1 + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Доказать, что при $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ имеют место тождества:

I.1164. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$

I.1165. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$

Доказать, что при $\alpha + \beta + \gamma + \varphi = 2\pi$ имеют место тождества:

I.1166. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\varphi =$

$$= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

I.1167. $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma - \cos\varphi =$

$$= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

I.1168. $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma - \sin\varphi =$

$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

I.1169. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\varphi =$

$$= 2\,(1 + \cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma+\alpha)).$$

I.1170. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + \sin^2\varphi =$

$$= 2\,(1 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma+\alpha)).$$

I.1171. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma - \sin^2\varphi =$

$$= -2\cos(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha).$$

I.1172. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\varphi =$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\varphi}.$$

I.1173. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\varphi =$

$$= -\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\varphi)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\varphi}.$$

Доказать, что если α и β — острые углы прямоугольного треугольника, то имеют место тождества:

I.1174. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 4\sin\alpha\sin\beta.$

I.1175. $$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) - 4\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\beta - 4 + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} = \operatorname{tg}^4\left(\alpha+\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

* * *

Пример I.1176. Доказать, что если $\alpha = \beta + \gamma$, то

$$\cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \sin^2\alpha.$$

Решение. $\cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =$

$$= \frac{1+\cos 2\beta}{2} + \frac{1+\cos 2\gamma}{2} - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =$$

$$= 1 + \frac{\cos 2\beta + \cos 2\gamma}{2} - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =$$

$$= 1 + \cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =$$

$$= 1 + \cos\alpha\cos(\beta-\gamma) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =$$

$$= 1 + \cos\alpha(\cos(\beta-\gamma) - 2\cos\beta\cos\gamma) =$$

$$= 1 + \cos\alpha(\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma - 2\cos\beta\cos\gamma) =$$

$$= 1 + \cos\alpha(-\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma) =$$

$$= 1 + \cos\alpha\cdot(-\cos(\beta+\gamma)) = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать, что при $\alpha = \beta + \gamma$ имеют место тождества:

I.1177. $\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = 1.$

I.1178. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$

I.1179. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1.$

I.1180. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2(1 - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).$

I.1181. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$

I.1182. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 1.$

I.1183. $\cos\gamma - \cos\beta - \cos\alpha = 4\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} - 1.$

I.1184. $\sin\alpha + \cos\beta + \cos\gamma =$

$$= 4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right).$$

I.1185. $\cos\gamma - \cos\beta + \sin\alpha =$

$$= 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right).$$

I.1186. $\sin\alpha - \cos\beta + \sin\gamma =$

$$= 1 - 4\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right).$$

I.1187. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 2(1 + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma).$

I.1188. $\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma = 0.$

* * *

Пример **I.1189.** Дано: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$. Доказать, что $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = -12\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

Решение. $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma =$

$$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha + 3\sin\beta - 4\sin^3\beta + 3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma =$$

$$= 3(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) - 4(\sin^3\alpha + \sin^3\beta + \sin^3\gamma) =$$

$$= -4(\sin^3\alpha + \sin^3\beta + \sin^3\gamma).$$

Из формулы куба суммы $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ получаем $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$.

Тогда $-4(\sin^3\alpha + \sin^3\beta + \sin^3\gamma) =$

$$= -4((\sin\alpha + \sin\beta)^3 - 3\sin\alpha\sin\beta(\sin\alpha + \sin\beta) + \sin^3\gamma) =$$

$$= -4((-\sin\gamma)^3 - 3\sin\alpha\sin\beta(-\sin\gamma) + \sin^3\gamma) =$$

$$= -4(-\sin^3\gamma + 3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin^3\gamma) =$$

$$= -12\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.1190. Дано: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\alpha+\beta)$, $\alpha + \beta \neq 2\pi n$, $n \in Z$. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

Решение. Преобразуем данное соотношение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\alpha+\beta),$$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad (1)$$

Так как $\alpha + \beta \neq 2\pi n$, то $\frac{\alpha+\beta}{2} \neq \pi n$ и $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \neq 0$. Тогда, разделив обе части равенства (1) на $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$, получаем:

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right),$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2},$$

$$3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}, \quad 3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = 1, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Упражнения

I.1191. Дано: $\cos 2\alpha = \cos 2\beta \cos 2\gamma$. Доказать, что $1 + \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{1}{\sin^2\gamma}$.

I.1192. Дано: $\cos\varphi = \cos\alpha\cos\beta$. Доказать, что

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi+\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi-\alpha}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

I.1193. Дано: $\cos(\alpha+\beta) = 0$. Доказать, что

$$\sin(\alpha+2\beta) = \sin\alpha.$$

I.1194. Дано: $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = 4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Доказать, что

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{3\sin\alpha}{3\cos\alpha-5}.$$

I.1195. Дано: $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$. Доказать, что

$$\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 12\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

I.1196. Дано: $\cos(2\alpha+\beta) = 1$. Доказать, что

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

I.1197. Дано: $\sin^2\beta = \sin\alpha\cos\alpha$. Доказать, что

$$\cos 2\beta = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

I.1198. Дано: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 3\operatorname{tg}\alpha$. Доказать:

$$\sin(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin 2\beta.$$

I.1199. Дано:

$$\sin(2\alpha+\beta) = 2\sin\beta,\ \cos\alpha \neq 0, \cos(\alpha+\beta) \neq 0.$$

Доказать: $3\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

I.1200. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$. Доказать, что

$$\sin(\alpha+\beta) = 3\sin(\alpha-\beta).$$

I.1201. Дано: $3\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta)$. Доказать, что

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 2\operatorname{tg}\alpha.$$

I.1202. Дано: $a\operatorname{tg}\alpha + b\operatorname{tg}\beta = (a+b)\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Доказать, что $a\cos\beta = b\cos\alpha$.

I.1203. Дано: $\sin\alpha = a\sin(\alpha+\beta)$. Доказать, что

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\beta}{\cos\beta - a}.$$

I.1204. Дано: $\operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \frac{1-k}{1+k}\operatorname{tg}\alpha$. Доказать:

$$\sin(2\alpha-\beta) = k\sin\beta.$$

I.1205. Дано: $m\sin\beta = n\sin(2\alpha+\beta)$. Доказать:

$$\frac{1+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}{m+n} = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{m-n}.$$

I.1206. Дано: $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{p}{q}$. Доказать, что

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{p+q}{p-q}\operatorname{ctg}\alpha.$$

I.1207. Дано: $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{p}{q}$. Доказать, что

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{q-p}{q+p}\operatorname{ctg}\alpha.$$

* * *

Пример I.1208. Вычислить $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)$, если $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Из равенства $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ следует $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$. Тогда

$$(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta) = 1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta =$$

$$= 1+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta =$$

$$= 1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta =$$

$$= 1+1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 2.$$

Ответ: 2.

Пример I.1209. Дано: $\sin\alpha - \sin\beta = m$, $\cos\alpha + \cos\beta = n$. Найти $\sin(\alpha - \beta)$ и $\cos(\alpha - \beta)$.

Решение. Из условия следует, что

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = m, \qquad (1)$$

$$2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = n. \qquad (2)$$

Разделив равенство (1) на равенство (2), имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{m}{n}.$$

Тогда $\sin(\alpha-\beta) = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\beta}{2}} = \dfrac{\frac{2m}{n}}{1+\frac{m^2}{n^2}} = \dfrac{2mn}{m^2+n^2}$,

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{1-\frac{m^2}{n^2}}{1+\frac{m^2}{n^2}} = \frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}.$$

Ответ: $\dfrac{2mn}{n^2+m^2}$; $\dfrac{n^2-m^2}{n^2+m^2}$.

Упражнения

I.1210. Вычислить $(1+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\beta)$, если $\alpha+\beta = \dfrac{3\pi}{4}$.

I.1211. Вычислить $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{(1+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\beta)}$, если $\alpha+\beta = 225°$.

I.1212. Дано: $\sin\alpha + \sin\beta = -\dfrac{21}{65}$, $\cos\alpha + \cos\beta = -\dfrac{27}{65}$, $\dfrac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$. Найти $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ и $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

I.1213. Дано: $\sin\alpha + \sin\beta = -\dfrac{27}{65}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{7}{9}$, $\dfrac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$ и $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$. Найти $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

I.1214. Дано: $\sin\alpha + \sin\beta = a$, $\cos\alpha + \cos\beta = b$. Найти $\cos(\alpha + \beta)$ и $\sin(\alpha + \beta)$.

* * *

Пример I.1215. Найти острые углы α и β прямоугольного треугольника, если $\sin 2\alpha = 1 + \sin(3\alpha - \beta)$.

Решение. Так как $\beta = 90° - \alpha$, то

$$\sin 2\alpha = 1 + \sin(3\alpha - 90° + \alpha),\ \sin 2\alpha = 1 + \sin(4\alpha - 90°),$$

$$\sin 2\alpha = 1 - \cos 4\alpha,\ \sin 2\alpha = 2\sin^2 2\alpha.$$

Так как $0° < \alpha < 90°$, то $0° < 2\alpha < 180°$ и $\sin 2\alpha \neq 0$.

Тогда $2\sin 2\alpha = 1$, $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$, $2\alpha = 30°$ или $2\alpha = 150°$, $\alpha = 15°$ или $\alpha = 75°$.

Ответ: $\alpha = 15°$, $\beta = 75°$ или $\alpha = 75°$, $\beta = 15°$.

Пример I.1216. Доказать, что для того, чтобы в треугольнике ABC один из углов α, β или γ был равен 36° или 108°, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\sin 5\alpha + \sin 5\beta + \sin 5\gamma = 0.$$

Решение. Докажем вначале, что если $\alpha = 36°$ или $\alpha = 108°$, то $\sin 5\alpha + \sin 5\beta + \sin 5\gamma = 0$.

Имеем: $\sin 5\alpha + \sin 5\beta + \sin 5\gamma =$

$$= \sin 5\alpha + 2\sin\frac{5(\beta+\gamma)}{2}\cos\frac{5(\beta-\gamma)}{2} =$$

$$= \sin 5\alpha + 2\sin\frac{5(180° - \alpha)}{2}\cos\frac{5(\beta-\gamma)}{2}.$$

При $\alpha = 36°$:

$$\sin 5\alpha + 2\sin\frac{5(180° - \alpha)}{2}\cos\frac{5(\beta-\gamma)}{2} =$$

$$= \sin 5\cdot 36° + 2\sin\frac{5(180° - 36°)}{2}\cos\frac{5(\beta-\gamma)}{2} =$$

$$= \sin 180° + 2\sin 360°\cos\frac{5(\beta-\gamma)}{2} = 0.$$

При $\alpha = 108°$:

$$\sin 5\alpha + 2\sin\frac{5(180° - \alpha)}{2}\cos\frac{5(\beta - \gamma)}{2} =$$

$$= \sin 540° + 2\sin 180° \cos\frac{5(\beta - \gamma)}{2} = 0.$$

Необходимость доказана.

Покажем теперь, что если $\sin 5\alpha + \sin 5\beta + \sin 5\gamma = 0$, то $\alpha = 36°$ или $\alpha = 108°$. $\sin 5\alpha + \sin 5\beta + \sin 5\gamma =$

$$= 2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2} + 2\sin\frac{5(\beta + \gamma)}{2}\cos\frac{5(\beta - \gamma)}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2} + 2\sin\frac{5(180° - \alpha)}{2}\cos\frac{5(\beta - \gamma)}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2} + 2\sin\left(450° - \frac{5\alpha}{2}\right)\cos\frac{5(\beta - \gamma)}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2} + 2\cos\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{5(\beta - \gamma)}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{5\alpha}{2}\left(\sin\frac{5\alpha}{2} + \cos\frac{5(\beta - \gamma)}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{5\alpha}{2}\left(\sin\frac{5}{2}(180° - (\beta + \gamma)) + \cos\frac{5\beta - 5\gamma}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{5\alpha}{2}\left(\sin\left(450° - \frac{5(\beta + \gamma)}{2}\right) + \cos\frac{5\beta - 5\gamma}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{5\alpha}{2}\left(\cos\frac{5\beta + 5\gamma}{2} + \cos\frac{5\beta - 5\gamma}{2}\right) =$$

$$= 4\cos\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{5\beta}{2}\cos\frac{5\gamma}{2}.$$

Следовательно, $4\cos\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{5\beta}{2}\cos\frac{5\gamma}{2} = 0$. Тогда

$$\cos\frac{5\alpha}{2} = 0 \text{ или } \cos\frac{5\beta}{2} = 0, \text{ или } \cos\frac{5\gamma}{2} = 0.$$

Предположим, что $\cos\frac{5\alpha}{2} = 0$.

Так как $0° < \alpha < 180°$, то $0° < \frac{\alpha}{2} < 90°$, $0° < \frac{5\alpha}{2} < 450°$. Следовательно, $\frac{5\alpha}{2} = 90°$ или $\frac{5\alpha}{2} = 270°$, $\alpha = 36°$ или $\alpha = 108°$, что и требовалось доказать.

Пример I.1217. Дано: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ и $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Доказать, что $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Решение. По условию

$$1 + \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 0.$$

Тогда $2\cos^2\alpha + 2\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma) +$

$$+ 2\cos\alpha(\cos(\beta-\gamma) + \cos(\beta+\gamma)) = 0,$$

$$\cos^2\alpha + \cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma) + \cos\alpha\cos(\beta-\gamma) +$$

$$+ \cos\alpha\cos(\beta+\gamma) = 0,\ (\cos^2\alpha + \cos\alpha\cos(\beta-\gamma)) +$$

$$+ (\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma) + \cos\alpha\cos(\beta+\gamma)) = 0,$$

$$\cos\alpha(\cos\alpha + \cos(\beta-\gamma)) + \cos(\beta+\gamma)(\cos(\beta-\gamma) + \cos\alpha) = 0,$$

$$(\cos\alpha + \cos(\beta-\gamma))(\cos\alpha + \cos(\beta+\gamma)) = 0,$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} = 0.$$

Так как $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$, то $0 < -\gamma < -\frac{\pi}{2}$.

Складывая неравенства $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < -\gamma < -\frac{\pi}{2}$, получаем $0 < \alpha + \beta - \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Тогда $0 < \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} < \frac{\pi}{4}$ и $\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} \neq 0$.

Аналогично $\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} \neq 0$ и $\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} \neq 0$.

$$0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{3\pi}{2},\ 0 < \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} < \frac{3\pi}{4}.$$

Тогда $\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 0$ если $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, что и требовалось доказать.

Упражнения

I.1218. Найти острые углы α и β прямоугольного треугольника, если $\cos\alpha + \sin(\alpha-\beta) = 1$.

I.1219. Углы α, β, γ треугольника связаны соотношением $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \cos(\alpha-\beta)\cos\gamma - \cos^2\gamma = \frac{1}{4}$. Найти угол γ.

I.1220. Доказать, что для того, чтобы в треугольнике ABC один из углов α, β или γ был равен 60°, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 0.$$

I.1221. Дано: α, β, γ — острые углы,

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Доказать, что $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

I.1222. Дано: α и β — острые углы,

$$3\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = 1,\ 3\sin 2\alpha = 2\sin^2\beta.$$

Доказать, что $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$.

I.1223. Дано: α, β, γ — острые углы,

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Доказать, что $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

I.1224. Дано: $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$, $0° < \gamma < 90°$, $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma = 1$. Доказать, что $\alpha+\beta+\gamma = 180°$.

I.1225. Найти зависимость между острыми углами α, β и γ, если $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

I.1226. При каком соотношении между острыми углами α, β и γ выполняется равенство

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1?$$

I.1227. Дано: $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha = 1$. Доказать, что $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in Z$.

I.1228. Дано: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta)\sin\gamma = \cos\gamma.$$

Доказать, что $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

I.1229. Найти зависимость между острыми углами α и β, если $\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

I.1230. Найти зависимость между острыми углами α, β и γ, если $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma$.

* * *

Пример I.1231. Доказать равенство

$$\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}.$$

Решение. Домножим и разделим левую часть данного тождества на $2\sin\frac{\pi}{11}$. Получаем

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}} +$$

$$+ \frac{2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{7\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{9\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}.$$

Применяя формулу

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

имеем: $$\frac{\sin\frac{2\pi}{11} - \sin\frac{2\pi}{11} + \sin\frac{4\pi}{11} - \sin\frac{4\pi}{11} + \sin\frac{6\pi}{11} - \ldots}{2\sin\frac{\pi}{11}} +$$

$$+\frac{\sin\frac{8\pi}{11}-\sin\frac{8\pi}{11}+\sin\frac{10\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}=\frac{\sin\frac{10\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}=\frac{\sin\frac{\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}=\frac{1}{2}.$$

Упражнения

Доказать равенства:

I.1232. $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$

I.1233. $\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\ldots+\sin 50^\circ=\frac{\sin 25^\circ}{2\sin 5^\circ}.$

I.1234. $\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+\ldots+\cos\frac{17\pi}{19}=\frac{1}{2}.$

I.1235. $\cos\frac{2\pi}{21}+\cos\frac{4\pi}{21}+\ldots+\cos\frac{20\pi}{21}=-\frac{1}{2}.$

I.1236. $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}.$

I.1237. $\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}.$

I.1238. $\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}=\frac{3}{2}.$

* * *

Пример I.1239. Вычислить сумму

$$S=\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha.$$

Решение. Рассмотрим два случая:

1) $\alpha=2\pi k$, где $k\in Z$. В этом случае очевидно $S=0$.

2) $\alpha\neq 2\pi k$, где $k\in Z$. Тогда перепишем данную сумму так:

$$S=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha+\ldots}{2\sin\frac{\alpha}{2}}+$$

$$+\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin(n-1)\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin n\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Имеем $S = \dfrac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2} + \cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{5\alpha}{2} + \ldots}{2\sin\frac{\alpha}{2}} +$

$$+ \frac{\cos\frac{(2n-3)\alpha}{2} - \cos\frac{(2n-1)\alpha}{2} + \cos\frac{(2n-1)\alpha}{2} - \cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: если $\alpha = 2\pi k$, $k \in Z$, то $S = 0$;

если $\alpha \neq 2\pi k$, то $S = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Пример I.1240. Вычислить сумму

$$S = \cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \ldots + \cos^2 n\alpha.$$

Решение. Понизив степень каждого слагаемого данной суммы, получаем $S = \dfrac{n + (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \ldots + \cos 2n\alpha)}{2}$.

Теперь, если $\alpha = \pi k$, $k \in Z$, то

$$\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \ldots + \cos 2n\alpha = n.$$

Для случая $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, рассмотрим сумму

$$S_1 = \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \ldots + \cos 2n\alpha =$$

$$= \frac{2\sin\alpha\cos 2\alpha + 2\sin\alpha\cos 4\alpha + \ldots + 2\sin\alpha\cos 2n\alpha}{2\sin\alpha}.$$

Имеем $S_1 = \dfrac{-\sin\alpha + \sin 3\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha - \ldots}{2\sin\alpha} +$

$$+ \frac{-\sin(2n-1)\alpha + \sin(2n+1)\alpha}{2\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sin(2n+1)\alpha - \sin\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\sin n\alpha\cos(n+1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

Тогда $S = \frac{n}{2} + \frac{\sin n\alpha \cos (n+1)\alpha}{2 \sin \alpha}$.

Ответ: если $\alpha = \pi k$, $k \in Z$, то $S = n$;

если $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, то $S = \frac{n}{2} + \frac{\sin n\alpha \cos (n+1)\alpha}{2 \sin \alpha}$.

Упражнения

Доказать равенства:

I.1241. $\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = -1.$

I.1242. $\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \ldots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} = 0.$

I.1243. $\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \ldots + \sin \frac{(2n-1)\pi}{n} = 0.$

Вычислить суммы:

I.1244. $S = \cos \alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha.$

I.1245. $S = \cos \alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos (2n-1)\alpha.$

I.1246. $S = \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \ldots + \cos 2n\alpha.$

I.1247. $S = \sin \alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin (2n-1)\alpha.$

I.1248. $S = \sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \ldots + \sin 2n\alpha.$

I.1249. $S = \cos \alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \ldots + (-1)^{n-1} \cos n\alpha.$

I.1250. $S = \sin \alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha - \ldots + (-1)^{n-1} \sin n\alpha.$

I.1251. $S = \sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha + \ldots + \sin^2 n\alpha.$

I.1252. $S = \cos^2 \alpha + \cos^2 3\alpha + \ldots + \cos^2 (2n-1)\alpha.$

I.1253. Вычислить значение выражения

$$S = \sin x + \sin 3x + \ldots + \sin (2n-1)x,$$

если известно, что $\cos 2nx + 2 \sin x = 1$.

