

Б.Г. Зив

ГЕОМЕТРИЯ ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ



10

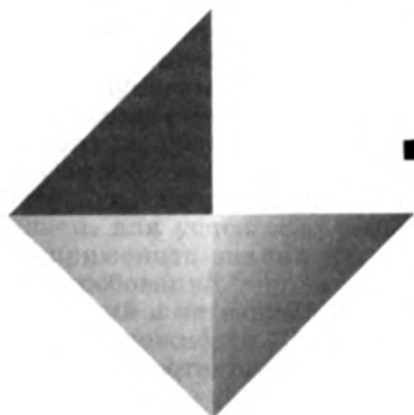


ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Б. Г. Зив

ГЕОМЕТРИЯ

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ



10
КЛАСС

10-е издание

Москва
"Просвещение"
2009

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
3-59

Зив Б. Г.

3-59 Геометрия. Дидактические материалы. 10 класс /
Б. Г. Зив. — 10-е изд. — М. : Просвещение, 2009. —
159 с. : ил. — ISBN 978-5-09-021737-8.

Данное пособие содержит самостоятельные и контрольные работы по геометрии, а также математические диктанты. Дидактические материалы адресованы учителям, работающим по учебнику «Геометрия, 10—11» авторов Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Л. С. Киселевой, Э. Г. Позняка, но могут быть использованы при работе и по другим учебникам.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-021737-8

© Издательство «Просвещение», 1994
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2007
Все права защищены

В пособии приведены 23 самостоятельные работы, 2 самостоятельные работы на повторение планиметрии, 6 контрольных работ и 4 математических диктанта. Дополнительные работы могут быть использованы на факультативных занятиях.

Самостоятельные работы обозначены буквой С с соответствующим номером, самостоятельные работы на повторение планиметрии — буквами СП, дополнительные самостоятельные работы — ДС, контрольные работы — К и математические диктанты — буквами МД. Основная цель этих самостоятельных работ — помочь учителю организовать деятельность учащихся по решению задач с учетом их индивидуальных особенностей и уровня подготовки. Кроме того, самостоятельные работы могут использоваться для текущего контроля умений и навыков школьников.

Самостоятельные работы даны в восьми вариантах. В первом и втором вариантах каждой работы предлагаются задачи, для успешного решения которых учащиеся должны применить знания на уровне минимальных программных требований.

Третий и четвертый варианты состоят из задач среднего уровня сложности. Задачи этих вариантов по сложности примерно соответствуют большинству основных задач учебника.

Пятый и шестой варианты предназначены для более подготовленных учащихся. При решении задач этих вариантов необходимо применять знания в усложненных ситуациях, иметь достаточно высокий уровень развития вычислительных навыков и навыков проведения тождественных преобразований. По сложности эти задачи примерно соответствуют наиболее трудным из основных и дополнительных задач учебника.

Седьмой и восьмой варианты состоят из задач, при решении которых требуется творческое применение знаний. Здесь приходится анализировать достаточно сложные геометрические ситуации, самостоятельно открывать новые факты, устанавливать отношения между ними. Задачи из седьмого и восьмого вариантов могут быть предложены отдельным учащимся после выполнения ими основной работы наравне со всеми учащимися класса в оставшееся время или использованы в качестве необязательного задания для домашней работы, а также на факультативных занятиях либо занятиях математического кружка.

Учителю не следует обязательно выполнять с учащимися все задания каждой из работ. Надеемся, что представленные в пособии работы позволят ему на любом уровне отобрать необходимые задания в зависимости от цели урока, наличия учебного времени, уровня подготовки учащихся.

Самостоятельные работы на повторение планиметрии даны в восьми вариантах, сгруппированных попарно.

Дополнительные самостоятельные работы составлены в шести вариантах в зависимости от уровня сложности.

Контрольные работы приведены в четырех вариантах. Они предлагаются для проведения итоговой проверки знаний по каждой теме курса 10 класса. По сложности все варианты работ примерно одинаковы. В каждом варианте имеется задание, отмеченное звездочкой. Эти задания потребуют творческого применения знаний, анализа нестандартных геометрических конфигураций. Оценка выставляется только за основную часть работы, а учащиеся, решившие дополнительную задачу, могут по усмотрению учителя получить вторую оценку за работу. Контрольная работа К—6 предлагается для повторения планиметрии.

Математические диктанты предназначены для систематизации теоретических знаний учащихся. Диктант составлен из небольших задач по прямому применению теории. При проведении диктанта ученик должен в течение нескольких минут ответить на вопрос или решить задачу, предложенную учителем. Необходимое для ответа время регулирует учитель в зависимости от сложности вопроса и подготовленности класса. На такую работу можно отвести примерно 35 минут, после чего учитель вместе с классом проверяет ответы, обращает внимание класса на допущенные ошибки.

Учитель сам решает, какие задачи дать в виде текста, а какие — с использованием чертежа. Он же по своему усмотрению может предлагать не все вопросы диктанта, а только их часть. В конце пособия даны ответы ко всем самостоятельным и контрольным работам. К наиболее сложным задачам приведены указания или решения.

При составлении самостоятельных и контрольных работ на повторение планиметрии принимал участие учитель из Санкт-Петербурга Александр Хаимович Шахмейстер.

Замечания и предложения просим направлять в издательство «Просвещение» по адресу: 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Автор

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1

С-1

1. Точки A , B и C не лежат на одной прямой $M \in AB$, $K \in AC$, $X \in MK$. Докажите, что точка X лежит в плоскости ABC .
2. Плоскости α и β пересекаются по прямой m . Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β . Пересекаются ли прямые a и m ? Почему?

С-2

1. На рисунке 1 плоскости α и β пересекаются по прямой EF . Прямая AB лежит в плоскости α . В плоскости β через точку C проведите прямую так, чтобы она:
 - 1) пересекала прямую AB ;
 - 2) была скрещивающейся с прямой AB ;
 - 3) была параллельна прямой AB .

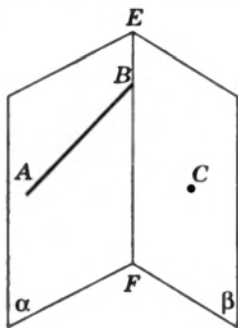


Рис. 1

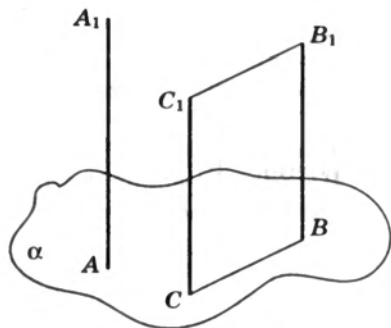


Рис. 2

2. На рисунке 2 $AA_1 \parallel CC_1$, $AA_1 \parallel BB_1$, $BB_1 = CC_1$. Докажите, что $B_1C_1 = BC$.

С-3

1. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F принадлежат сторонам AB и CD , причем $BE : EA = CF : FD$. Через эти точки проведена плоскость α . Докажите, что $BC \parallel \alpha$.
2. Прямая a параллельна плоскости α . Через прямую a проведена плоскость β , пересекающая плоскость α по прямой b . В плоскости α существует прямая c , которая параллельна a . Докажите, что $b \parallel c$.

С-4

1. Дано $\angle EMC = \angle MCA$ и $\angle PEB = \angle EBC$ (рис. 3). Докажите, что плоскости MEP и ABC параллельны.

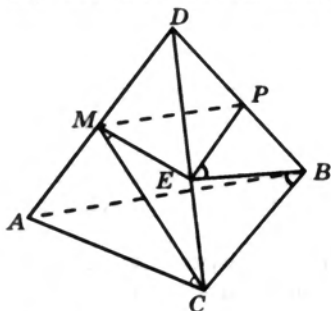


Рис. 3

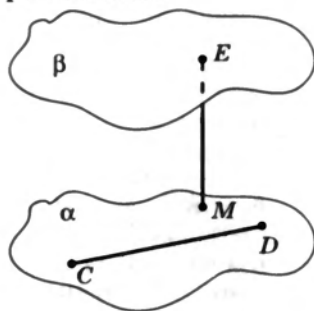


Рис. 4

2. Отрезок CD лежит в плоскости α . Концы отрезка EM лежат в параллельных плоскостях α и β (рис. 4). Постройте линии пересечения плоскостей ECD , EMC и EMD с плоскостью β .