I.1254. Найти сумму всех произведений по два следующих чисел:

а) $\sin \alpha$, $\sin 2\alpha, \ldots, \sin n\alpha$, $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$;

б) $\cos \alpha$, $\cos 2\alpha, \ldots, \cos n\alpha$, $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$.

I.1255. Вычислить суммы:

а) $\sin a_1 + \sin a_2 + \ldots + \sin a_n$;

б) $\cos a_1 + \cos a_2 + \ldots + \cos a_n$,

где последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия с разностью $d \neq 2\pi k$, $k \in Z$.

* * *

Пример **I.1256.** Вычислить сумму

$$S = \frac{1}{\cos\alpha\cos 2\alpha} + \frac{1}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha} + \ldots + \frac{1}{\cos(n-1)\alpha\cos n\alpha}.$$

Решение. В случае, когда $\alpha = 2\pi k$, $k \in Z$, очевидно $S = n - 1$. Если $\alpha = \pi + 2\pi k$, то $S = 1 - n$. Пусть $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$. В этом случае ключом к решению является тождество

$$\frac{\sin\alpha}{\cos(k-1)\alpha\cos k\alpha} = \operatorname{tg} k\alpha - \operatorname{tg}(k-1)\alpha \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{\cos(k-1)\alpha\cos k\alpha} = \frac{\operatorname{tg} k\alpha - \operatorname{tg}(k-1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

Воспользовавшись полученным результатом, запишем следующие равенства:

$$\frac{1}{\cos\alpha\cos 2\alpha} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\frac{1}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha} = \frac{\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\frac{1}{\cos 3\alpha\cos 4\alpha} = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha}{\sin\alpha};$$

. . . . . .

$$\frac{1}{\cos(n-1)\alpha\cos n\alpha} = \frac{\operatorname{tg} n\alpha - \operatorname{tg}(n-1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

Сложив данные равенства, получим:

$$S = \frac{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}4\alpha - \operatorname{tg}3\alpha + \ldots + \operatorname{tg}n\alpha - \operatorname{tg}(n-1)\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} n\alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}.$$

Ответ: если $\alpha = 2\pi k$, $k \in Z$, то $S = n - 1$;

если $\alpha = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, то $S = 1 - n$;

если $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, то $S = \dfrac{\operatorname{tg} n\alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}$.

Пример I.1257. Вычислить сумму

$$S = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \ldots + \operatorname{arctg} \frac{1}{1 + n + n^2}.$$

Решение. Заметим, что

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{1 + k + k^2} = \operatorname{arctg} \frac{(k + 1) - k}{1 + (k + 1)k} =$$

$$= \operatorname{arctg} (k + 1) - \operatorname{arctg} k.$$

Теперь есть возможность записать такие равенства:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \operatorname{arctg} \frac{2 - 1}{1 + 2 \cdot 1} = \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1;$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{7} = \operatorname{arctg} \frac{3 - 2}{1 + 3 \cdot 2} = \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2;$$

. . . . . .

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{1 + n + n^2} = \operatorname{arctg} \frac{(n + 1) - n}{1 + (n + 1)n} = \operatorname{arctg} (n + 1) - \operatorname{arctg} n.$$

Складывая полученные равенства, имеем

$$S = \operatorname{arctg} (n + 1) - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} (n + 1) - \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $S = \operatorname{arctg} (n + 1) - \dfrac{\pi}{4}$.

Упражнения

Вычислить суммы:

I.1258. $S = \dfrac{1}{\sin \alpha \sin 2\alpha} + \dfrac{1}{\sin 2\alpha \sin 3\alpha} + \ldots +$

$$+ \frac{1}{\sin (n - 1)\alpha \sin n\alpha}.$$

I.1259. $S = \dfrac{1}{\sin\alpha \sin 3\alpha} + \dfrac{1}{\sin 3\alpha \sin 5\alpha} + \ldots +$

$$+ \frac{1}{\sin(2n-1)\alpha \sin(2n+1)\alpha}.$$

I.1260. $S = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{4}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-1}}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^n}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2^n}.$

I.1261. $S = \operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arcctg} 7 + \ldots + \operatorname{arcctg}(n^2 + n + 1).$

I.1262. $S = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{2}{11} + \ldots + \operatorname{arctg}\dfrac{2n}{n^4 + n^2 + 2}.$

I.1263. $S = \operatorname{arctg}\dfrac{d}{1 + a_1 a_2} + \operatorname{arctg}\dfrac{d}{1 + a_2 a_3} + \ldots +$

$$+ \operatorname{arctg}\frac{d}{1 + a_n a_{n+1}}, \quad a_1 > 0, \ d > 0$$

(здесь $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ — последовательные члены арифметической прогрессии с разностью d).

I.1264. $S = \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\dfrac{\sqrt{8} - \sqrt{3}}{6} + \ldots +$

$$+ \arcsin\frac{\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 1}}{n(n+1)}.$$

* * *

§4. Доказательство неравенств

Пример I.1265. Доказать неравенство $|\sin\alpha\cos\alpha| \leqslant \frac{1}{2}$.

Решение. $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$. Так как $-1 \leqslant \sin 2\alpha \leqslant 1$, то $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}\sin 2\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ или $\left|\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right| \leqslant \frac{1}{2}$, что и требовалось доказать.

Пример I.1266. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2} \leqslant \sin^4\alpha + \cos^4\alpha \leqslant 1.$$

Решение. Имеем $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha =$

$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, $1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha \leqslant 1$.

Пример I.1267. Доказать неравенство $\operatorname{ctg}\alpha + 1 \leqslant \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, где $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Решение. $\operatorname{ctg}\alpha + 1 - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} =$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \alpha\right)}{\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}} + 1 = \frac{-\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}} + 1 = 1 - \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Так как при $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ $\sin\alpha > 0$, то $\frac{1}{\sin\alpha} \geqslant 1$, откуда $1 - \frac{1}{\sin\alpha} \leqslant 0$.

Значит, $\operatorname{ctg}\alpha + 1 \leqslant \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать неравенства:

I.1268. $\sin\alpha < \operatorname{tg}\alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

I.1269. $\cos\alpha < \operatorname{ctg}\alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

I.1270. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha > \sin\alpha + \cos\alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

I.1271. $|\sin^4\alpha - \cos^4\alpha| \leqslant 1$.

I.1272. $\sin^2\alpha\cos^2\alpha \leqslant 0{,}25$.

I.1273. $\frac{1}{4} \leqslant \sin^6\alpha + \cos^6\alpha \leqslant 1$.

I.1274. $1 \leqslant \dfrac{1}{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha} \leqslant 2$.

I.1275. $\frac{1}{8} \leqslant \sin^8\alpha + \cos^8\alpha \leqslant 1$.

I.1276. $\frac{1}{16} \leqslant \sin^{10}\alpha + \cos^{10}\alpha \leqslant 1$.

I.1277. $1 \leqslant 3\sin^2\alpha + \cos 2\alpha \leqslant 2$.

I.1278. $-1 \leqslant \cos^2\beta - 2\cos 2\beta \leqslant 2$.

I.1279. $\sin^2\alpha - \sin^4\alpha \leqslant \frac{1}{4}$.

I.1280. $\left|\sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right| \leqslant \frac{1}{4}$.

I.1281. $|\sin 2x\,(\operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x)| \leqslant 2$.

I.1282. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} < 2$.

I.1283. $1 \leqslant \dfrac{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \leqslant 3$.

I.1284. $-\sqrt{2} - 1 \leqslant \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\beta\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - 1} \leqslant \sqrt{2} - 1$.

I.1285. $\sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \ldots \cos 2^n\alpha \leqslant \frac{1}{2^n}$.

I.1286. $0 \leqslant \cos^2\alpha + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) \leqslant 1$.

I.1287. $\sin x \operatorname{tg} x \geqslant \frac{1}{\cos x} - 1$.

* * *

Пример I.1288. Доказать неравенство

$$|\sqrt{3}\cos\beta - \sin\beta| \leqslant 2.$$

Решение. $\sqrt{3}\cos\beta - \sin\beta = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta - \frac{1}{2}\sin\beta\right) =$

$$= 2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\beta - \cos\frac{\pi}{3}\sin\beta\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right).$$

Так как $-1 \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right) \leqslant 1$, то

$$-2 \leqslant 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right) \leqslant 2 \text{ или } \left|2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)\right| \leqslant 2,$$

что и требовалось доказать.

Пример I.1289. Доказать неравенство

$$|5\sin\alpha - 12\cos\alpha| \leqslant 13.$$

Решение. $5\sin\alpha - 12\cos\alpha = \sqrt{5^2+12^2} \times$

$$\times\left(\frac{5}{\sqrt{5^2+12^2}}\sin\alpha - \frac{12}{\sqrt{5^2+12^2}}\cos\alpha\right) =$$

$$= 13\left(\frac{5}{13}\sin\alpha - \frac{12}{13}\cos\alpha\right).$$

Так как $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$, то обозначим $\frac{5}{13} = \cos\varphi$, $\frac{12}{13} = \sin\varphi$. Тогда $5\sin\alpha - 12\cos\alpha =$

$$= 13(\cos\varphi\sin\alpha - \sin\varphi\cos\alpha) = 13\sin(\alpha-\varphi).$$

Так как $-1 \leqslant \sin(\alpha - \varphi) \leqslant 1$, то

$$-13 \leqslant 13 \sin(\alpha - \varphi) \leqslant 13,$$

откуда и следует доказываемое неравенство.

Упражнения

Доказать неравенства:

I.1290. $|\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha| \leqslant 2.$

I.1291. $|\sin\alpha + \cos\alpha| \leqslant \sqrt{2}.$

I.1292. $|\sqrt{2}\sin\beta + \sqrt{6}\cos\beta| \leqslant 2\sqrt{2}.$

I.1293. $|3\sin\alpha - 4\cos\alpha| \leqslant 5.$

I.1294. $|2\sin\beta - 5\cos\beta| \leqslant \sqrt{29}.$

I.1295. $|5\sin\beta + \sqrt{11}\cos\beta| \leqslant 6.$

I.1296. $\sqrt{3}\sin x \leqslant 2 + \cos x.$

I.1297. $\sqrt{3}\,|\sin x| \leqslant 2 + \cos x.$

* * *

Пример I.1298. Доказать неравенство

$$-3 \leqslant 2\cos^2\alpha - 3\sin\alpha \leqslant 3\frac{1}{8}.$$

Решение.

$$2\cos^2\alpha - 3\sin\alpha =$$
$$= 2(1 - \sin^2\alpha) - 3\sin\alpha =$$
$$= -2\sin^2\alpha - 3\sin\alpha + 2.$$

Сделаем замену

$$\sin\alpha = t$$

и рассмотрим квадратичную функцию

$$f(t) = -2t^2 - 3t + 2$$

на отрезке $[-1;\ 1]$.

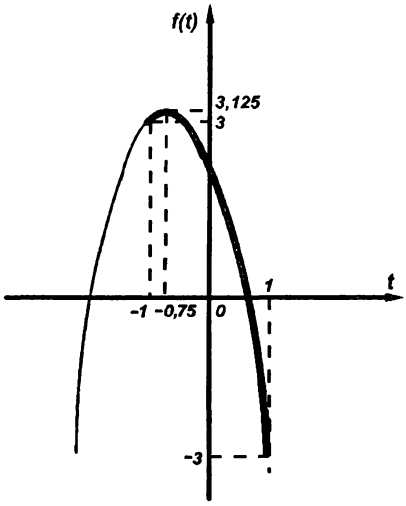


Рис. 2

Абсцисса вершины параболы $f(t)$ равна $-\frac{3}{4}$ и принадлежит отрезку $[-1; 1]$ (рис. 2). Следовательно, $\max\limits_{[-1;\,1]} f(t) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = 3\frac{1}{8}$.

Чтобы найти наименьшее значение функции, достаточно сравнить $f(-1)$ и $f(1)$. Имеем: $f(-1) = 3$, $f(1) = -3$. Значит, $\max\limits_{[-1;\,1]} f(t) = f(1) = -3$. Итак, $-3 \leqslant f(t) \leqslant 3\frac{1}{8}$.

Пример I.1299. Доказать неравенство

$$4 \leqslant 6\sin x - \cos 2x + 9 \leqslant 16.$$

Решение.

$$6\sin x - \cos 2x + 9 =$$

$$= 6\sin x - 1 + 2\sin^2 x + 9 =$$

$$= 2\sin^2 x + 6\sin x + 8.$$

Сделаем замену $\sin x = t$ и рассмотрим квадратичную функцию $f(t) = 2t^2 + 6t + 8$ на отрезке $[-1; 1]$. Абсцисса вершины параболы равна $-\frac{3}{2}$, т.е. не принадлежит отрезку $[-1; 1]$ (рис. 3). Поэтому наибольшее и наименьшее значения $f(t)$ достигаются на концах отрезка $[-1; 1]$. Имеем $f(-1) = 4$, $f(1) = 16$. Итак,

$$\max\limits_{[-1;\,1]} f(t) = 16, \quad \min\limits_{[-1;\,1]} f(t) = 4.$$

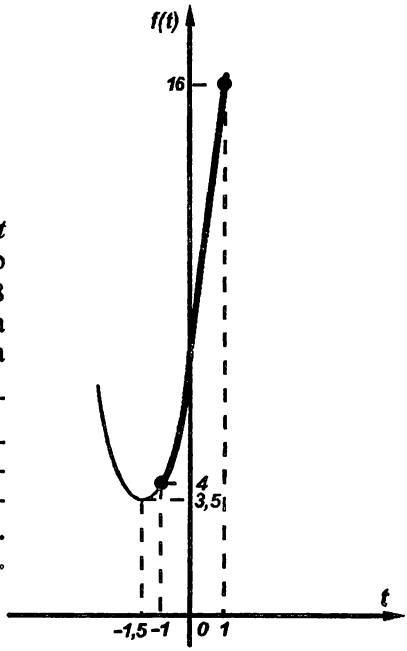


Рис. 3

Следовательно,

$$4 \leqslant f(t) \leqslant 16.$$

Пример I.1300. Доказать неравенство

$$-\frac{9}{8} \leqslant 1 - \sqrt{\cos^2\alpha} - 2\sin^2\alpha \leqslant 0.$$

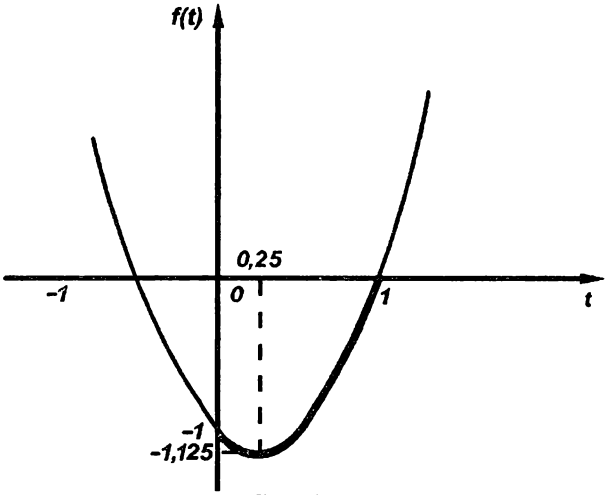


Рис. 4.

Решение. $-\frac{9}{8} \leqslant 1 - |\cos\alpha| - 2(1 - \cos^2\alpha) \leqslant 0,$

$$-\frac{9}{8} \leqslant 2\cos^2\alpha - |\cos\alpha| - 1 \leqslant 0,$$

$$-\frac{9}{8} \leqslant 2|\cos\alpha|^2 - |\cos\alpha| - 1 \leqslant 0.$$

Сделаем замену $|\cos x| = t$. Рассмотрим квадратичную функцию $f(t) = 2t^2 - t - 1$ на отрезке $[0; 1]$. Абсцисса вершины параболы равна $\frac{1}{4}$ и принадлежит отрезку $[0; 1]$ (рис. 4). Следовательно, $\min\limits_{[0;\,1]} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{8}$.

Для нахождения наибольшего значения осталось сравнить $f(0)$ и $f(1)$. Имеем $f(0) = -1$, $f(1) = 0$. Значит, $\max\limits_{[0;\,1]} f(t) = 0$. Следовательно, $-\frac{9}{8} \leqslant f(t) \leqslant 0$.

Пример I.1301. Доказать неравенство

$$2 \leqslant 3\sin^2\alpha + 2\sin 2\alpha + 6\cos^2\alpha \leqslant 7.$$

Решение. Докажем каждое из неравенств в отдельности. Для левого неравенства имеем

$$3\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 6\cos^2\alpha - 2 =$$

$= 3\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 6\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha =$

$= \sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha = (\sin\alpha + 2\cos\alpha)^2 \geqslant 0.$

Для правого неравенства

$$3\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 6\cos^2\alpha - 7 =$$

$$= -(4\sin^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha) = -(2\sin\alpha - 1)^2 \leqslant 0.$$

Итак, $2 \leqslant 3\sin^2\alpha + 2\sin 2\alpha + 6\cos^2\alpha \leqslant 7.$

Упражнения

Доказать неравенства:

I.1302. $-2 \leqslant 3\sin^2\beta + 2\cos\beta \leqslant 3\frac{1}{3}.$

I.1303. $-4 \leqslant \cos 2\alpha + 3\sin\alpha \leqslant \frac{17}{8}.$

I.1304. $2 \leqslant 1 + \sqrt{\sin^2\beta} + 2\cos^2\beta \leqslant 3\frac{1}{8}.$

I.1305. $0 \leqslant \cos 2\alpha + |\sin\alpha| \leqslant \frac{7}{8}.$

I.1306. $-\frac{7}{8} \leqslant \cos 2\alpha - |\cos\alpha| \leqslant 0.$

I.1307. $-5 \leqslant 2 - 3\cos^2\alpha - 2\sin 2\alpha - 6\sin^2\alpha \leqslant 0.$

I.1308. $0 \leqslant 6\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha + 2\sin 2\alpha - 2 \leqslant 5.$

I.1309. $0 \leqslant 4\cos^4\alpha - \cos^8\alpha \leqslant 3.$

I.1310. $\sin^2\alpha\cos^4\alpha(2 - \sin^2\alpha) \leqslant \frac{1}{4}.$

I.1311. $\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} \geqslant -1.$

I.1312. $\frac{1}{\cos^4\alpha} - 1 \geqslant \operatorname{tg}^2\alpha.$

I.1313. $\frac{\sin\alpha - 1}{\sin\alpha - 2} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{2 - \sin\alpha}{3 - \sin\alpha}.$

I.1314. $\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^6\frac{\alpha}{2} < \frac{27}{256}.$

I.1315. $\cos x + \cos y - \cos(x + y) \leqslant \frac{3}{2}.$

* * *

Пример I.1316. Доказать неравенство $|\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha| \geqslant 2$.

Решение. $|\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha| - 2 = \left|\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right| - 2 =$

$$= |\operatorname{tg}\alpha| + \frac{1}{|\operatorname{tg}\alpha|} - 2 = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha - 2|\operatorname{tg}\alpha| + 1}{|\operatorname{tg}\alpha|} =$$

$$= \frac{(|\operatorname{tg}\alpha| - 1)^2}{|\operatorname{tg}\alpha|} \geqslant 0.$$

Тем самым мы доказали, что для $\operatorname{tg}\alpha > 0$ $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \geqslant 2$, а для $\operatorname{tg}\alpha < 0$ $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \leqslant -2$. Отметим, что здесь мы воспользовались равенством $\left|\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right| = |\operatorname{tg}\alpha| + \frac{1}{|\operatorname{tg}\alpha|}$, т.к. $\operatorname{tg}\alpha$ и $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ — числа одного знака.

Упражнения

Доказать неравенства:

I.1317. $\left|\sin\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}\right| \geqslant 2,\ \alpha \neq \pi k,\ k \in Z.$

I.1318. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 \geqslant 4,\ \alpha \neq \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$

I.1319. $\sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha + \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} \geqslant 6,$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

I.1320. $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} \geqslant 6,\ \alpha \neq \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$

I.1321. $\frac{3}{(1 + \sin^2\alpha)(1 + \cos^2\alpha)} < 1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha,$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

I.1322. $\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) + \operatorname{tg}\beta(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma) +$
$+ \operatorname{tg}\gamma(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) \geqslant 6,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2},\ 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}.$

I.1323. $3(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) - 8(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) + 10 \geqslant 0,$

$$\alpha \neq \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$$

* * *

Пример I.1324. Доказать неравенство

$$\sin(\alpha+\beta) < \cos\alpha + \cos\beta,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Решение. 1-й способ. $\cos\alpha + \cos\beta - \sin(\alpha+\beta) =$

$$= \cos\alpha + \cos\beta - \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta =$$

$$= \cos\alpha(1-\sin\beta) + \cos\beta(1-\sin\alpha).$$

Так как α и β — углы I четверти, то $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$, $1 - \sin\alpha > 0$ и $1 - \sin\beta > 0$, откуда

$$\cos\alpha + \cos\beta - \sin(\alpha+\beta) > 0.$$

2-й способ. $\sin\alpha < 1$, $\sin\beta < 1$. Умножив обе части первого неравенства на $\cos\beta$, а обе части второго неравенства на $\cos\alpha$ ($\cos\beta > 0$, $\cos\alpha > 0$), и сложив первое и второе полученные неравенства, имеем $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta < \cos\alpha + \cos\beta$, откуда $\sin(\alpha+\beta) < \cos\alpha + \cos\beta$.

Пример I.1325. Доказать неравенство

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{2} \geqslant \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Решение. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{2} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta} =$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)} \geqslant \frac{\sin(\alpha+\beta)}{1-\cos(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Равенство достигается при $\alpha = \beta$.

Упражнения

Доказать неравенства:

I.1326. $\cos(\alpha-\beta) < \cos\alpha + \cos\beta,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$

I.1327. $\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$

I.1328. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) > \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{4},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{4}.$

I.1329. $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} > \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2},\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}.$

I.1330. $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} > \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$.

I.1331. $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} > \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$.

I.1332. $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2} \geqslant \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

I.1333. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + 2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant 4$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

I.1334. $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \geqslant \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

* * *

Пример I.1335. Доказать неравенство $0{,}5 < \cos(\sin\alpha) \leqslant 1$.

Решение. Докажем левое неравенство. $\sin\alpha$ принимает значения из отрезка $[-1;\ 1]$. Сделаем замену $\sin\alpha = t$, $t \in [-1;\ 1]$. Рассмотрим промежуток $[-1;\ 0]$. На этом промежутке функция $f(t) = \cos t$ возрастает, поэтому свое наименьшее значение она принимает при $t = \sin\alpha = -1$, а $\cos(-1) > 0{,}5$.

На промежутке $[0;\ 1]$ функция $f(t) = \cos(t)$ убывает. Поэтому свое наименьшее значение она принимает при $t = \sin\alpha = 1$, а $\cos 1 > 0{,}5$.

Правое неравенство очевидно. Равенство достигается при $\alpha = \pi k$, $k \in Z$.

Пример I.1336. Доказать неравенство

$$\sin(\cos\alpha) < \cos(\sin\alpha).$$

Решение.

$$\sin(\cos\alpha) - \cos(\sin\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos\alpha\right) - \cos(\sin\alpha) =$$

$$= -2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{2}\right).$$

Так как $|\sin\alpha \pm \cos\alpha| \leqslant \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, то

$$0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\cos\alpha \pm \sin\alpha}{2} < \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{2}\right)>0 \text{ и } \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{2}\right)>0,$$

откуда $\sin(\cos\alpha)-\cos(\sin\alpha)<0$ или $\sin(\cos\alpha)<\cos(\sin\alpha)$ для любого α, что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать неравенства:

I.1337. $|\sin(\sin\alpha)|<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

I.1338. $\cos(\cos x)>0$.

I.1339. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\cos\alpha\right)>0$.

I.1340. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)>0$.

I.1341. $\cos(\cos\alpha)>\sin(\sin\alpha)$.

* * *

Пример I.1342. Доказать неравенство

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8},$$

где $\alpha+\beta+\gamma=180°$.

Решение. По условию $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$. Тогда

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

Итак, $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}$.

Пример I.1343. Доказать неравенство

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leqslant 2,$$

где α, β и γ — углы неостроугольного треугольника.

Решение. Имеем $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma =$

$$= \frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{1-\cos 2\beta}{2} + 1 - \cos^2\gamma =$$

$$= 2 - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) - \cos^2(\pi - (\alpha+\beta)) =$$

$$= 2 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - \cos^2(\alpha+\beta) =$$

$$= 2 - \cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)) =$$

$$= 2 - \cos(\pi-\gamma)\cdot 2\cos\alpha\cos\beta = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Поскольку один из углов неострый, то косинус этого угла неположительный, откуда $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant 0$, тогда

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leqslant 2.$$

Равенство имеет место для прямоугольного треугольника.

Пример I.1344. Доказать неравенство $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta < 1$, где α и β — острые углы тупоугольного треугольника.

Решение. Так как $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) > 0$.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} > 0.$$

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и $\operatorname{tg}\beta > 0$, то $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta > 0$. Значит, $1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta > 0$, откуда $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta < 1$.

Пример I.1345. Доказать неравенство

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \geqslant 1,$$

где α, β, γ — углы треугольника.

Решение. Воспользуемся тождеством для углов треугольника: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1$.

Имеем:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} - \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2\right) \geqslant 0.$$

Отсюда $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} - 1 \geqslant 0$ или

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \geqslant 1.$$

Упражнения

Доказать неравенства (α, β, γ — углы треугольника):

I.1346. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma < 1{,}5$.

I.1347. $\dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geqslant 6$.

I.1348. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta > 1$, где α и β — острые.

I.1349. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma > 1$, где один из углов тупой.

I.1350. $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}$.

I.1351. $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

I.1352. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

I.1353. $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{3}$.

I.1354. $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geqslant \frac{3}{4}$.

I.1355. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geqslant \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$.

I.1356. $\cos\frac{\alpha}{2} < \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}$.

* * *

Глава II

О периодических функциях

Определение 1. *Функция f называется* ***периодической,*** *если существует такое число $T \neq 0$ (называемое периодом), что для любого x из области определения этой функции числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат ее области определения, причем $f(x + T) = f(x)$.*

Пример II.1. Доказать, что следующее определение равносильно приведенному выше.

Определение 2. *Функция f называется* ***периодической,*** *если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения этой функции $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$.*

Решение. Выберем произвольно x из $D(f)$. Пусть $f(x) = A$. Тогда из последнего определения следует, что $f(x - T) = A$ и $f(x + T) = A$, т.е. функция f определена в точках $x - T$ и $x + T$ при произвольных x из $D(f)$. Следовательно, из определения 2 вытекает определение 1.

Пусть теперь выполнены все требования определения 1. Имеем $f(x) = f((x - T) + T)$. Поскольку аргумент $x - T$ принадлежит $D(f)$, то прибавление к этому аргументу периода функции не изменит ее значения, т.е.

$$f((x - T) + T) = f(x - T).$$

Итак, имеет место равенство $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$.

Упражнения

II.2. Доказать, что следующие определения равносильны приведенным выше.

а) Функция f называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения этой функции числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат ее области определения, причем $f(x - T) = f(x)$.

б) Функция f называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения число $x - T$ также принадлежит ее области определения, причем $f(x + T) = f(x)$.

в) Функция f называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения число $x + T$ также принадлежит ее области определения, причем $f(x - T) = f(x)$.

II.3. Верны ли следующие определения[1]:

а) Функция f называется периодической, если существует такое число T, что для любого x из области определения этой функции $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$.

б) Функция f называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения этой функции число $x + T$ также принадлежит ее области определения, причем $f(x + T) = f(x)$.

в) Функция f называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для некоторого x из области определения этой функции $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$.

г) Функция f называется периодической, если для любого x из области определения найдется такое число $T \neq 0$, что $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$.

д) Функция f называется периодической с периодом T, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения этой функции числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат ее области определения, причем $f(x - T) = f(x + T)$?

Пример II.4. Доказать, что число $T = \sqrt{2}$ является периодом функции $f(x) = 5$.

Решение. Действительно, поскольку $D(f) = R$, то для любого $x \in D(f)$ $x - \sqrt{2} \in D(f)$ и $x + \sqrt{2} \in D(f)$, причем

$$f(x) = f(x + \sqrt{2}) = 5.$$

Пример II.5. Доказать, что число $T = -5\pi$ является периодом функции $f(x) = \sin 4x$.

1 Под верными будем подразумевать определения, которые равносильны традиционно принятым в школьном курсе математики.

Решение. Поскольку $D(f) = R$, то достаточно показать, что $f(x + T) = f(x - 5\pi) = f(x)$. Имеем

$$\sin 4(x - 5\pi) = \sin(4x - 20\pi) = \sin 4x.$$

Упражнения

II.6. Верно ли, что периодом функции $y = c$, где c — константа, является любое действительное число?

II.7. Показать, что периодом функции $y = c$, где c — константа, является любое действительное число $T \neq 0$.

II.8. Показать, что число T является периодом функции f:

а) $f(x) = \sin\frac{x}{2}$, $T = 4\pi$;

б) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$, $T = -3\pi$;

в) $f(x) = \cos 2x$, $T = \pi$;

г) $f(x) = \operatorname{ctg}\pi x$, $T = 2$;

д) $f(x) = \sin(5x - 1)$, $T = \frac{4\pi}{5}$;

е) $f(x) = \cos(3x + 2)$, $T = -\frac{4\pi}{3}$;

ж) $f(x) = \cos 2\pi x$, $T = 3$;

з) $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$, $T = 8$;

и) $f(x) = \cos(5\pi x - 1)$, $T = \frac{6}{5}$;

к) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi x}{2} - \frac{\pi}{7}\right)$, $T = \frac{2}{3}$;

л) $f(x) = \frac{\cos 3x}{1 + \sin^2 x}$, $T = 2\pi$.

* * *

Пример II.9. Показать, что число $T = \pi$ является периодом функции $f(x) = \sqrt{\sin 2x - 1}$.

Решение. Так как $\sin 2x \leqslant 1$, то областью определения данной функции f является множество корней уравнения $\sin 2x = 1$, т.е. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. Итак,

$$D(f) = \left\{x \in R \mid x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z\right\}.$$

Понятно, что если число x вида $\frac{\pi}{4} + \pi n$, то $x - \pi$ и $x + \pi$ такого же вида. Иными словами, если $x \in D(f)$, то

$$(x - \pi) \in D(f) \text{ и } (x + \pi) \in D(f).$$

Имеем $f(x + \pi) = \sqrt{\sin 2(x + \pi) - 1} =$

$$= \sqrt{\sin(2x + 2\pi) - 1} = \sqrt{\sin 2x - 1} = f(x).$$

Упражнения

II.10. Показать, что число T является периодом функции f:

а) $f(x) = \cos^2 x$, $T = \pi$;

б) $f(x) = \sin^3 x$, $T = -2\pi$;

в) $f(x) = |\sin x|$, $T = \pi$;

г) $f(x) = \left|\operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right|$, $T = 2\pi$;

д) $f(x) = \sin(\cos x)$, $T = 2\pi$;

е) $f(x) = \sin(\operatorname{tg} x)$, $T = \pi$;

ж) $f(x) = \dfrac{3\cos^2 x - 4\cos x + 2}{2\cos^2 x - 3\cos x}$, $T = 2\pi$;

з) $f(x) = \sqrt{\cos x}$, $T = 2\pi$;

и) $f(x) = \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + 1}$, $T = 2\pi$;

к) $f(x) = \sqrt{-\cos^2 x}$, $T = \pi$;

л) $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}}$, $T = \pi$;

м) $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\sin^2 x}}$, $T = \pi$;

н) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $T = 2\pi$;

о) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg} x}$, $T = \pi$;

п) $f(x) = \sqrt{|\sin |x||}$, $T = \pi$.

II.11. Доказать, что если функция f периодическая с периодом T, то сложная функция $y = g(f(x))$ также периодическая с периодом T, при условии, что $D(y) \neq \varnothing$.

* * *

Пример II.12. Показать, что периодом функции $y = \{x\}$ является любое целое число, кроме нуля.

Напомним читателю следующие определения.

Определение. ***Целой частью*** *числа x (обозначается* $[x]$*) называется наибольшее целое число, не превышающее данное.* Например, $[2{,}3] = 2$; $[-1{,}8] = -2$.

Определение. ***Дробной частью*** *числа x (обозначается* $\{x\}$*) называется число* $x - [x]$.

Решение. Понятно, что областью определения функции $y = \{x\}$ является R. Тогда достаточно показать, что $\{x + c\} = \{x\}$, где $c \in Z$ и $c \neq 0$. Воспользуемся очевидным свойством целой части числа: $[x + c] = [x] + c$, где $c \in Z$. Имеем

$$\{x + c\} = x + c - [x + c] = x + c - [x] - c = x - [x] = \{x\}.$$

Пример II.13. Показать, что число $T = \dfrac{1}{5}$ является периодом функции $f(x) = \dfrac{1}{\{5x\}}$.

Решение. Поскольку $\{x\} = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in Z$, то областью определения функции f являются все числа, кроме чисел вида $\dfrac{n}{5}$, где $n \in Z$.

$$D(f) = \left\{x \in R \mid x \neq \frac{n}{5},\ n \in Z\right\}.$$

Если $x \in D(f)$, то числа $x \pm \dfrac{1}{5}$ не представимы в виде $\dfrac{n}{5}$, $n \in Z$, т.е. $\left(x \pm \dfrac{1}{5}\right) \in D(f)$.

Осталось показать, что $f\left(x+\frac{1}{5}\right)=f(x)$. Имеем

$$f\left(x+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{\left\{5\left(x+\frac{1}{5}\right)\right\}}=\frac{1}{\{5x+1\}}=$$

$$=\frac{1}{5x+1-[5x+1]}=\frac{1}{5x-[5x]}=\frac{1}{\{5x\}}.$$

Упражнения

II.14. Показать, что число T является периодом функции f:

а) $f(x)=\{2x\}$, $T=\frac{1}{2}$;

б) $f(x)=\left\{\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\right\}$, $T=3$;

в) $f(x)=\{-4x+3\}$, $T=\frac{1}{4}$;

г) $f(x)=\{\sin^2 x\}$, $T=\pi$;

д) $f(x)=\{\sqrt{\sin x}\}$, $T=2\pi$;

е) $f(x)=\left\{\frac{1}{\cos^2 x}\right\}$, $T=\pi$;

ж) $f(x)=\sqrt{\{x\}}$, $T=1$;

з) $f(x)=\operatorname{tg}\{x\}$, $T=1$;

и) $f(x)=\cos\{7x-2\}$, $T=\frac{1}{7}$;

к) $f(x)=\sin\{\pi x\}$, $T=\frac{1}{\pi}$.

* * *

Пример II.15. Показать, что число $T=3{,}14$ не является периодом функции $y=\operatorname{tg}x$.

Решение. Если $T=3{,}14$ — период, то для любого x из области определения функции $y=\operatorname{tg}x$ необходимо выполнение равенства $\operatorname{tg}(x+3{,}14)=\operatorname{tg}x$. Поскольку $0\in D(y)$, то $\operatorname{tg}(0+3{,}14)=\operatorname{tg}0$, т.е. $\operatorname{tg}3{,}14=0$, что очевидно неверно.

Упражнения

II.16. Показать, что число T не является периодом функции f:

а) $f(x) = \sin x,\ T = -\pi$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x,\ T = \frac{\pi}{2}$;

в) $f(x) = \operatorname{ctg} x,\ T = 2$;

г) $f(x) = \{\operatorname{ctg} x\},\ T = 1$;

д) $f(x) = \operatorname{ctg}\{x\},\ T = \pi$;

е) $f(x) = \cos\left\{\frac{x}{5}\right\},\ T = 6$;

ж) $f(x) = \sin \pi x,\ T = 2\pi$.

* * *

Пример II.17. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x-2}$ непериодическая.

Решение. Заметим, что $D(f) = (-\infty;\ 2) \cup (2;\ \infty) = R \setminus \{2\}$. Пусть функция f периодическая с периодом $T \neq 0$. Очевидно, что $x_0 = 2 - T \in D(f)$, тогда $x_0 + T = 2 - T + T \in D(f)$, т.е. $2 \in D(f)$ — противоречие.

Упражнения

II.18. Доказать, что функция f не является периодической:

а) $f(x) = \frac{x}{x}$;

б) $f(x) = \sin\frac{x+2}{x+2}$;

в) $f(x) = \cos\frac{1}{x}$;

г) $f(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\}$;

д) $f(x) = \left\{\frac{x^2-1}{x-1}\right\}$;

е) $f(x) = \cos\left\{\frac{x^2-9}{x+3}\right\}$.

II.19. Доказать, что если область определения функции f — множество $R \setminus M$, где M — конечное непустое множество действительных чисел, то функция f — непериодическая.

II.20. Доказать, что если область определения функции f — множество $R \setminus M$, где M — объединение конечного числа отрезков, то функция f — непериодическая.

* * *

Пример II.21. Доказать, что функция $f(x) = x^2$ — непериодическая.

Решение. Данная функция имеет единственный корень $x = 0$. Если она периодическая с периодом T, то $f(0) = f(0 + nT) = 0$, где $n \in Z$, т.е. функция f имеет бесконечно много корней, что явно не так.

Упражнения

II.22. Доказать, что функция f не является периодической:

а) $f(x) = x^2 - 4$;

б) $f(x) = x^3 + 8$;

в) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$;

г) $f(x) = x(\cos^2 x + 1)$;

д) $f(x) = (x - 2)(1 + \operatorname{tg}^2 x)$;

е) $f(x) = x^2 + 9$;

ж) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 + 5x + 8}$;

з) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$;

и) $f(x) = x^2 + \sin x$;

к) $f(x) = x - \cos 2\pi x$;

л) $f(x) = 2x - \cos \sqrt{3}\, x + 1$;

м) $f(x) = \cos x + \cos \sqrt{2}\, x$.

II.23. Доказать, что если функция f некоторое свое значение a принимает в конечном числе точек, то f — непериодическая.

* * *

Пример II.24. Доказать, что функция $f(x) = \sin(\sqrt{x})^2$ — непериодическая.

Решение. На первый взгляд может показаться, что число $T = 2\pi$ — период данной функции. Действительно, для любого x из $D(f)$ $x + 2\pi \in D(f)$, причем $\sin(\sqrt{x + 2\pi})^2 = \sin(\sqrt{x})^2$.

Однако, например, для $x = 1 \in D(f)$, $1 - 2\pi \notin D(f)$.

Вообще, если предположить, что данная функция периодическая с периодом T, то обязательно одно из чисел $0 - T$ или $0 + T$ не будет принадлежать области определения, в то время, как $0 \in D(f)$.

Упражнения

II.25. Доказать, что функция f не является периодической:

а) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x}$;

б) $f(x) = (\sqrt{x-1})^2 - x$;

в) $f(x) = \cos\sqrt{x}$;

г) $f(x) = \cos(\sqrt{x})^2$;

д) $f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{x-1}$;

е) $f(x) = \{\sqrt{x+2}\}$;

ж) $f(x) = \sin x$, $D(f) = [3; \infty)$.

II.26. Доказать, что если функция f не определена для всех $x \geqslant a$ $(x \leqslant a)$, то она непериодическая.

* * *

Пример II.27.[1] Доказать, что функция $f(x) = x + \sin x$ — непериодическая.

Решение. Имеем $f'(x) = 1 + \cos x \geqslant 0$ при всех x. Следовательно, функция f возрастает на R. Отсюда если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$. Пусть f — периодическая с периодом T. Тогда $f(x+T) = f(x)$. Однако $x + T \neq x$, так как $T \neq 0$. Получили противоречие.

Упражнения

II.28. Доказать, что функция f не является периодической:

а) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

б) $f(x) = 2x^3 - 11$;

в) $f(x) = 2x - \cos x$;

г) $f(x) = \sin 2x - 3x$;

д) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 3x - 1$;

е) $f(x) = x^3 + x + \sin x$.

II.29. Доказать, что если функция f монотонна на $D(f)$, то она непериодическая.

* * *

Пример II.30. Доказать, что функция $f(x) = \cos x^2$ не является периодической.

1 При решении этого цикла задач желательно уметь определять характер монотонности функции с помощью производной.

Решение. Заметим, что ни один из перечисленных выше критериев непериодичности (упражнения **II.19**, **II.20**, **II.23**, **II.26**, **II.29**) к данной функции неприменим.

Пусть функция f периодическая с периодом T. Тогда равенство $\cos(x+T)^2 = \cos x^2$ должно выполняться для любого действительного x, а значит, и для $x = 0$. Получаем $\cos T^2 = 1$, $T^2 = 2\pi n$, где $n \in N$. Итак, если период есть, то он имеет вид $\sqrt{2\pi n}$, $n \in N$. Запишем

$$\cos(x+T)^2 - \cos x^2 = 0,$$

$$2\sin\left(x^2 + Tx + \frac{T^2}{2}\right)\sin\left(Tx + \frac{T^2}{2}\right) = 0.$$

Последнее равенство справедливо при всех x. Подставим $x = 1$ и $T = \sqrt{2\pi n}$. Получаем

$$\sin(1 + \sqrt{2\pi n} + \pi n)\sin(\sqrt{2\pi n} + \pi n) = 0,$$

$$\sin(1 + \sqrt{2\pi n})\sin\sqrt{2\pi n} = 0.$$

Понятно, что последнее равенство противоречиво.

Упражнения

II.31. Доказать, что функция f не является периодической:

а) $f(x) = \sin x^2$;

б) $f(x) = \cos x^3$;

в) $f(x) = \sin(x^2 + x)$;

г) $f(x) = \cos(x^2 - 2x)$;

д) $f(x) = \sin|x|$.

* * *

Пример II.32. Доказать, что если функция $f(x) = \sin x + \cos bx$ — периодическая, то b — рациональное число.

Решение. Пусть период функции f равен T. Тогда для любого действительного x имеет место равенство

$$\sin(x+T) + \cos b(x+T) = \sin x + \cos bx.$$

Положим в этом равенстве $x = 0$ и $x = -T$. Получим систему

$$\begin{cases}\sin T + \cos bT = 1,\\ -\sin T + \cos bT = 1,\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos bT = 1,\\ \sin T = 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}bT = 2\pi m,\ m \in Z,\\ T = \pi k,\ k \in Z.\end{cases}$$

Так как $T \neq 0$, то $k \neq 0$. Отсюда $b = \dfrac{2m}{k} \in Q$.

Упражнения

II.33. Доказать, что если функция f — периодическая, то число b — рациональное:

а) $f(x) = \cos x + \cos bx$;

б) $f(x) = \cos x + \sin bx$;

в) $f(x) = \cos x + \operatorname{tg} bx$;

г) $f(x) = \operatorname{tg} x + \cos bx$;

д) $f(x) = \cos x + \operatorname{ctg} bx$.

* * *

Пример II.34. Доказать, что функция $f(x) = \{x\} + \sin x$ не является периодической.

Решение. Пусть функция f периодическая с периодом T. Тогда для любого действительного x

$$\{x + T\} + \sin(x + T) = \{x\} + \sin x.$$

При $x = 0$ имеем $\{T\} + \sin T = 0$, а при $x = -T$ получаем $\{-T\} - \sin T = 0$. Отсюда $\{T\} + \{-T\} = 0$. Так как дробная часть числа всегда неотрицательна, то из последнего равенства запишем $\{T\} = \{-T\} = 0$. Следовательно, T — целое число. Вместе с тем из равенства $\{T\} + \sin T = 0$ получаем $\sin T = 0$, $T = \pi k$, где $k \in Z$ и $k \neq 0$ (ведь $T \neq 0$), т.е. T — иррациональное число. Получили противоречие.

Упражнения

II.35. Доказать, что функция f не является периодической:

а) $f(x) = \cos x + \cos \sqrt{2}\,x$;

б) $f(x) = \sin x + \cos \sqrt{2}\,x$;

в) $f(x) = \sin x + \sin \pi x$;

г) $f(x) = \{x\} + \cos x$;

д) $f(x) = \cos x + \cos \{x\}$;

е) $f(x) = \sin x + \sin \{x\}$;

ж) $f(x) = \mathfrak{D}(x) + \cos x$ [1]; *з)* $f(x) = \mathfrak{D}(x) + \sin x$.

* * *

Пример II.36. Доказать, что функция $f(x) = x\cos x$ не является периодической.

Решение. Пусть функция f периодическая с периодом T. Разберем случай, когда $T > 0$ (если $T < 0$, рассуждения будут аналогичными). Рассмотрим функцию f на промежутке $[0, T]$, т.е. на отрезке длиной в период. Понятно, что f ограничена на этом отрезке, например, сверху числом T, снизу числом $-T$. Итак, функция f ограничена на отрезке длиной в период, а следовательно, ограничена на каждом из отрезков $[nT, (n+1)T]$, т.е. вообще ограничена на $D(f) = R$.

С другой стороны, для любого $M > 0$ можно указать такое $x_0 \in D(f)$, например, $x_0 = 2\pi\,[M]$, что $|f(x_0)| > M$. А это означает, что функция f — неограниченная.

Заметим, что таким же методом можно решить упражнения **II.22** (*и, к, л*).

Упражнения

II.37. Доказать, что функция f не является периодической:

а) $f(x) = x^2\cos x$;

б) $f(x) = x\sin x$;

в) $f(x) = -2x\sin x^2$;

г) $f(x) = |x| + \sin \pi x$;

д) $f(x) = |x| - \cos 2x$;

е) $f(x) = 2x^2 - \sin \pi x$;

ж) $f(x) = 3x + \left\{x - \frac{1}{2}\right\}$.

* * *

[1] $\mathfrak{D}(x)$ — это функция (функция Дирихле), которая задается по следующему правилу:

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ — рациональное, } x \in Q, \\ 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное, } x \in R \setminus Q. \end{cases}$$

Интересно отметить, что любое рациональное число является ее периодом, вместе с тем, как каждое иррациональное, ее периодом не является. Действительно, пусть $T \in Q$. Если $x \in Q$, то $\mathfrak{D}(x) = 1$. Но $x \pm T \in Q$ (сумма двух рациональных чисел — число рациональное), тогда $\mathfrak{D}(x \pm T) = 1$, т.е. T — период. Пусть $T \in R \setminus Q$, тогда $-T \in R \setminus Q$, а следовательно, $\mathfrak{D}(-T) = 0$. Однако $\mathfrak{D}(-T + T) = \mathfrak{D}(0) = 1$. Значит, T — не период.

II.38.[1] Доказать, что если функция f дифференцируема, а ее производная — непериодическая функция, то f — непериодическая.

Решение. Здесь удобно доказать равносильное утверждение: если функция f дифференцируема и периодическая, то функция f' — периодическая.

Если функция f дифференцируема в точке x, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Запишем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x + T) - f(x + T)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Другими словами, функция f также дифференцируема в точке $x + T$, причем $f'(x + T) = f'(x)$. Аналогично доказываем, что $f'(x) = f'(x - T)$. Итак, $x \pm T \in D(f')$, причем $f'(x - T) = f'(x) = f'(x + T)$, следовательно, f' — периодическая функция.

Покажем еще одно решение задачи **II.30**. Имеем

$$f(x) = \cos x^2, \; f'(x) = -2x \sin x^2,$$

а это есть упражнение **II.37** (*в*) из предыдущего цикла задач.

Упражнения

II.39. Доказать, что функция f не является периодической:

а) $f(x) = \sin x^2$;

б) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \cos x$;

в) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \cos x$;

г) $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin x \sqrt{2}$.

* * *

Пример II.40. Доказать, что главным периодом[2] функции $f(x) = \sin x$ является $T = 2\pi$.

1 Этот пример адресован тем, кто знаком с производной.
2 **Определение.** Наименьший из положительных периодов функции f называется ***главным (основным) периодом***.

Решение. То, что $T = 2\pi$ есть период функции f, это почти очевидно. ($x \pm 2\pi \in D(f)$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$). Пусть функция f имеет период T такой, что $0 < T < 2\pi$.

Имеем для любого действительного x $\sin(x + T) = \sin x$. Отсюда $2\sin\frac{T}{2}\cos\left(x + \frac{T}{2}\right) = 0$. Поскольку не для любого действительного x $\cos\left(x + \frac{T}{2}\right) = 0$, то мы вынуждены потребовать, чтобы $\sin\frac{T}{2} = 0$, т.е. $T = 2\pi n$, $n \in Z$, но, так как $T > 0$, то $n \in N$. Следовательно, $T \geqslant 2\pi$. Получили противоречие.

Упражнения

II.41. Показать, что число T — главный период функции f:

а) $f(x) = \cos x$, $T = 2\pi$; *б)* $f(x) = \operatorname{tg} x$, $T = \pi$;

в) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $T = \pi$; *г)* $f(x) = \{x\}$, $T = 1$;

д) $f(x) = \begin{cases} b, \text{ если } x = a + b\sqrt{2}, \\ 0, \text{ если } x \neq a + b\sqrt{2}, \text{ где } a \text{ и } b \text{ — целые,} \end{cases}$ $T = 1$;

е) $f(x) = \begin{cases} a, \text{ если } x = a + b\sqrt{2}, \\ 0, \text{ если } x \neq a + b\sqrt{2}, \text{ где } a \text{ и } b \text{ — целые,} \end{cases}$ $T = \sqrt{2}$;

II.42. Доказать, что функция $f(x) = c$, где c — константа, не имеет главного периода.

II.43. Доказать, что функция Дирихле не имеет главного периода.

* * *

Пример II.44. Доказать, что главным периодом функции $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, $\omega > 0$, является $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Решение. Для любого действительного x числа $x \pm \frac{2\pi}{\omega} \in D(f)$. Далее,

$$f\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)=\sin\left(\omega\cdot\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right)=$$
$$=\sin(\omega x+\varphi+2\pi)=\sin(\omega x+\varphi)=f(x).$$

Следовательно, $T=\frac{2\pi}{\omega}$ — период функции f.

Пусть функция f имеет еще такой период T, что $0<T<\frac{2\pi}{\omega}$. Тогда $\sin(\omega(x+T)+\varphi)=\sin(\omega x+\varphi)$, отсюда $\sin\frac{\omega T}{2}\cos\left(\omega x+\varphi+\frac{\omega T}{2}\right)=0$. Отметим, что полученное равенство должно выполняться для любого действительного x. А это возможно лишь при условии $\sin\frac{\omega T}{2}=0$, т.е. $T=\frac{2\pi k}{\omega}$, где $k\in N$ (ведь $T>0$). Следовательно, $T\geqslant\frac{2\pi}{\omega}$. Получили противоречие.

Упражнения

II.45. Доказать, что число T — главный период функции f:

а) $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$, где $\omega>0$, $T=\frac{2\pi}{\omega}$;

б) $f(x)=\operatorname{tg}(\omega x+\varphi)$, где $\omega>0$, $T=\frac{\pi}{\omega}$;

в) $f(x)=\operatorname{ctg}(\omega x+\varphi)$, где $\omega>0$, $T=\frac{\pi}{\omega}$;

г) $f(x)=\{kx+b\}$, где $k>0$, $T=\frac{1}{k}$.

II.46. Используя результаты задач **II.44** и **II.45**, найти главный период функции f:

а) $f(x)=\cos(3x+1)$;

б) $f(x)=\operatorname{tg}(2x+1)$;

в) $f(x)=\operatorname{ctg}(-7x+2)$;

г) $f(x)=\sin 2\pi x$;

д) $f(x)=\cos\sqrt{3}\,x$;

е) $f(x)=\operatorname{tg}(4\pi x-3)$;

ж) $f(x)=\left\{6x+\frac{5}{8}\right\}$;

з) $f(x)=\{-\sqrt{2}\,x\}$;

и) $f(x)=\left\{\pi x+\frac{1}{\pi}\right\}$.

* * *

Пример II.47. Доказать, что если T_1 и T_2 — периоды функции f, причем $T_1 + T_2 \neq 0$, то $T_1 + T_2$ — также период функции f.

Решение. Если $x \in D(f)$, то $x + T_1 \in D(f)$ (ведь T_1 — период). Но T_2 — также период, тогда $x + T_1 + T_2 \in D(f)$. Аналогично доказывается, что $x - (T_1 + T_2) \in D(f)$. Далее,

$$f(x + T_1 + T_2) = f((x + T_1) + T_2) = f(x + T_1) = f(x).$$

Упражнения

II.48. Доказать, что если T — период функции f, то nT, где $n \in Z$ и $n \neq 0$, также период функции f.

II.49. Доказать, что если T_1 и T_2 — периоды функции f, то $nT_1 + kT_2$, где n и k — целые, также период функции f при условии, что $nT_1 + kT_2 \neq 0$.

II.50. Доказать, что если T — главный период функции f, то любой период функции f имеет вид nT, где $n \in Z$ и $n \neq 0$.

II.51. Если T_1 — период функции f_1, T_2 — период функции f_2, причем $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$, где $m \in Z \setminus \{0\}$, $n \in N$, т.е. периоды T_1 и T_2 соизмеримы, то найдется такое число T, которое будет периодом, как для функции f_1, так и для функции f_2. Доказать.

II.52. Если у функций f_1 и f_2 не существуют соизмеримые периоды, то не найдется такое число T, которое будет периодом, как для функции f_1, так и для функции f_2. Доказать.

II.53. Существуют ли функции f и g, главные периоды которых несоизмеримы, такие, что функция $f + g$ имеет главный период?

II.54. Доказать, что если T — период функции f, то $\frac{T}{\alpha}$ — период функции $f(\alpha x)$, где $\alpha \in R$ и $\alpha \neq 0$.

II.55. Функции f_1 и f_2 — периодические. Верно ли, что функция $f_1 + f_2$ — периодическая?

II.56. Функции f_1 и f_2 — периодические, причем $D(f_1) \cap D(f_2) \neq \varnothing$. Верно ли, что функция $f_1 + f_2$ — периодическая?

II.57. Верно ли, что сумма двух любых периодических функций есть функция непериодическая?

II.58. Может ли сумма периодической и непериодической функций быть периодической функцией?

II.59. Верно ли, что если функции f и g имеют главный период T, причем $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$, то функция $f + g$ также имеет своим главным периодом число T?

II.60. Верно ли, что если функции f и g имеют главный период T, причем $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$, то функция $f + g$ имеет главный период?

II.61. Что можно сказать о периодичности функции $y = f(g(x))$, $D(y) \neq \varnothing$ и *а)* g — периодическая функция; *б)* f — периодическая функция, а g — непериодическая; *в)* f и g — непериодические функции?

II.62. Функция g — периодическая с главным периодом T. Верно ли, что функция $y = f(g(x))$ также имеет главный период T?

II.63. Существует ли функция, для которой любое рациональное число, отличное от нуля, является периодом и ни одно иррациональное число периодом не является?

II.64. Существует ли функция, для которой каждое иррациональное число является ее периодом, но не существует рационального числа, являющегося ее периодом?

* * *

Пример II.65. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_k$ — периодические функции соответственно с периодами $T_1, T_2, \ldots, T_k$. Если каждый период T_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ возможно представить в виде $T_1 = \frac{n_1}{m_1} t$, $T_2 = \frac{n_2}{m_2} t, \ldots, T_k = \frac{n_k}{m_k} t$, где $n_i \in Z \setminus \{0\}$, $m_i \in N$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $t \in R \setminus \{0\}$, то число

$$T = \frac{НОК(n_1, n_2, \ldots, n_k)}{НОД(m_1, m_2, \ldots, m_k)} t$$

есть общим периодом всех данных функций. Доказать.

Решение. Поскольку

$$НОК(n_1, n_2, \ldots, n_k) \vdots n_i, \text{ а } m_i \vdots НОД(m_1, m_2, \ldots, m_k),$$

где $i = 1, 2, \ldots, k$, то $T : T_i = l_i$, $l_i \in Z \setminus \{0\}$, т.е. $T = T_1 l_1$, $T = T_2 l_2, \ldots, T = T_k l_k$. Следовательно (см. **II.48**), T — общий период данных функций.

Замечание. Если ввести ограничение

$$D(f_1) \cap D(f_2) \cap \ldots \cap D(f_n) \neq \varnothing,$$

то пример **II.65** можно рассматривать как алгоритм нахождения периодов функций вида

$$F(x) = k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x) \pm \ldots \pm k_n f_n(x),$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — некоторые действительные числа. Действительно, покажем, как найти период функции

$$f(x) = \sin 2x - 3\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 4\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Рассмотрим функции $f_1(x) = \sin 2x$, $f_2(x) = -3\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, $f_3(x) = 4\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Их периоды соответственно равны $T_1 = \frac{1}{1}\pi$, $T_2 = \frac{4}{3}\pi$, $T_3 = \frac{2}{1}\pi$. Тогда общий период этих функций (а значит, и период функции f) равен

$$T = \frac{НОК(1, 4, 2)}{НОД(1, 3, 2)}\pi = \frac{4}{1}\pi = 4\pi.$$

Упражнения

II.66. Пользуясь результатом задачи **II.65**, найти период функции f:

а) $f(x) = \sin\frac{3x}{2} + \operatorname{tg} 7x$;

б) $f(x) = \cos x + 2\sin\left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$;

в) $f(x) = \operatorname{ctg}(x - 1) - 3\sin 3x$;

г) $f(x) = \sin 3x + \cos\frac{3x}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{9x}{5}$;

д) $f(x) = \cos\frac{5x}{8} + 5\,\mathrm{tg}\left(\frac{7x}{11} - \frac{\pi}{4}\right) - \sin(6x - 3)$;

е) $f(x) = \sin\pi x - 2\cos\frac{\pi x}{3}$;

ж) $f(x) = \mathrm{tg}\frac{4\pi x}{9} + \mathrm{ctg}\frac{9\pi x}{4}$;

з) $f(x) = \sin\pi x + \left\{3x - \frac{1}{2}\right\}$;

и) $f(x) = 2\sin 5\pi x + \frac{1}{3}\{2x\} - \mathrm{ctg}\frac{13\pi x}{7}$;

к) $f(x) = \mathrm{tg}\frac{3\pi x}{2} + \mathrm{ctg}\frac{10\pi x}{3} + \left\{\frac{x}{5}\right\}$.

* * *

Пример II.67. При каких значениях параметра a функция $f(x) = \frac{x^2 - a}{x^2 - a}$ является периодической?

Решение. Если $a \geqslant 0$, то функция f имеет конечное число точек, в которых она не определена (при $a = 0$ это $x = 0$, при $a > 0$ это $x = \pm\sqrt{a}$), следовательно, она непериодическая. Если $a < 0$, то $f(x) = 1$ при любом действительном x, т.е. она периодическая.

Упражнения

II.68. При каких значениях параметра a функция f является периодической?

а) $f(x) = ax + 2$;

б) $f(x) = (x^2 + 1)^a$;

в) $f(x) = \frac{|x| - a}{|x| - a}$;

г) $f(x) = (a - 1)\sqrt{x^2 + a}$;

д) $f(x) = (a - 1)\sqrt{x^2 - a}$;

е) $f(x) = (a + 1)\sqrt{x^2 - a}$;

ж) $f(x) = (a^2 + 2a)\sqrt{x^2 - a}$;

з) $f(x) = \cos\sqrt{ax}$;

и) $f(x) = a\cos x^2$;

к) $f(x) = \cos ax^2$.

* * *

Пример II.69. При каких значениях параметра a функция $f(x) = a\cos x + (a^2 - a)x$ имеет главный период?

Решение. Понятно, что периодичности «мешает» слагаемое $(a^2 - a)x$.

Если $a^2 - a \neq 0$, то функция f не является периодической.

Если $a = 1$, то $f(x) = \cos x$ и $T = 2\pi$ — ее главный период.

Если $a = 0$, то функция f периодическая, однако главного периода не имеет.

Упражнения

II.70. При каких значениях параметра a функция f имеет главный период:

а) $f(x) = \sin ax$;

б) $f(x) = \operatorname{tg}(a^2 + 1)x$;

в) $f(x) = \cos(x + a)$;

г) $f(x) = \{ax\}$;

д) $f(x) = \cos ax + (a^2 + a)x$;

е) $f(x) = \sqrt{a}\sin x$;

ж) $f(x) = a\sqrt{\sin x}$?

* * *

Пример II.71. При каких значениях параметра a число π является периодом функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{a - \cos x}$?

Решение. Чтобы число π являлось периодом функции f, необходимо выполнение равенства $f(x) = f(x + \pi)$ при всех допустимых x. Имеем

$$\frac{\sin x}{a - \cos x} = \frac{\sin(x + \pi)}{a - \cos(x + \pi)},$$

$$\frac{\sin x}{a - \cos x} = \frac{\sin x}{-a - \cos x}.$$

Последнее равенство становится тождеством только при $a = 0$. Следовательно, функция f приобретает вид $f(x) = -\operatorname{tg} x$. Перед тем как записать ответ, заметим, что если $x \in D(f)$, то $(x + \pi) \in D(f)$ и $(x - \pi) \in D(f)$.

Ответ: $a = 0$.

Пример II.72. При каких значениях параметра a функция

$$f(x) = \frac{a^2-1}{(a+3)^2}\cos\frac{3x}{2} + \left(a^3+a^2-4a-4\right)\cdot\frac{x^2+a-5}{x^2-2a+1}$$

является периодической и имеет наименьший положительный период $\frac{4\pi}{3}$?

Решение.

Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{a^2-1}{(a+3)^2}\cos\frac{3x}{2}$.

Если $a^2 = 1$, то эта функция периодическая, но главного периода не имеет. Вместе с тем при $a = 1$ функция f становится дробно-рациональной, но не константой, следовательно, непериодической. Если же $a = -1$, то $f(x) \equiv 0$, т.е. функция f периодическая. Дальнейшие рассуждения будем строить для случая $a^2 \neq 1$.

Вернемся к функции g. Она периодическая с главным периодом $\frac{4\pi}{3}$. Такой же период должна иметь функция f. Для этого необходимо, чтобы функция $h(x) = (a+1)\times$ $\times(a^2-4)\frac{x^2+a-5}{x^2-2a+1}$ была периодической. Нетрудно заметить, что искомые значения a должны удовлетворять неравенству $a < \frac{1}{2}$. Иначе уравнение $x^2-2a+1=0$ имело бы корни, а значит, функция h не была бы периодической. Далее, если $a^2-4 \neq 0$, то h — дробно-рациональная функция, опять-таки отличная от константы. Остается проверить значение $a = -2$. Проверка дает положительный результат.

Ответ: Если $a = -1$, то функция f периодическая, но главного периода не имеет;
если $a = -2$, то главным периодом функции f будет $\frac{4\pi}{3}$;
при остальных a функция f непериодическая.

Упражнения

II.73. При каких значениях параметра a число T является периодом функции f:

а) $f(x) = \cos(2x + a)$, $T = 2\pi$;

б) $f(x) = \sin ax$, $T = \pi$;

в) $f(x) = \{ax\}$, $T = 2$;

г) $f(x) = \mathfrak{D}(ax)$, $T = \pi$ ($\mathfrak{D}(x)$ — функция Дирихле);

д) $f(x) = \sin\{ax\}$, $T = 3$;

е) $f(x) = \sin\{ax\}$, $T = 3\pi$;

ж) $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{3a + \sin 2x}$, $T = \dfrac{\pi}{2}$?

II.74. При каких a функция

$$f(x) = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\sin\frac{5x}{2} + (a^3 - a^2 - 9a + 9)\frac{x^2 + a + 1}{x^2 + 3a + 5}$$

является периодической и имеет наименьший положительный период $\dfrac{4\pi}{5}$?

* * *

Пример II.75. Найти все рациональные значения параметра a, при которых функции

$$f(x) = \cos\frac{2x}{\sqrt{5} + a^2} \text{ и } g(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{125} - 4a + 1}$$

имеют одинаковые периоды.

Решение. Требование соизмеримости периодов функций f и g равносильно требованию задачи.

Периоды функций f и g соответственно $T_1 = \dfrac{2\pi}{\dfrac{2}{\sqrt{5} + a^2}}$, $T_2 = \dfrac{\pi}{\dfrac{1}{\sqrt{125} - 4a + 1}}$. Имеем $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{\sqrt{5} + a^2}{\sqrt{125} - 4a + 1} = \dfrac{m}{n}$, где m и n — целые числа, $m \neq 0$, $n \neq 0$.

Отсюда $n\sqrt{5} + a^2n = 5\sqrt{5}\,m - 4am + m$,

$$a^2n + 4am - m = \sqrt{5}(5m - n).$$

Левая часть последнего равенства принимает только рациональные значения. Значит, равенство возможно лишь при $n = 5m$. Тогда получаем $5ma^2 + 4am - m = 0$. Поскольку $m \neq 0$, переходим к равенству $5a^2 + 4a - 1 = 0$. Отсюда

$$a = -1 \text{ или } a = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $a = -1$ или $a = \frac{1}{5}$.

Упражнения

II.76. При каких значениях параметра a среди периодов функций f и g найдутся одинаковые:

а) $f(x) = a\sin x$, $g(x) = \{x\}$;

б) $f(x) = \sin x$, $g(x) = a\{x\}$;

в) $f(x) = \sin ax$, $g(x) = \{x\}$;

г) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \{ax\}$;

д) $f(x) = \sin ax$, $g(x) = \cos\{x\}$;

е) $f(x) = \mathfrak{D}(x)$, $g(x) = \cos ax$;

ж) $f(x) = \mathfrak{D}(ax)$, $g(x) = \sin x$;

з) $f(x) = \mathfrak{D}(ax)$, $g(x) = \cos \pi x$;

и) $f(x) = \mathfrak{D}(\pi x)$, $g(x) = \sin ax$;

к) $f(x) = \mathfrak{D}(\pi x)$, $g(x) = \{ax\}$;

л) $f(x) = \sin\dfrac{2ax}{a^2 + \sqrt{12}}$, $g(x) = \operatorname{tg}\dfrac{2x}{1 - 2a + \sqrt{108}}$?

* * *

Пример II.77. При каких значениях параметра a уравнение $2\cos ax - 3\operatorname{tg}^2 x - 2 = 0$ имеет единственное решение?

Решение. Легко заметить, что $x = 0$ — корень этого уравнения при любом a. Следовательно, данное уравнение не должно иметь больше корней. Сразу отметим, что $a \neq 0$. В противном случае корней бесконечно много. Рассмотрим функции

$$f(x) = 2\cos ax \text{ и } g(x) = -3\,\mathrm{tg}^2 x - 2.$$

Эти функции имеют основные периоды. Если функция $y = f(x) + g(x)$ будет периодической, то исходное уравнение имеет бесконечно много корней (ведь один корень $x = 0$ уже есть). Поэтому мы вынуждены потребовать от функции $y = f(x) + g(x)$ быть непериодической. А это возможно лишь тогда, когда функции f и g имеют несоизмеримые периоды, что в свою очередь влечет за собой иррациональность a. Несомненно, этот вывод — ключевой. Однако важно понимать, что решение не завершено, поскольку нами еще не установлено, сколько корней имеет исходное уравнение для иррациональных a. Перепишем данное уравнение в таком виде: $2\cos ax = 3\,\mathrm{tg}^2 x + 2$. Этот шаг приносит заметную пользу — левую и правую части уравнения легко оценить. Переходим к равносильной системе

$$\begin{cases}\cos ax = 1,\\ \mathrm{tg}\,x = 0,\end{cases} \quad \text{отсюда} \quad \begin{cases}ax = 2\pi k,\\ x = \pi n, \quad k \text{ и } n \text{ — целые.}\end{cases}$$

Если $x \neq 0$, то $a = \dfrac{2k}{n}$, что противоречит выводу об иррациональности a. Таким образом, полученная система, а следовательно, и исходное уравнение при иррациональных a не может иметь решений, отличных от $x = 0$.

Ответ: a — любое иррациональное число.

Упражнения

II.78. При каких значения параметра a уравнение имеет единственное решение:

а) $\sin x - \sqrt{\cos ax} - 1 = 0$;

б) $1 + \sin^2 ax = \cos x$;

в) $\cos^2 ax + \cos x = 2(\cos ax + \cos x - 1)$?

Глава III

Обратимые функции

Функции y = arcsin x, y = arccos x, y = arctg x, y = arcctg x.

Определение 1. *Функция $y = f(x)$ называется* ***обратимой****, если для любого $y_0 \in E(f)$ найдется единственное $x_0 \in D(f)$ такое, что $y_0 = f(x_0)$.*

Иначе: функция f называется ***обратимой***, если она принимает каждое свое значение ровно один раз.

Определение 2. *Функция $y = f(x)$ называется* ***обратимой*** *на множестве M, если для любых $x_1 \in M$ и $x_2 \in M$, $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Пример III.1. Доказать, что функция $f(x) = \sin x$ не является обратимой.

Решение. В качестве y_0 (элемента области значений) выберем число 0. Такое значение данная функция принимает в бесконечном числе точек вида $x = \pi n$, $n \in Z$. Следовательно, функция $f(x) = \sin x$ обратимой не является.

Упражнения

III.2. Доказать, что следующие функции не являются обратимыми:

а) $y = x^2$;

б) $y = |x|$;

в) $y = \sqrt{x^2 + 1}$;

г) $y = \dfrac{1}{x^4}$;

д) $y = 5$;

е) $y = [x]$;

ж) $y = \{x\}$;

з) $y = \cos x$;

и) $y = \operatorname{tg} x$;

к) $y = \operatorname{ctg} x$;

л) $y = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0; \end{cases}$

м) $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}, & \text{если } x < 0, \\ x, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$

III.3. Может ли периодическая функция быть обратимой?

III.4. Может ли нечетная функция быть обратимой?

III.5. Может ли четная функция быть обратимой?

III.6. Верно ли, что всякая линейная функция обратима?

III.7. Может ли обратимая функция иметь экстремум?

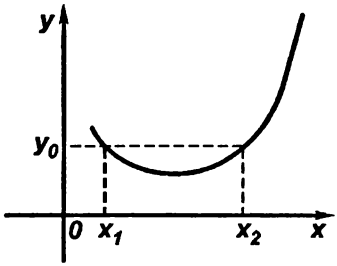


Рис. 5

* * *

Пример III.8. Доказать, что график обратимой функции горизонтальные прямые пересекают не более, чем в одной точке.

Решение. Пусть какая-то прямая пересекает график обратимой функции f в двух точках (рис. 5). Тогда данная функция свои значения принимает дважды: в точках x_1 и x_2. Следовательно, функция f обратимой не является.

Упражнения

III.9. Какие из графиков, изображенных на рис. 6-13, являются графиками обратимых функций?

* * *

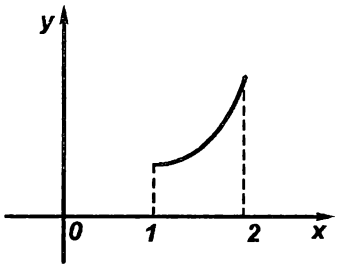


Рис. 6

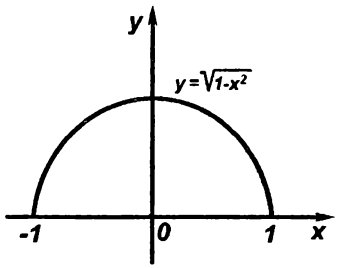


Рис. 7

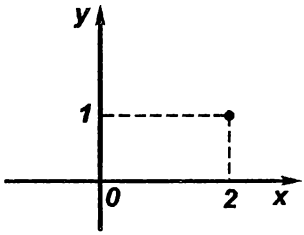


Рис. 8

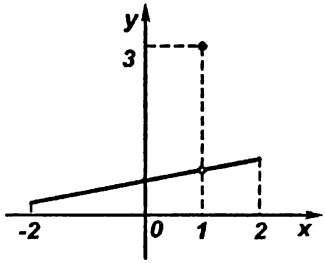


Рис. 9

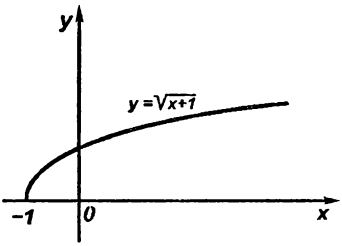


Рис. 10

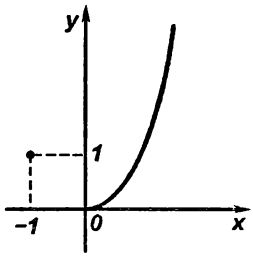


Рис. 11

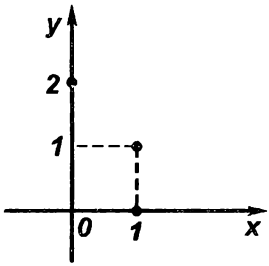


Рис. 12

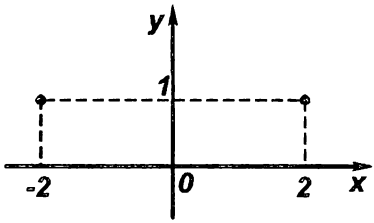


Рис. 13

Теорема (достаточное условие обратимости). **Если функция f возрастает (убывает) на множестве M, то она обратима на этом множестве.**

Доказательство. Пусть функция f возрастает (убывает), но необратима. Тогда существуют, по крайней мере, два неравных аргумента $x_1 \in M$ и $x_2 \in M$ такие, что $f(x_1) = f(x_2)$. Это противоречит условию монотонности функции f.

Упражнения

III.10. Какие из следующих функций являются обратимыми:[1]

а) $y = \sqrt{x}$;

б) $y = \sqrt[3]{x}$;

в) $y = \sqrt[3]{x^2}$;

г) $y = \sqrt{x^3}$;

д) $y = x^3$;

е) $y = x^{2n+1}$, $n \in N$;

ж) $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$, $n > 1$;

з) $y = x^{2n}$, $n \in N$;

и) $y = \sqrt{x^n}$, $n \in N$;

к) $y = x\,|x|$;

л) $y = x^2\,|x|$;

м) $y = x^2$, $D(y) = [1;\ \infty)$, $D(y) = [-2;\ -1]$, $D(y) = [-2;\ 1]$;

н) $y = \sin x$, $D(y) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, $D(y) = \left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$, $D(y) = [0;\ \pi]$;

о) $y = \cos x$, $D(y) = [0;\ \pi]$, $D(y) = [-\pi;\ 0]$, $D(y) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$;

п) $y = \operatorname{tg} x$, $D(y) = \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, $D(y) = \left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4}\right]$;

р) $y = \operatorname{ctg} x$, $D(y) = (0;\ \pi)$, $D(y) = \left(\pi;\ \frac{5\pi}{4}\right]$?

Определение (описательное). Пусть $y = f(x)$ — обратимая функция. Для каждого x из области определения найдем соответствующее значение y функции. Рассмотрим множество упорядоченных пар вида $(x;\ y)$, т.е. $(x;\ f(x))$. Множество первых компонентов пар — это область определения функции, множество вторых компонентов — это область значений функции. Среди этих пар нет таких, у которых равны первые компоненты, потому что f — функция. Среди этих пар нет

[1] Если в задаче не указано множество $D(y)$, то будем считать, что функция рассматривается на естественной области определения, т.е. на максимальном множестве, на котором она определена.

и таких, у которых равны вторые компоненты, потому что f — обратимая функция. Поменяем местами компоненты пар, получим множество пар вида $(y; x)$ с неравными первыми компонентами. Тогда это множество, в свою очередь, задает функцию. Эту функцию будем называть обратной данной. Также вновь построенную функцию и данную будем называть взаимно обратными.

Итак, чтобы из данной обратимой функции f получить обратную ей, надо поменять местами компоненты упорядоченных пар вида $(x; f(x))$.

Теперь становится совершенно очевидно, что если функции f и g взаимно обратны, то $D(f) = E(g)$ и $E(f) = D(g)$, т.е. при переходе от данной функции к обратной области определения и значения меняются местами.

Установим еще одно ключевое свойство взаимно-обратных функций. Пусть $(x_0; y_0)$ — упорядоченная пара, которую задает обратимая функция f, т.е. $y_0 = f(x_0)$. Тогда пара $(y_0; x_0)$ определяется функцией g, обратной функции f, т.е. $x_0 = g(y_0)$. Итак, если f и g — взаимно обратные функции и $y_0 = f(x_0)$, то $x_0 = g(y_0)$. Этот факт можно записать иначе: $f(g(y_0)) = y_0$ и $g(f(x_0)) = x_0$. Другими словами, если f и g — взаимно обратные функции, то для любого $x \in D(f)$ $g(f(x)) = x$ и для любого $x \in D(g)$ $f(g(x)) = x$.

Найденные свойства взаимно обратных функций являются свойствами-признаками. Поэтому в литературе можно встретить и такое

Определение. *Функции f и g называются* ***взаимно обратными****, если $D(f) = E(g)$, $E(f) = D(g)$, а также для любого $x \in D(f)$ $g(f(x)) = x$ и для любого $x \in D(g)$ $f(g(x)) = x$.*

Пример III.11. Доказать, что функции $f(x) = 2x - 1$ и $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ являются взаимно обратными.

Решение. Очевидно, что $D(f) = E(f) = D(g) = E(g) = R$. Далее,

$$f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) - 1 = x,$$

а также $g(f(x)) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2x-1}{2} + \frac{1}{2} = x.$

Пример III.12. Докажите, что функции $f(x) = x^2 + 1$, $D(f) = [0; \infty)$ и $g(x) = \sqrt{x-1}$ являются взаимно обратными.

Решение. Поскольку $E(f) = [1; \infty)$, $D(g) = [1; \infty)$, $E(g) = [0; \infty)$, то $D(f) = E(g)$, $E(f) = D(g)$.

Имеем для любого $x \in D(g) = [1; \infty)$

$$f(g(x)) = g^2(x) + 1 = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = x.$$

Для любого $x \in D(f) = [0; \infty)$

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x) - 1} = \sqrt{x^2 + 1 - 1} = \sqrt{x^2} = x.$$

Упражнения

III.13. Доказать, что функции f и g — взаимно обратные:

а) $f(x) = 2x$ и $g(x) = \frac{x}{2}$;

б) $f(x) = 4x + 2$ и $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$;

в) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$ и $g(x) = 3x - 1$;

г) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ и $g(x) = \frac{2x+1}{x}$;

д) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ и $g(x) = \frac{x}{1-x}$;

е) $f(x) = \frac{1-x}{x+2}$ и $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$;

ж) $f(x) = \sqrt{x+2}$ и $g(x) = x^2 - 2$, $D(g) = [0; \infty)$;

з) $f(x) = (x-3)^2$, $D(f) = [3; \infty)$ и $g(x) = \sqrt{x} + 3$;

и) $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $D(f) = (-\infty; 1]$ и

$$g(x) = 1 - \sqrt{x-2};$$

к) $f(x) = \sqrt[3]{x+4}$ и $g(x) = x^3 - 4$;

л) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$ и $g(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$.

* * *

Нахождение функции, обратной данной, заданной аналитически

Выше мы описали построение обратной функции путем перемены мест компонентов упорядоченных пар. Очевидно, что таким методом удобно пользоваться, если данная функция задана таблично и области определения и значений функции — конечные множества. Для случая аналитического задания функции (задание функции с помощью уравнения с двумя переменными вида $y = f(x)$) способ построения обратной функции позволяет множествам $D(f)$ и $E(f)$ быть бесконечными. Надо в уравнении $y = f(x)$ выразить переменную x через переменную y, т.е. получить уравнение вида $x = g(y)$. Последнее и может задать функцию g, обратную функции f. При желании, или придерживаясь традиции в обозначении аргумента и значения функции, можно считать, что уравнение $y = g(x)$ задает функцию g, обратную функции f при условии, что $D(f) = E(g)$ и $E(f) = D(g)$.

Пример III.14. Найти функцию, обратную функции $y = 3 + \sqrt{2 - x}$ и проверить, действительно ли найденная функция является обратной данной.

Решение. Прежде всего заметим, что данная функция является убывающей, а следовательно, обратимой. Выразим в уравнении переменную x через переменную y. Имеем

$$\sqrt{2 - x} = y - 3, \qquad 2 - x = (y - 3)^2, \qquad 2 - x = y^2 - 6y + 9,$$

$$x = -y^2 + 6y - 7.$$

Переходя к традиционным обозначениям, получаем $y = -x^2 + 6x - 7$. Здесь важно понимать, что найденная квадратичная функция $g(x) = -x^2 + 6x - 7$ не является обратной для функции $f(x) = 3 + \sqrt{2 - x}$ хотя бы в силу того, что квадратичная функция не является обратимой. Понятно, что необходимо наложить ограничения на область определения функции g. Имеем $D(f) = (-\infty; 2)$, $E(f) = [3; \infty)$. Поэтому, если мы рассмотрим функцию $g(x) = -x^2 + 6x - 7$ на области определения $D(g) = E(f) = [3; \infty)$, то это и будет функция, обратная функции f.

Сделаем проверку, как требует условие задачи. Поскольку координаты вершины параболы $g(x)$ равны (3; 2) и ветви параболы направлены вниз, то $E(g) = (-\infty;\ 2]$. Тогда имеем $D(f) = E(g)$, $E(f) = D(g)$.

Далее, для любого $x \in D(f) = (-\infty;\ 2]$

$$g(f(x)) = -f^2(x) + 6f(x) - 7 =$$

$$= -(3 + \sqrt{2 - x})^2 + 18 + 6\sqrt{2 - x} - 7 =$$

$$= -9 - 6\sqrt{2 - x} - 2 + x + 18 + 6\sqrt{2 - x} - 7 = x.$$

Для любого $x \in D(g) = [3;\ \infty)$

$$f(g(x)) = 3 + \sqrt{2 - g(x)} = 3 + \sqrt{2 + x^2 - 6x + 7} =$$

$$= 3 + \sqrt{(x - 3)^2} = 3 + |x - 3| = 3 + x - 3 = x.$$

Упражнения

III.15. Найти функцию, обратную данной, и убедиться, что полученные функции являются взаимно обратными:

а) $y = 2x + 4$;

б) $y = 3 - 5x$;

в) $y = \frac{1}{x}$;

г) $y = \frac{3}{x + 2}$;

д) $y = \frac{-x}{x + 3}$;

е) $y = \sqrt[3]{x}$;

ж) $y = \sqrt[3]{2x + 1}$;

з) $y = \sqrt{x}$;

и) $y = \sqrt{x - 3}$;

к) $y = (x + 2)^2$, $D(y) = (-\infty;\ -2]$;

л) $y = x^2 - 4x + 6$, $D(y) = [2;\ \infty)$;

м) $y = 1 + \sqrt{x + 3}$;

н) $y = 2 - \sqrt{3 - x}$.

* * *

Теорема. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Доказательство. Пусть точка $M(a;\ b)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Тогда $b = f(a)$. Если функция g об-

ратная функции f, то $g(b) = a$, т.е. точка $N(b;\ a)$ принадлежит графику функции $y = g(x)$. Осталось показать, что точки M и N симметричны относительно прямой $y = x$. Имеем (рис. 14)

$$ON = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$OM = \sqrt{a^2 + b^2},$$

т.е. точка O равноудалена от концов отрезка MN, а следовательно, принадлежит срединному перпендикуляру к отрезку MN. Середина K отрезка MN имеет координаты $\left(\frac{a+b}{2};\ \frac{a+b}{2}\right)$, т.е. принадлежит прямой $y = x$. Значит, прямая $y = x$ и есть срединный перпендикуляр к отрезку MN.

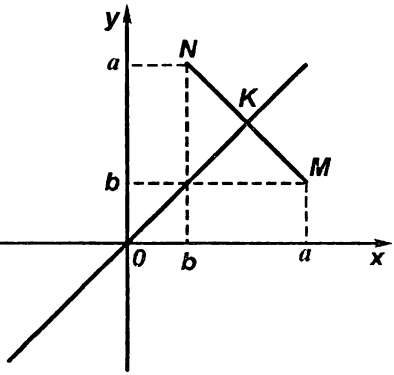


Рис. 14

Упражнения

III.16. С помощью графика функции f построить график функции g, обратной функции f (рис. 15-20).

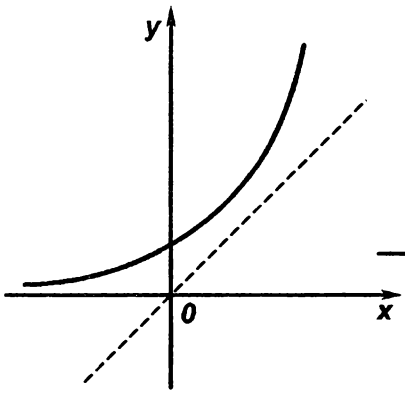


Рис. 15

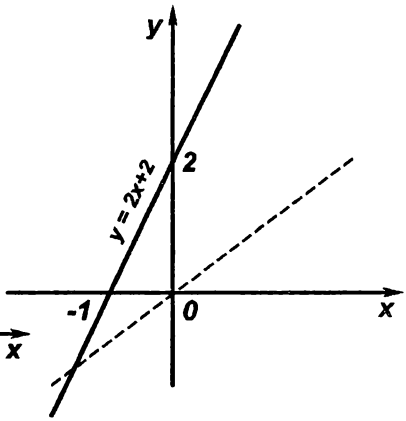


Рис. 16

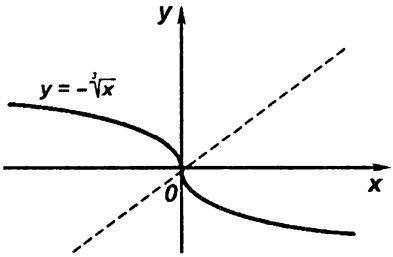


Рис. 17

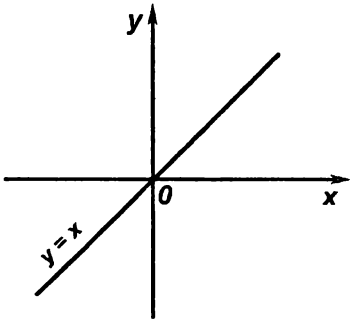


Рис. 18

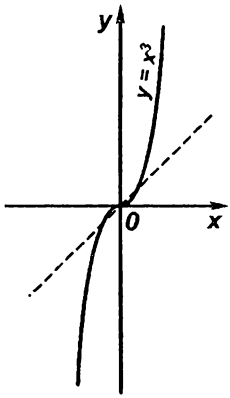


Рис. 19

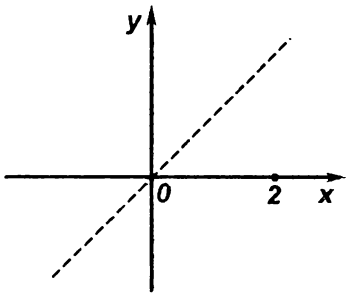


Рис. 20

III.17. Для функции $y = x^2$ найти какое-нибудь множество M из области определения, на котором данная функция обратима.

III.18. Для каждой из функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ указать какой-нибудь промежуток, на котором она обратима. Построить график обратной функции.

* * *

Пример III.19. Нечетная функция f имеет обратную функцию g. Известно, что неравенство $f(x) > \frac{1}{2}x - 1$ выполняется для всех $x \in R$, а уравнение $|g(x)| = 119 - x^2$ имеет два решения. Найти эти решения приближенно с абсолютной погрешностью 0,2.

Решение. Из условия следует, что график функции $y = f(x)$ лежит выше прямой $y = \frac{1}{2}x - 1$. Поскольку функция f — нечетная, то ее график лежит ниже прямой, симметричной прямой $y = \frac{1}{2}x - 1$ относительно начала координат, т.е. ниже прямой $y = \frac{1}{2}x + 1$. Следовательно, график функции f лежит в полосе, ограниченной прямыми $y = \frac{1}{2}x - 1$ и $y = \frac{1}{2}x + 1$.

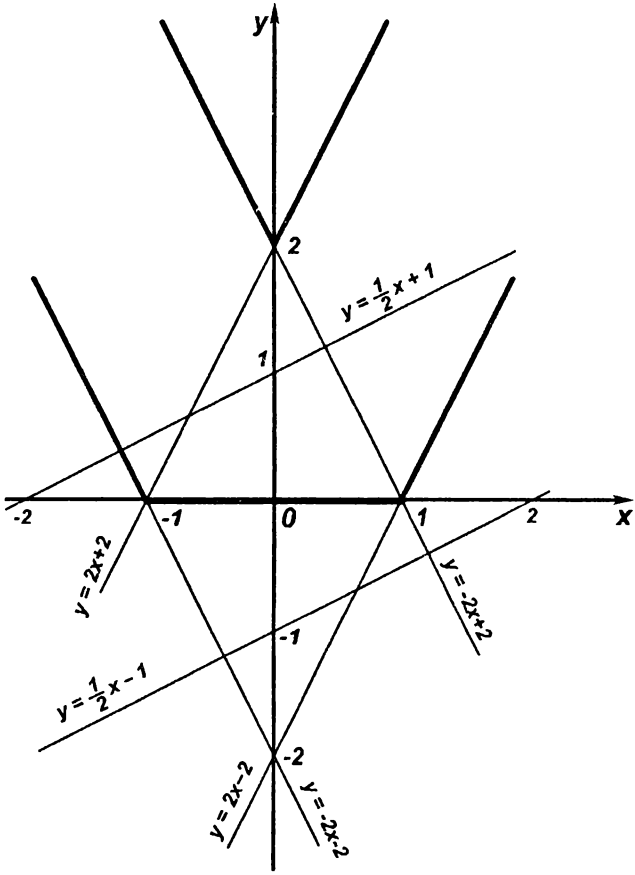


Рис. 21

Поскольку функция g — обратная функции f, то их графики симметричны относительно прямой $y = x$. Тогда график функции g лежит в полосе, симметричной вышеуказанной, относительно прямой $y = x$. Функции, обратные функциям $y = \frac{1}{2}x + 1$ и $y = \frac{1}{2}x - 1$, соответственно будут $y = 2x - 2$ и $y = 2x + 2$. Следовательно, график функции g лежит в полосе, ограниченной этими прямыми, а график $y = |g(x)|$ содержится в фигуре, ограниченной жирными линиями на рис. 21.

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — абсциссы точек пересечения графика $y = 119 - x^2$ соответственно с прямыми $y = -2x - 2$, $y = -2x + 2$, $y = 2x + 2$, $y = 2x - 2$. Из соображений симметрии достаточно найти x_1 и x_2. Эти значения найдем, решив следующие две системы:

$$а)\ \begin{cases} y = -2x - 2, \\ y = 119 - x^2, \\ x < 0; \end{cases} \qquad б)\ \begin{cases} y = -2x + 2, \\ y = 119 - x^2, \\ x < 0. \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = 1 - \sqrt{122}$, $x_2 = 1 - \sqrt{118}$. Тогда

$$x_3 = \sqrt{118} - 1,\ x_4 = \sqrt{122} - 1.$$

Заметим, что каждый из двух корней уравнения $|g(x)| = 119 - x^2$ принадлежит соответственно каждому из промежутков $(x_1;\ x_2)$ и $(x_3;\ x_4)$. Имеем

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{122} - \sqrt{118} = \frac{4}{\sqrt{122} + \sqrt{118}} < \frac{4}{10 + 10} = 0{,}2.$$

Аналогично можно показать, что $|x_3 - x_4| < 0{,}2$. Следовательно, каждое число из указанных промежутков может служить приближенным значением корня уравнения $|f(x)| = 119 - x^2$ с абсолютной погрешностью 0,2.

Ответ: каждое из двух приближенных решений принадлежит соответственно промежуткам $(1 - \sqrt{122};\ 1 - \sqrt{118})$ и $(\sqrt{118} - 1;\ \sqrt{122} - 1)$.

Упражнения

III.20. Четная функция f на промежутке $[0;\ \infty)$ имеет обратную функцию g. Неравенство $f(x) < 2x - 6$ выполняется при всех положительных x, а уравнение $g(x) = (x - 6)^2 + 1$

имеет два положительных решения. Найти эти решения приближенно с абсолютной погрешностью 0,25.

* * *

Теорема. Общие точки возрастающих взаимно обратных функций лежат на прямой $y = x$.

Доказательство. Пусть возрастающие взаимно обратные функции f и g имеют общую точку $(a;\ b)$. Поскольку графики функций f и g симметричны относительно прямой $y = x$, то точка $(b;\ a)$ является общей точкой. Не нарушая общности, положим $a < b$. В силу возрастания функции f запишем $f(a) < f(b)$ (ведь числа a и b принадлежат области определения функции f). Имеем $f(a) = b$, $f(b) = a$ (ведь точки $(a;\ b)$ и $(b;\ a)$ принадлежат графику функции f). Отсюда $b < a$. Получили противоречие. Следовательно, $a = b$, что и доказывает теорему.

Важное замечание. Обратим внимание читателя на обязательность условия возрастания в формулировке теоремы: функции $y = -x^3$ и $y = -\sqrt[3]{x}$, например, взаимно обратные, однако не все точки пересечения их графиков лежат на прямой $y = x$.

Следствие. Если функции f и g взаимно обратные и возрастающие, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно каждому из уравнений $f(x) = x$ или $g(x) = x$.

Пример III.21. Решить уравнение $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$.

Решение. Представим исходное уравнение в таком виде:

$$\frac{x^3 + 1}{2} = \sqrt[3]{2x - 1}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 1)$. Она является монотонной на $D(f)$, а следовательно, обратимой. Легко показать, что функция $g(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$ будет обратной для функции f. Поскольку функции f и g — возрастающие, то общие точки их графиков лежат на прямой $y = x$. Итак, данное уравнение равносильно такому:

$$\frac{x^3+1}{2} = x, \quad x^3 - 2x + 1 = 0, \quad (x-1)(x^2+x-1) = 0.$$

Ответ: $x = 1$ или $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, или $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Упражнения

III.22. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+22} = x^3 - 6x^2 + 12x - 32.$$

III.23. Решить уравнение $\sqrt[3]{3x+9} = 27(x+1)^3 - 6$.

III.24. Решить уравнение $a^5 + x = \sqrt[5]{a-x}$ (a — параметр).

* * *

Определение (описательное). *Функция $f(x) = \sin x$ обратимой не является.* Рассмотрим эту функцию на искусственной области определения $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На этом множестве функция f — возрастающая, следовательно, обратимая. Функция, обратная функции $f(x) = \sin x$, $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, называется арксинусом и обозначается $g(x) = \arcsin x$.

Итак, $g(x) = \arcsin x$ — это функция, обратная функции $f(x) = \sin x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Найдем ключевые свойства арксинуса, исходя из свойств взаимно обратных функций.

Поскольку $E(f) = [-1; 1]$, то $D(g) = [-1; 1]$. Так как $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $E(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Итак, область определения арксинуса — это отрезок $[-1; 1]$, а область значений — это отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Поскольку для любого $x \in D(g)$ $f(g(x)) = x$, то $\sin(\arcsin x) = x$ для любого $x \in [-1; 1]$.

Найденные свойства арксинуса оправдывают следующее

Определение. ***Арксинусом*** *числа a называется такое число b из отрезка* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, *синус которого равен a.*

Отсюда

$$\boxed{\text{Если } b = \arcsin a, \text{ то } b \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \sin b = a.}$$

Исходя из свойств графиков взаимно обратных функций, построим график функции $y = \arcsin x$ — рис. 22.

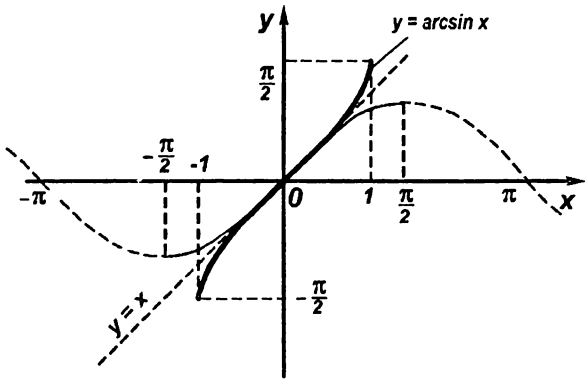


Рис. 22

Пример III.25. Доказать, что $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

Решение. Поскольку $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то доказываемое равенство верно.

Пример III.26. Доказать, что $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Решение. Пусть $\arcsin(-x) = \alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Отсюда $\sin\alpha = -x$ (по определению арксинуса). Имеем $\sin(-\alpha) = x$. Поскольку $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тогда опять-таки по определению арксинуса $-\alpha = \arcsin x$, т.е. $\alpha = -\arcsin x$.

Упражнения

III.27. Доказать, что

а) $\arcsin 0 = 0$;

б) $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$;

в) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$;

г) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$;

д) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$;

е) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$;

ж) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$;

з) $\arcsin (-1) = -\frac{\pi}{2}$.

* * *

Пример III.28. Верно ли равенство

$$\arcsin \frac{2}{3} + \arcsin \frac{6}{7} = \pi?$$

Решение. Поскольку $\arcsin \frac{2}{3} < \frac{\pi}{2}$ и $\arcsin \frac{6}{7} < \frac{\pi}{2}$, то

$$\arcsin \frac{2}{3} + \arcsin \frac{6}{7} < \pi,$$

и равенство неверно.

Упражнения

III.29. Верно ли равенство:

а) $\arcsin 0 = \pi$;

б) $\arcsin \pi = 0$;

в) $\arcsin (-1) = \frac{3\pi}{2}$;

г) $\arcsin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

д) $\arcsin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

е) $\arcsin 1 + \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$;

ж) $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$;

з) $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2}$;

и) $\arcsin 0 + \arcsin \frac{1}{2} = \frac{7\pi}{6}$;

к) $\arcsin 1 \cdot \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{12}$;

л) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{36}$;

м) $\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{16}$;

н) $\arcsin\frac{8}{13}-\arcsin\frac{99}{100}=-\frac{\pi}{2}$?

* * *

Определение (описательное). *Функция $f(x)=\cos x$ обратимой не является.* Рассмотрим эту функцию на искусственной области определения $D(f)=[0;\ \pi]$. На этом интервале функция f — убывающая, а следовательно, обратима. Функция, обратная функции $f(x)=\cos x$, $D(f)=[0;\ \pi]$, называется ***арккосинусом*** и обозначается $g(x)=\arccos x$.

Итак, $g(x)=\arccos x$ — это функция, обратная функции $f(x)=\cos x$ на промежутке $[0;\ \pi]$.

Поскольку $E(f)=[-1;\ 1]$, то $D(g)=[-1;\ 1]$. Так как $D(f)=[0;\ \pi]$, то $E(g)=[0;\ \pi]$.

Поскольку для любого $x\in D(g)$ $f(g(x))=x$, то $\cos(\arccos x)=x$ для любого $x\in[-1;\ 1]$.

Найденные свойства арккосинуса оправдывают следующее

Определение. ***Арккосинусом*** *числа a называется такое число b из отрезка $[0;\ \pi]$, косинус которого равен a.*

Отсюда

Если $\arccos a=b$, то $b\in[0;\ \pi]$ и $\cos b=a$.

Исходя из свойств графиков взаимно обратных функций, построим график функции $y=\arccos x$ (рис. 23).

Пример III.30. Доказать, что

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}.$$

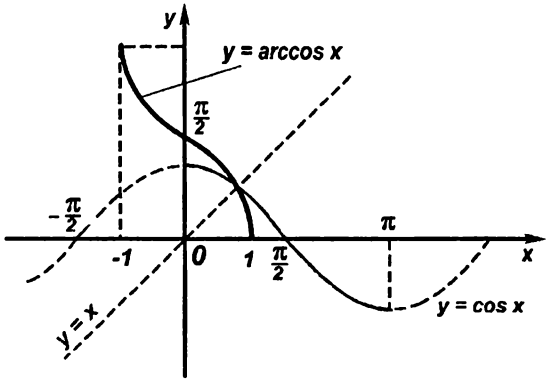


Рис. 23

Решение. Поскольку $\frac{5\pi}{6} \in [0;\ \pi]$ и $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то доказываемое равенство верно.

Пример III.31. Доказать, что $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Решение. Пусть $\arccos(-x) = \alpha$, $\alpha \in [0;\ \pi]$. Отсюда

$$\cos\alpha = -x,\ -\cos\alpha = x,\ \cos(\pi - \alpha) = x.$$

Поскольку $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, то $-\pi \leqslant -\alpha \leqslant 0$ и $0 \leqslant \pi - \alpha \leqslant \pi$.

Тогда по определению арккосинуса $\pi - \alpha = \arccos x$, т.е. $\alpha = \pi - \arccos x$.

Упражнения

III.32. Доказать, что

а) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$;

б) $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$;

в) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$;

г) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$;

д) $\arccos 1 = 0$;

е) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$;

ж) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$;

з) $\arccos(-1) = \pi$.

* * *

Пример III.33. Верно ли равенство

$$\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{\pi}{8}?$$

Решение. Поскольку арккосинус принимает только неотрицательные значения, то равенство неверно.

Упражнения

III.34. Верно ли равенство:

а) $\arccos\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}$;

б) $\arccos 0 = -\frac{\pi}{2}$;

в) $\arccos\frac{\pi}{2} = 0$;

г) $\arccos 1 = 2\pi$;

д) $\arccos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

е) $\arccos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$;

ж) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi$;

з) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$;

и) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{12}$;

к) $\arccos^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{25\pi^2}{36}$?

* * *

Определение (описательное). *Функция* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *обратимой не является.* Рассмотрим эту функцию на искусственной области определения $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На этом множестве функция f возрастает, а следовательно, обратима. Функция, обратная функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, называется ***арктангенсом*** и обозначается $g(x) = \operatorname{arctg} x$.

Итак, $g(x) = \operatorname{arctg} x$ — это функция, обратная функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ на промежутке $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Поскольку $E(f) = R$, то $D(g) = R$.

Так как $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $E(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Понятно, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ для любого $x \in R$.

Определение. ***Арктангенсом*** *числа a называется такое число b из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.*

Отсюда

Если $\operatorname{arctg} a = b$, то $b \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} b = a$.

Исходя из свойств графиков взаимно обратных функций, построим график функции $y = \operatorname{arctg} x$ — рис. 24.

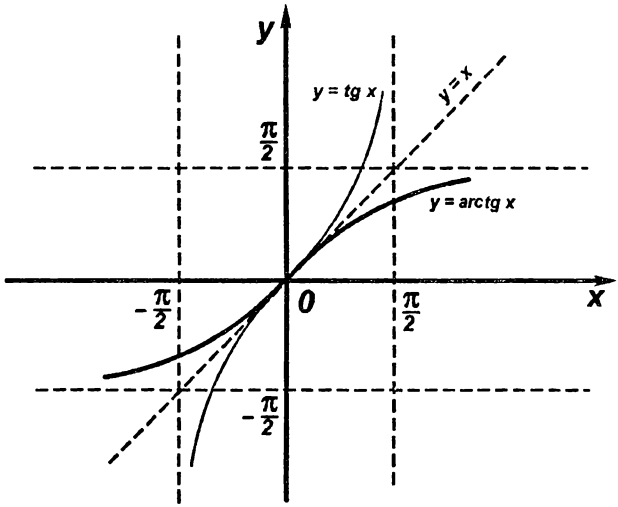


Рис. 24

Определение. *Функция, обратная функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $D(f) = (0; \pi)$, называется* ***арккотангенсом*** *и обозначается $g(x) = \operatorname{arcctg} x$.*

Имеем $D(g) = R$, $E(g) = (0;\ \pi)$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ для любого $x \in R$.

Определение. ***Арккотангенсом*** *числа a называется такое число b из промежутка $(0;\ \pi)$, котангенс которого равен a.*

Отсюда

$$\boxed{\text{Если } \operatorname{arcctg} a = b, \text{ то } b \in (0;\ \pi) \text{ и } \operatorname{ctg} b = a.}$$

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ изображен на рис. 25.

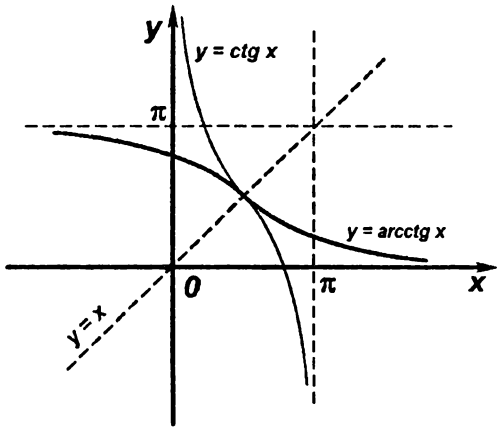


Рис. 25

Пример III.35. Доказать, что $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Решение. Поскольку $\frac{2\pi}{3} \in (0;\ \pi)$ и $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, то доказываемое равенство верно.

Упражнения

III.36. Доказать, что

а) $\operatorname{arctg} 0 = 0$;

б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$;

в) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$;

г) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$;

д) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$;

е) $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$;

ж) $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$;

з) $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$;

и) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$;

к) $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$;

л) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$;

м) $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$;

н) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$;

о) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;

п) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

* * *

Пример III.37. Верно ли равенство

$$\operatorname{arctg}\frac{11}{15} + \operatorname{arcctg}\frac{24}{17} = \frac{3\pi}{2}?$$

Решение. Поскольку $\operatorname{arctg}\frac{11}{15} < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{arcctg}\frac{24}{17} < \pi$, то равенство неверно.

Упражнения

III.38. Верно ли равенство:

а) $\operatorname{arcctg} 0 = \pi$;

б) $\operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}$;

в) $\operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$;

г) $\operatorname{arcctg}\frac{\pi}{2} = 0$;

д) $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

е) $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5\pi}{12}$;

ж) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg}(-1) = \frac{\pi}{12}$;

з) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{2}$?

* * *

Пример III.38. Вычислить $\sin\left(3\operatorname{arctg}\sqrt{3}+2\arccos\frac{1}{2}\right)$.

Решение. Имеем

$$\sin\left(3\operatorname{arctg}\sqrt{3}+2\arccos\frac{1}{2}\right)=\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{3}+2\cdot\frac{\pi}{3}\right)=$$
$$=\sin\left(\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Упражнения

III.39. Вычислить

а) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

в) $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$;

г) $\cos(2\operatorname{arctg}1)$;

д) $\cos\left(2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

е) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

ж) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

з) $\operatorname{ctg}(2\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}))$;

и) $\operatorname{tg}(2\arccos(-1))$;

к) $\cos(2\operatorname{arctg}(-1))$;

л) $\sin\left(3\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right)$;

м) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right)$;

н) $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6}\right)$;

о) $\operatorname{tg}\left(5\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

п) $\cos\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

р) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+2\operatorname{arctg}1\right)$;

с) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

т) $\cos\left(\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})+\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\arcsin\frac{1}{2}\right)$;

у) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}1\right)$.

* * *

Пример III.39. Найти область определения функции $y = \arcsin \frac{\pi}{x+3}$.

Решение. Понятно, что достаточно решить двойное неравенство $-1 \leqslant \frac{\pi}{x+3} \leqslant 1$, т.е. систему

$$\begin{cases} \frac{\pi}{x+3} \leqslant 1, \\ \frac{\pi}{x+3} \geqslant -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x+3-\pi}{x+3} \geqslant 0, \\ \frac{x+\pi+3}{x+3} \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \text{ или } x \geqslant \pi - 3, \\ x \leqslant -\pi - 3 \text{ или } x > -3. \end{cases}$$

Отсюда $x \leqslant -\pi - 3$ или $x \geqslant \pi - 3$.

Ответ: $D(y) = (-\infty; -\pi - 3] \cup [\pi - 3; \infty)$.

Пример III.40. Найти область определения функции

$$y = \arccos(x-3) + \operatorname{arcctg}\sqrt{x-2}.$$

Решение. Достаточно решить систему

$$\begin{cases} -1 \leqslant x - 3 \leqslant 1, \\ x \geqslant 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 4, \\ x \geqslant 2. \end{cases}$$

Ответ: $D(y) = [2; 4]$.

Упражнения

III.41. Найти область определения функции:

а) $y = \arcsin(x-1)$;

б) $y = \arcsin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

в) $y = \arcsin \frac{1}{2x}$;

г) $y = \arcsin\sqrt{x}$;

д) $y = \arcsin\sqrt{2-x}$;

е) $y = \arccos(x+2)$;

ж) $y = \arccos(x+\pi)$;

з) $y = \arccos \frac{\pi}{x+4}$;

и) $y = \arccos \frac{2}{3x}$;

к) $y = \arccos\sqrt{x}$;

л) $y = \arccos\sqrt{3 - x}$; *р)* $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{\pi}{x + 7}$;

м) $y = \operatorname{arctg}(4 - x)$; *с)* $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x + 2}$;

н) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{x + 5}$; *т)* $y = \arcsin(x - 1) + \operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

о) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x - 3}$; *у)* $y = \arcsin\dfrac{1}{x} + \operatorname{arcctg}\sqrt{x - 1}$;

п) $y = \operatorname{arcctg}(5 - x)$; *ф)* $y = \arccos\dfrac{1}{x + 2} + \operatorname{arctg}\sqrt{x + 1}$.

* * *

Пример III.42. Найти область значений функции

$$y = 4 - \arccos 3x.$$

Решение. Поскольку $0 \leqslant \arccos 3x \leqslant \pi$, то

$-\pi \leqslant -\arccos x \leqslant 0$ и $4 - \pi \leqslant 4 - \arccos x \leqslant 4$. Тогда

Ответ: $E(y) = [4 - \pi;\ 4]$[1].

Пример III.43. Найти область значений функции

$$y = \arcsin\sqrt{x - 1} + 2.$$

Решение. Поскольку $\sqrt{x - 1} \geqslant 0$, то

$$0 \leqslant \arcsin\sqrt{x - 1} \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Тогда $2 \leqslant \arcsin\sqrt{x - 1} + 2 \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2$.

Ответ: $E(y) = \left[2;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\right]$.

1 Строго говоря, надо показать, что данная функция принимает каждое значение из отрезка $[4 - \pi;\ 4]$. Схематично покажем, как это можно сделать. Легко установить, что при $x = -\dfrac{1}{3}$ и $x = \dfrac{1}{3}$ данная функция принимает значения соответственно 4 и $4 - \pi$. Дальше достаточна ссылка на непрерывность функции.

Упражнения

III.44. Найти область значений функций:

а) $y = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$;

б) $y = \arccos x + \pi$;

в) $y = \arcsin x + 1$;

г) $y = \arccos x + 2$;

д) $y = \arcsin x - 2$;

е) $y = \arccos x - 3$;

ж) $y = \arcsin \sqrt{x} + 4$;

з) $y = \arccos \sqrt{-x} + 2$;

и) $y = \sqrt{\arcsin x}$;

к) $y = \sqrt{-\arccos x}$;

л) $y = \frac{1}{\arcsin x}$;

м) $y = \frac{1}{\arccos x}$;

н) $y = \frac{1}{\sqrt{\arcsin x}}$;

о) $y = \frac{1}{\sqrt{\arccos x}}$;

п) $y = \operatorname{arctg} x + 2$;

р) $y = \operatorname{arcctg} x + 4$;

с) $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$;

т) $y = \frac{1}{\operatorname{arcctg} x}$;

у) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$;

ф) $y = \sqrt{-\operatorname{arcctg} x}$.

* * *

Пример III.45. Решить неравенство $\arcsin x > -\frac{\pi}{2}$.

Решение. Поскольку область значения арксинуса — это отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, причем $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, то решением данного неравенства будет промежуток $(-1; 1]$.

Пример III.46. Решить неравенство $\arccos x \geqslant \pi$.

Решение. Поскольку область значения арккосинуса — это отрезок $[0; \pi]$, то данное неравенство имеет единственное решение $x = -1$.

Упражнения

III.47. Решить неравенства:

а) $\arcsin x \leqslant -\frac{\pi}{2}$;

б) $\arcsin x > \frac{\pi}{2}$;

в) $\arcsin x \geqslant -\frac{\pi}{2}$;

г) $\arcsin x < \frac{\pi}{2}$;

д) $\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$;

е) $\arccos x < 0$;

ж) $\arccos x \leqslant 0$;

з) $\arccos x \geqslant 0$;

и) $\arccos x > 0$;

к) $\arccos x \leqslant \pi$;

л) $\arccos x < \pi$;

м) $\arccos x > \pi$.

* * *

Пример III.48. Решить уравнение

$$2 \arcsin x = -\pi - (x+1)^2.$$

Решение. Перепишем исходное уравнение в таком виде:

$$\arcsin x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(x+1)^2.$$

Поскольку $-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(x+1)^2 \leqslant -\frac{\pi}{2}$, вместе с тем, как $\arcsin x \geqslant -\frac{\pi}{2}$, то данное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда и правая, и левая части уравнения достигают значения $-\frac{\pi}{2}$. Это происходит только при $x = -1$.

Пример III.49. Найти область определения функции

$$y = \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}.$$

Решение. Очевидно, что $x \geqslant 0$. Тогда $\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \geqslant 0$. Покажем, что при $x \geqslant 0$ $\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \leqslant 1$. Действительно,

$$\frac{2\sqrt{x}}{1+x} - 1 = \frac{2\sqrt{x} - 1 - x}{1+x} = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{x+1} \leqslant 0.$$

Следовательно, $D(y) = [0;\ \infty)$.

Упражнения

III.50. Решить уравнения:

а) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} + \sqrt{x-1}$;

б) $\arccos x = \pi + (x+1)^4$;

в) $\arccos x = -(x-1)^2$;

г) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} + x^2$.

III.51. Найти область определения функции:

а) $y = \sqrt{\pi - \arccos x}$;

б) $y = \sqrt{\arccos x - \pi}$;

в) $y = \sqrt{\arccos x}$;

г) $y = \sqrt{-\arccos x}$;

д) $y = \sqrt{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}$;

е) $y = \sqrt{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}$;

ж) $y = \sqrt{\operatorname{arcctg} x}$;

з) $y = \sqrt{\pi - \operatorname{arcctg} x}$;

и) $y = \sqrt{-\operatorname{arcctg} x}$;

к) $y = \arcsin(\sqrt{x} + 1)$;

л) $y = \arccos(-1 - x^2)$;

м) $y = \arccos(x^2 - 2x + 2)$;

н) $y = \arccos \frac{x^2+1}{2x}$.

* * *

Пример III.52. Вычислить $\sin\left(\arcsin \frac{3}{5}\right)$.

Решение. Воспользуемся свойством взаимно обратных функций f и g, а именно, для любого $x \in D(g)$ $f(g(x)) = x$, т.е. $\sin(\arcsin x) = x$ при $|x| \leq 1$. Тогда $\sin\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$.

Упражнения

III.53. Вычислить:

а) $\cos\left(\arccos \frac{1}{3}\right)$;

б) $\sin\left(\arcsin \frac{3}{4}\right)$;

в) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 4)$;

г) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 5)$;

д) $\cos\left(\arccos \frac{\pi}{4}\right)$;

е) $\sin\left(\arcsin \frac{\pi}{6}\right)$;

ж) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2}\right)$;

з) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} \pi)$.

* * *

Пример III.54. Решить уравнение

$$\cos(\arccos(4x-9)) = x^2 - 5x + 5.$$

Решение. Важно понимать, что

$$\cos(\arccos(4x-9)) = 4x - 9$$

только при условии $|4x-9| \leqslant 1$. Не накладывая последнее ограничение, мы получим уравнение $4x - 9 = x^2 - 5x + 5$, которое является следствием данного. Поэтому такой переход грозит приобретением посторонних корней. Лучше поступить так: записать систему, равносильную данному уравнению:

$$\begin{cases} |4x-9| \leqslant 1, \\ 4x - 9 = x^2 - 5x + 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} |4x-9| \leqslant 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 7. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $x = 2$.

Упражнения

III.55. Решить уравнения:

а) $\sin(\arcsin x) = \frac{1}{2}$;

б) $\cos(\arccos(x-1)) = \frac{1}{4}$;

в) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2x) = 5$;

г) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(4-3x) = 2$;

д) $\sin(\arcsin x) = 3x + 2$;

е) $\cos(\arccos(x+1)) = 2x$;

ж) $\sin(\arcsin(x+2)) = x + 2$;

з) $\cos(\arccos(x-1)) = x - 1$;

и) $\sin(\arcsin 2x) = x + 1$;

к) $\cos(\arccos(4x-1)) = 3x^2$;

л) $\sin(\arcsin(x-1)) = x^2 - 4x + 5$;

м) $\cos\left(\arccos\left(x^2 - 5x + \frac{9}{2}\right)\right) = 2x - \frac{15}{2}$.

* * *

Пример III.56. Решить неравенство

$$\sin(\arcsin(x+5)) > x - 1.$$

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} |x+5| \leqslant 1, \\ x+5 > x-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \leqslant x+5 \leqslant 1, \\ 5 > -1. \end{cases}$$

Ответ: $-6 \leqslant x \leqslant -4$.

Упражнения

III.57. Решить неравенства:

а) $\sin(\arcsin x^2) \geqslant 1$;

б) $\cos(\arccos\sqrt{x}) \geqslant 1$;

в) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) \geqslant \frac{1}{x}$;

г) $\sin(\arcsin x) < x + 1$;

д) $\cos(\arccos(x+1)) < x + 2$;

е) $\sin(\arcsin(x+3)) \geqslant x + 3$;

ж) $\cos(\arccos(x+5)) \geqslant x + 5$;

з) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\sqrt{x}) \geqslant \sqrt{x}$.

* * *

Пример III.58. Вычислить $\arccos\left(\cos\frac{1}{3}\right)$.

Решение. Воспользуемся свойством взаимно обратных функций f и g: для любого x из $D(f)$ $g(f(x)) = x$, т.е.

$$\arccos(\cos x) = x \text{ при } x \in [0; \pi].$$

Отсюда сразу получаем

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример III.59. Вычислить arcsin (sin 6).

Решение. Казалось бы, ответ можно получить сразу — это 6. Однако более внимательный анализ показывает, что число 6 не принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а следовательно, и не может служить ответом. В подобных примерах выгодно поступить так: с помощью формул приведения «загнать» аргумент «внутренней функции» (в данном случае синуса) в необходимые границы $\left(\text{в данном случае } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

Итак, $\arcsin(\sin 6) = \arcsin(\sin(6 - 2\pi)) = 6 - 2\pi$. Заметим, что $6 - 2\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Упражнения

III.60. Вычислить:

а) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$;

б) $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{9}\right)$;

в) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{13}\right)$;

г) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{11}\right)$;

д) $\arccos(\cos 3{,}14)$;

е) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1)$;

ж) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$;

з) $\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{7}\right)$;

и) $\arccos\left(\cos\frac{11\pi}{9}\right)$;

к) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{10\pi}{13}\right)$;

л) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{15\pi}{11}\right)$;

м) $\arcsin(\sin 3)$;

н) $\arccos(\cos 6{,}28)$;

о) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)$;

п) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 15)$.

* * *

Пример III.61. Вычислить arccos (sin 10).

Решение. Имеем $\arccos(\sin 10) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - 10\right)\right)$.

Заметим, что число $\frac{\pi}{2} - 10$ не принадлежит отрезку $[0; \pi]$. Тогда следует поступить так:

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - 10\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(10 - \frac{\pi}{2} - 2\pi\right)\right) = 10 - \frac{5\pi}{2}.$$

Ответ: $10 - \frac{5\pi}{2}$.

Упражнения

III.62. Вычислить:

а) $\arcsin\left(\cos\frac{2}{17}\right)$;

б) $\arccos\left(\sin\frac{3}{14}\right)$;

в) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

г) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\sqrt{10}}{4}\right)$;

д) $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)$;

е) $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{11}\right)$;

ж) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{21}\right)$;

з) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{15\pi}{19}\right)$;

и) $\arcsin(\cos 8)$;

к) $\arccos(\sin 12)$;

л) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 17)$;

м) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 11)$.

* * *

Пример III.63. Вычислить $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.

Решение. Пусть $\arccos\frac{3}{5} = \alpha$, тогда $\alpha \in [0; \pi]$ и $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Задача свелась к тому, чтобы найти $\sin\alpha$. Запишем

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha, \quad |\sin\alpha| = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}.$$

Поскольку $\alpha \in [0; \pi]$, то $|\sin\alpha| = \sin\alpha$. Имеем:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$.

Пример III.64. Вычислить $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{9}\right)$.

Решение. Пусть $\arcsin\frac{1}{9}=\alpha$. Задача свелась к вычислению $\cos\frac{\alpha}{2}$. Поскольку $\frac{1}{9}\in[0;\ 1]$, то $\alpha\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Заметим, что $\sin\alpha=\frac{1}{9}$. Учитывая ограничение для α, запишем $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{81}}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$. Так как $\frac{\alpha}{2}\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ $\left(\text{даже } \left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]\right)$, то $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{(\sqrt{5}+2)^2}{2}}=\frac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{2}}.$$

Упражнения

III.65. Вычислить:

а) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$; *б)* $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$.

III.66. Доказать, что при $|x|\leqslant 1$

$$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}.$$

III.67. Доказать, что при $|x|\leqslant 1$

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}.$$

III.68. Вычислить:

а) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}-\arccos\frac{5}{13}\right)$;

б) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}+\arccos\frac{2}{3}\right)$;

в) $\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

г) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)+\arcsin\frac{20}{29}\right)$;

д) $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

е) $\cos\left(2\arccos\frac{4}{5}\right)$;

ж) $\sin\left(2\arccos\frac{12}{13}\right)$;

з) $\cos\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

и) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$;

к) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right)$.

* * *

Пример III.69. Вычислить $\sin(\operatorname{arcctg}(-3))$.

Решение. Имеем

$$\sin(\operatorname{arcctg}(-3)) = \sin(\pi - \operatorname{arcctg} 3) = \sin(\operatorname{arcctg} 3).$$

Пусть $\operatorname{arcctg} 3 = \alpha$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{ctg}\alpha = 3$. Запишем

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \text{ тогда } \sin^2\alpha = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10}.$$

Поскольку $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Пример III.70. Вычислить $\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Решение. Имеем

$$\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \cos\left(-2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = 2\cos^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) - 1.$$

Пусть $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \alpha$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$. Запишем

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \ \cos^2\alpha = \frac{9}{10}.$$

Тогда $\cos 2\alpha = 2 \cdot \frac{9}{10} - 1 = \frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{4}{5}$.

Упражнения

III.71. Вычислить:

а) $\sin(\operatorname{arctg} 2)$;

б) $\cos(\operatorname{arctg} 2)$;

в) $\sin(\operatorname{arcctg}(-2))$;

г) $\sin(\operatorname{arctg}(-3))$;

д) $\cos\left(-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{7}{8}\right)\right)$.

III.72. Доказать, что $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

III.73. Доказать, что $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

III.74. Вычислить:

а) $\cos\left(\operatorname{arcctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{12}{5}\right)\right)$;

б) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \operatorname{arcctg} 3\right)$;

в) $\sin\left(\operatorname{arcctg}\frac{8}{15} - \arcsin\frac{8}{17}\right)$;

г) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

д) $\sin(2\operatorname{arctg} 3)$;

е) $\cos(2\operatorname{arctg} 2)$;

ж) $\sin(2\operatorname{arctg} 0{,}3)$;

з) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

и) $\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$;

к) $\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}\right)$;

л) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\arccos\frac{3}{5}\right)$;

м) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\right)$;

н) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

о) $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

* * *

Пример III.75. Вычислить $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{40}{41}\right)\right)$.

Решение. Имеем

$$\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{40}{41}\right)\right)=\operatorname{ctg}\left(\pi-\arccos\frac{40}{41}\right)=$$
$$=-\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{40}{41}\right).$$

Пусть $\arccos\frac{40}{41}=\alpha$. Тогда $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ и $\cos\alpha=\frac{40}{41}$.

Запишем $|\sin\alpha|=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{40}{41}\right)^2}=\frac{9}{41}$,

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{40}{9}.$$

Ответ: $-\frac{40}{9}$.

Пример III.76. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right)$.

Решение. Пусть $\arcsin\frac{5}{13}=\alpha$. Тогда $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\alpha=\frac{5}{13}$. Задача свелась к тому, чтобы найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Поскольку $\frac{\alpha}{2}\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

Учитывая ограничения для α, запишем

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13}.$$

Имеем $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-(12/13)}{1+(12/13)}} = \frac{1}{5}.$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

Упражнения

III.77. Вычислить:

а) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; *в)* $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)$; *г)* $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$.

III.78. Доказать, что $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ при $|x| < 1$.

III.79. Доказать, что $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ при $|x| \leqslant 1$ и $x \neq 0$.

III.80. Вычислить:

а) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{3}{4}\right)$; *в)* $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$; *г)* $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$;

д) $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right)$;

е) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

ж) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)+\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

з) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

* * *

Пример III.81. Доказать, что

$$\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arcctg}\frac{2}{11}.$$

Решение. Поскольку $\frac{4}{5} > 0$ и $\frac{2}{\sqrt{5}} > 0$, то

$$0 < \arcsin\frac{4}{5} < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 0 < \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда $0 < \arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} < \pi$.

С другой стороны, $0 < \operatorname{arcctg}\frac{2}{11} < \pi$. Следовательно, левая и правая части доказываемого равенства принадлежат промежутку $(0; \pi)$, т.е. промежутку, на котором функция $y = \cos x$ убывает, а значит, принимает каждое свое значение только один раз.

Итак, для доказательства достаточно показать, что косинусы левой и правой частей доказываемого равенства равны.

Имеем $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$

$$= \cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\cos\left(\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right) -$$

$$- \sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\sin\left(\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{16}{25}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{5}} =$$

$$= \frac{6}{5\sqrt{5}} - \frac{4}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}.$$

С другой стороны, надо вычислить $\cos\left(\operatorname{arcctg}\frac{2}{11}\right)$. Пусть $\operatorname{arcctg}\frac{2}{11} = \alpha$. Тогда $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{11}$. Запишем

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \sin^2\alpha = \frac{121}{125}, \quad \cos^2\alpha = \frac{4}{125}.$$

Так как $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos\alpha = \sqrt{\frac{4}{125}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$.

Упражнения

III.82. Доказать, что:

а) $\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{5}{13}=\arcsin\frac{56}{65}$;

б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$;

в) $\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}+\operatorname{arcctg}\frac{1}{7}=\frac{3\pi}{4}$;

г) $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{12}{13}=\frac{\pi}{2}$;

д) $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$;

е) $\arcsin\frac{3}{5}-\arcsin\frac{4}{5}=-\arcsin\frac{7}{25}$;

ж) $\arccos\frac{15}{17}-\arcsin\frac{4}{5}=\arccos\frac{36}{85}-\frac{\pi}{2}$.

* * *

Пример III.83. Доказать, что при $|x|\leqslant 1$

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

Решение. Достаточно доказать, что

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x.$$

Имеем $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$. С другой стороны,

$$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi,\quad -\pi\leqslant-\arccos x\leqslant 0,$$

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\arccos x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, левая и правая части доказываемого равенства принадлежат промежутку возрастания функции $y=\sin x$. Поэтому достаточно показать, что синусы этих частей равны. Запишем $\sin(\arcsin x)=x$. Вместе с тем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)=\cos(\arccos x)=x.$$

Упражнения

III.84. Доказать, что $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

III.85. Вычислить:

а) $\arcsin\frac{1}{4} + \arccos\frac{1}{4}$; *б)* $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arcctg}\frac{2}{3}$.

III.86. Решить уравнения:

а) $\arcsin\sqrt{x} + \arccos\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$;

в) $\sin(\arcsin x + \arccos x) = 1$;

г) $\cos(\arccos\sqrt{x-1} + \arcsin\sqrt{x-1}) = 0$;

д) $x^2(\arcsin x + \arccos x) = \pi x$.

* * *

Пример III.87. Доказать, что

$$\arcsin x = \begin{cases} \arccos\sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\arccos\sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Пусть $\arcsin x = \alpha$. Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha = x$, $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$.

Так как $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\alpha = \arccos\sqrt{1-x^2}$.

Если $-1 \leqslant x \leqslant 0$, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant 0$, $\sin\alpha = x$,

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}.$$

Имеем $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant 0$, $0 \leqslant -\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\cos(-\alpha) = \sqrt{1-x^2}$. Тогда $-\alpha = \arccos\sqrt{1-x^2}$, $\alpha = -\arccos\sqrt{1-x^2}$.

Пример III.88. Доказать, что

$$\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ если } 0 < x \leqslant 1, \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ если } -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

Решение. Пусть $\arccos x = \alpha$. Если $0 < x \leqslant 1$, то $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha = x$. Имеем $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1-x^2}{x^2}$. Учитывая ограничения для x и α, запишем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Отсюда

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Если $-1 \leqslant x < 0$, то $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$ и $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1-x^2}{x^2}$. Имеем $-\pi \leqslant -\alpha < -\frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\operatorname{tg}^2 (\pi - \alpha) = \frac{1-x^2}{x^2}, \quad \operatorname{tg} (\pi - \alpha) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\pi - \alpha = -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad \alpha = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Упражнения

III.89. Доказать, что:

а) $$\arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-x^2}, \text{ если } 0 \leqslant x < 1, \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 0; \end{cases}$$

б) $$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -\arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ если } x \leqslant 0; \end{cases}$$

в) $\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x} - \pi, & \text{если } x < 0; \end{cases}$

г) $\arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, & \text{если } -1 \leqslant x < 0; \end{cases}$

д) $\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ \pi - \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x \leqslant 0; \end{cases}$

е) $\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

* * *

Пример III.90. Решить уравнение $\arcsin\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Поскольку функция арксинус является монотонной, то она свое значение $\dfrac{\pi}{3}$ принимает лишь в одной точке, а именно $\sin\dfrac{\pi}{3}$. Следовательно, данное уравнение равносильно такому: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда

Ответ: $x = \sqrt{3} + 1$.

Пример III.91. Решить уравнение

$$23 \operatorname{arctg}(1 - 6x) = -10\pi.$$

Решение. Запишем $\operatorname{arctg}(1 - 6x) = -\dfrac{10\pi}{23}$. Поскольку функция арктангенс является монотонной, то каждое свое

значение она принимает только один раз. Поэтому данное уравнение равносильно такому: $1 - 6x = \operatorname{tg}\left(-\frac{10\pi}{23}\right)$. Отсюда

Ответ: $x = \frac{1}{6}\operatorname{tg}\frac{10\pi}{23} + \frac{1}{6}$.

Упражнения

III.92. Решить уравнения:

а) $\arcsin x = -\frac{\pi}{6}$;

б) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$;

в) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$;

г) $\operatorname{arcctg} x = \frac{3\pi}{4}$;

д) $\arccos x = \frac{1}{2}$;

е) $\operatorname{arctg} x = 1$;

ж) $\operatorname{arcctg} x = -1$;

з) $\arcsin x = \frac{5\pi}{6}$;

и) $\arccos x = -\frac{\pi}{6}$;

к) $\operatorname{arctg} x = \frac{3\pi}{4}$;

л) $\operatorname{arcctg} x = -\frac{\pi}{4}$;

м) $\arccos(2x - 3) = \frac{\pi}{2}$;

н) $\operatorname{arctg}(4x + 9) = -\frac{\pi}{6}$;

о) $\operatorname{arcctg}(5 - 8x) = \frac{2\pi}{3}$;

п) $3\arcsin 2x = -\frac{\pi}{5}$;

р) $7\arccos(3x + 4) = 2\pi$;

с) $-2\operatorname{arcctg}(4 - 5x) = -\frac{\pi}{13}$;

т) $7\arcsin(x + 4) + 2 = 0$;

у) $3\arccos(7 - 3x) - 4 = 0$;

ф) $4\arcsin(12 - x) + 11 = 0$;

х) $6\arccos(10 - 11x) - 25 = 0$.

* * *

Пример III.93. Решить уравнение

$$\arcsin(2x - 15) = \arcsin(x^2 - 6x - 8).$$

Решение. Учитывая, что функция арксинус является монотонной, то данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x - 15 = x^2 - 6x - 8, \\ |2x - 15| \leq 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 8x + 7 = 0, \\ |2x - 15| \leq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 7, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ |2x - 15| \leq 1. \end{cases}$$

Ответ: $x = 7$.

Упражнения

III.94. Решить уравнения:

а) $\arcsin(3x - 2) = \arcsin(-x + 2)$;

б) $\arccos(3x + 2) = \arccos(5x + 3)$;

в) $\operatorname{arctg}(6x - 1) = \operatorname{arctg}(12 - 5x)$;

г) $\operatorname{arcctg}(3 - 4x) = \operatorname{arcctg}(11 + 8x)$;

д) $\arcsin(x^2 - 4) = \arcsin(2x + 4)$;

е) $\arccos(3x - 16) = \arccos(x^2 - 26)$;

ж) $\operatorname{arctg}(4x - 2) = \operatorname{arctg}(x^2 + x)$;

з) $\operatorname{arcctg}(x^2 + 2x) = \operatorname{arcctg}(8x - 5)$.

* * *

Пример III.95. Решить уравнение

$$(\arccos x)^2 - 6\arccos x + 8 = 0.$$

Решение. Пусть $\arccos x = t$, $t \in [0; \pi]$. Тогда получаем уравнение $t^2 - 6t + 8 = 0$. Отсюда $t = 2$ или $t = 4$. Учитывая ограничения для t, запишем $\arccos x = 2$, $x = \cos 2$.

Ответ: $x = \cos 2$.

Упражнения

III.96. Решить уравнения:

а) $2(\arcsin x)^2 - 5\arcsin x + 2 = 0$;

б) $3(\arccos x)^2 - 10\arccos x + 3 = 0$;

в) $6(\operatorname{arctg} x)^2 - 5\operatorname{arctg} x + 1 = 0$;

г) $2(\operatorname{arcctg} x)^2 - 3\operatorname{arcctg} x - 2 = 0$.

* * *

Пример III.97. Решить уравнение

$$(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{5\pi^2}{36}.$$

Решение. Здесь тождество $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ позволяет нам перейти к системе

$$\begin{cases} (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \dfrac{5\pi^2}{36}, \\ \arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

После очевидной замены $\arcsin x = t$, $\arccos x = z$ получаем

$$\begin{cases} t^2 + z^2 = \dfrac{5\pi^2}{36}, \\ t + z = \dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \leqslant z \leqslant \pi. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \arcsin x = \dfrac{\pi}{6}, \\ \arccos x = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \arcsin x = \dfrac{\pi}{3}, \\ \arccos x = \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$ или $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Упражнения

III.98. Решить уравнения:

а) $(\arcsin x)^2 - (\arccos x)^2 = \frac{\pi^2}{12}$;

б) $(\operatorname{arctg} x)^2 + (\operatorname{arcctg} x)^2 = \frac{\pi^2}{8}$;

в) $\arcsin x \arccos x = -\frac{3\pi^2}{16}$;

г) $\operatorname{arctg} x \operatorname{arcctg} x = -\frac{5\pi^2}{18}$.

* * *

Пример III.99. Решить уравнение

$$\arcsin x = \arccos (1 - 2x).$$

Решение. Заметим, что если $x < 0$, то левая часть данного уравнения принимает отрицательное значение, при этом

$$\arccos (1 - 2x) \geqslant 0$$

для любых x из области определения. В то же время при $1 - 2x < 0$ $\arccos (1 - 2x) > \frac{\pi}{2}$ и равенство между левой и правой частью также невозможно. Таким образом, исходному уравнению равносильна система

$$\begin{cases} \sin (\arcsin x) = \sin (\arccos (1 - 2x)), \\ x \geqslant 0, \\ 1 - 2x \geqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = \sqrt{1 - (1 - 2x)^2}, \\ x \geqslant 0, \\ x \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x = 0$.

Упражнения

III.100. Решить уравнения:

а) $\arcsin 3x = \arccos 4x$;

б) $\arcsin 6x = \arccos 8x$;

в) $\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x}$;

г) $\arcsin (x^2 - 2x) = \arccos \sqrt{1 - x^2}$;

д) $\arcsin x = \operatorname{arcctg} x$;

е) $\arccos x = \operatorname{arctg} x$.

* * *

Пример III.101. Решить уравнение

$$2 \arccos \sqrt{1 - \frac{x^2}{5}} = \arcsin \frac{2x}{5}.$$

Решение. Перейдем к уравнению-следствию

$$\sin \left(2 \arccos \sqrt{1 - \frac{x^2}{5}}\right) = \sin \left(\arcsin \frac{2x}{5}\right).$$

Получим

$$2 \sin \left(\arccos \sqrt{1 - \frac{x^2}{5}}\right) \cos \left(\arccos \sqrt{1 - \frac{x^2}{5}}\right) = \frac{2x}{5}.$$

Отсюда $\sqrt{1 - \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{5}}\right)^2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{5}} = \frac{x}{5}$.

Решая последнее уравнение, несложно получить $x = 0$ или $x = \pm 2$. Остается проверкой убедиться, что лишь $x = 0$ удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ: $x = 0$.

Упражнения

III.102. Решить уравнения:

а) $2 \arcsin x = \arcsin 2x$; *б)* $2 \arcsin 3x = \arcsin 2x$;

в) $2 \arccos \sqrt{1 - x^2} = \arcsin 2x$;

г) $3 \arccos x = \arccos (2x - 1)$;

д) $2 \arccos \sqrt{1 - 16x^2} = \arccos \sqrt{1 - 12x^2}$.

* * *

Пример III.103. Решить уравнение

$$\arccos (x\sqrt{3}) + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Заметим, что при $x \leqslant 0$ левая часть уравнения больше правой. Поэтому достаточно ограничиться случаем, когда $x > 0$. Имеем $\arccos (x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - \arccos x$. Это уравнение еще равносильно исходному. Теперь запишем следствие

$$\cos (\arccos (x\sqrt{3})) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right),$$

$$x\sqrt{3} = \sin (\arccos x).$$

Легко показать, что при $0 \leqslant x \leqslant 1$ $\sin (\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$. Тогда получаем, что уравнение $x\sqrt{3} = \sqrt{1 - x^2}$ является следствием первоначального. Оно, в свою очередь, равносильно системе

$$\begin{cases} 3x^2 = 1 - x^2, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда $x = \frac{1}{2}$. Полученный корень, естественно, подлежит проверке. Она дает такой

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

Пример III.104. Решить уравнение

$$\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}.$$

Решение. Это уравнение выгодно переписать так:

$$\arcsin 2x = \frac{\pi}{3} - \arcsin x. \qquad (*)$$

Его следствием будет уравнение

$$\sin(\arcsin 2x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin x\right).$$

Отсюда $2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2}x$, $5x = \sqrt{3 - 3x^2}$.

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 25x^2 = 3 - 3x^2, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим $x = \sqrt{\frac{3}{28}}$. Понятно, что «лобовая» проверка такого корня — работа не из легких. Покажем, как можно обойти технические трудности.

Поскольку $x_0 = \sqrt{\frac{3}{28}} < \frac{1}{2}$, то при $x = x_0$ обе части уравнения (*) принимают значения из промежутка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, причем в ходе решения было установлено, что

$$\sin(\arcsin 2x_0) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin x_0\right).$$

Следовательно, учитывая то, что функция $y = \sin x$ возрастает на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, получаем $\arcsin 2x_0 = \frac{\pi}{3} - \arcsin x_0$. А это и означает, что $x = \sqrt{\frac{3}{28}}$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = \sqrt{\frac{3}{28}}$.

Пример III.105. Решить уравнение

$$\arcsin(1 + 2\cos x) + \arccos(1 + 3\operatorname{tg} x) = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Имеем

$$\arcsin(1 + 2\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(1 + 3\operatorname{tg} x).$$

Переходим к следствию

$$\sin(\arcsin(1 + 2\cos x)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(1 + 3\operatorname{tg} x)\right).$$

Отсюда $1 + 2\cos x = 1 + 3\operatorname{tg} x$. Далее $2\cos^2 x = 3\sin x$,

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\sin x$, получим $\sin x = \frac{1}{2}$, т.е. $x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in Z$.

Для проверки полученное множество корней удобно разбить на два подмножества

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ n \text{ и } k \text{ — целые.} \end{array}\right.$$

Нетрудно обнаружить, что первая серия вообще не входит в область определения исходного уравнения. Вторая же этому уравнению удовлетворяет.

Ответ: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Упражнения

III.106. Решить уравнения:

а) $\arcsin x + \arcsin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$;

б) $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{2\pi}{3}$;

в) $\arcsin 2x - \arcsin x = \frac{\pi}{3}$;

г) $\arcsin x + \arcsin \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2}$;

д) $\arccos 4x + \arccos 2x = \frac{\pi}{3}$;

е) $\operatorname{arctg}(x - 1) + \operatorname{arctg}(2 - x) = \frac{\pi}{4}$;

ж) $\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = -\frac{3\pi}{4}$;

з) $\arcsin\left(\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg} x\right) + \arccos\left(\frac{6}{\pi} + \operatorname{tg} x\right) = \frac{\pi}{2}$.

* * *

Пример III.107. Решить неравенство

$$\arccos(2x - 1) > \frac{\pi}{3}.$$

Решение. Перепишем данное неравенство в таком виде:

$$\arccos(2x - 1) > \arccos\frac{1}{2}.$$

Поскольку функция арккосинус является убывающей, то данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x - 1 < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1 \geqslant -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \frac{3}{4}, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left[0; \frac{3}{4}\right)$.

Упражнения

III.108. Решить неравенства:

а) $\arcsin 2x > \frac{\pi}{6}$;

б) $\arccos(4x - 1) > \frac{3\pi}{4}$;

в) $\operatorname{arctg}(5x + 3) > -\frac{\pi}{3}$;

г) $\operatorname{arcctg}(3x - 7) > \frac{2\pi}{3}$.

* * *

Пример III.109. Решить неравенство

$$\arcsin(5 - 3x) < -\frac{\pi}{3}.$$

Решение. Перепишем данное неравенство в таком виде:

$$\arcsin(5 - 3x) < \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Поскольку функция арксинус является возрастающей, то это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 5 - 3x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ 5 - 3x \geqslant -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x > \dfrac{\sqrt{3}}{6} + \dfrac{5}{3}, \\ x \leqslant 2. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{6} + \dfrac{5}{3} < x \leqslant 2.$

Упражнения

III.110. Решить неравенства:

а) $\arcsin(2 - 3x) < \dfrac{\pi}{4}$; *в)* $\operatorname{arctg}(x + 11) < \dfrac{\pi}{6}$;

б) $\arccos(4 - 7x) < \dfrac{5\pi}{6}$; *г)* $\operatorname{arcctg}(x - 2) < \dfrac{5\pi}{6}$.

* * *

Пример III.111. Решить неравенство

$$\arccos(2x - 1) < \arccos\frac{1}{x}.$$

Решение.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x - 1 > \dfrac{1}{x}, \\ \dfrac{1}{x} \geqslant -1, \\ 2x - 1 \leqslant 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x} > 0, \\ \dfrac{x + 1}{x} \geqslant 0, \\ x \leqslant 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{1}{2} < x < 0 \text{ или } x > 1, \\ x \leqslant -1 \text{ или } x > 0, \\ x \leqslant 1. \end{cases}$$

Ответ: нет решений.

Упражнения

III.112. Решить неравенства:

а) $\arcsin(3x - 2) > \arcsin(5x - 3)$;

б) $\arcsin(x^2 - x) > \arcsin(3x - 4)$;

в) $\arccos(1 - 2x) < \arccos\dfrac{1}{x - 1}$;

г) $\operatorname{arctg}(5x^2 - 3x) > \operatorname{arctg}(5x - 3)$;

д) $\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x} \leqslant \operatorname{arcctg} x$.

* * *