С-5

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, BE лежит в плоскости $A_1 BD$. Докажите, что BE параллельна плоскости $B_1 D_1 C$.
2. В тетраэдре $DABC$ $\angle DBC = \angle DBA = \angle ABC = 90^\circ$, $BD = BA = BC = 2$ см. Найдите площадь грани ADC .

С-6

1. Постройте сечение тетраэдра $DABC$ плоскостью, проходящей через точки P , M и K , где $P \in AD$, $M \in BD$ и $K \in BC$, причем $AP = PD$ и $DM = MB$.
2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основание $ABCD$ — квадрат со стороной, равной 8 см, остальные грани — прямоугольники. Боковое ребро равно 3 см, E — середина $A_1 B_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через AC и точку E , и найдите периметр сечения.

С-7

1. ABC — правильный треугольник, O — его центр, OM — перпендикуляр к плоскости ABC , $OM = 1$. Сторона треугольника равна 3. Найдите расстояния от точки M до вершин треугольника.
2. $ABCD$ — параллелограмм, BE и FD — перпендикуляры к плоскости ABC . Докажите, что плоскости ABE и DFC параллельны.

С-8

1. $ABCD$ — квадрат, $EA \perp BC$, $K \in EB$. Докажите, что $BC \perp AK$.
 2. Через сторону AC треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена плоскость α ; $BB_1 \perp \alpha$, $CB_1 \perp AC$, $AB = 25$, $AC = 24$. Найдите площадь треугольника ABC .
-

С-9

Из точки M к плоскости α проведены две наклонные, длины которых 18 и $2\sqrt{109}$ см. Их проекции на эту плоскость относятся как 3 : 4. Найдите расстояние от точки M до плоскости α .

С-10

1. В треугольнике ABC $AB = BC = 25$, $AC = 48$, BD — перпендикуляр к плоскости ABC , $BD = \sqrt{15}$. Найдите расстояние от точки D до прямой AC .
 2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $ABCD$ — квадрат со стороной, равной 2 см. Все боковые грани — прямоугольники, $B_1 D = 5$ см. Найдите углы между $B_1 D$ и плоскостью ABC и между $B_1 D$ и плоскостью $DD_1 C_1$.
-

С-11

1. Чему равен угол между ребром двугранного угла и любой прямой, лежащей в плоскости его линейного угла?
 2. Треугольник ABC — прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), $\angle A = 30^\circ$, $AC = a$, $DC \perp ABC$, $DC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Чему равен угол между плоскостями ADB и ACB ?
-

С-12

1. Треугольник AMB и прямоугольник $ABCD$ расположены так, что их плоскости взаимно перпендикулярны. Докажите, что угол MAD — прямой.
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E , F и K — середины ребер $A_1 B_1$, $A_1 D_1$ и AD соответственно, $AB = 4$, $AA_1 = 6$, $C = \sqrt{56}$.
 - 1) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки E , F и K , и докажите, что плоскости сечения и основания взаимно перпендикулярны.
 - 2) Найдите AD .

С–13

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ каждая из сторон основания равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, а боковое ребро — $2\sqrt{3}$, M — центр грани CC_1B_1B . Найдите угол между прямой AM и плоскостью основания.
 2. В правильной четырехугольной призме каждая из сторон основания равна 4 см. Через диагональ основания под углом 45° к плоскости основания проведена плоскость, пересекающая боковое ребро. Найдите площадь сечения.
-

С–14

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 4$, $BC = 3$. Через сторону AC и вершину B_1 проведена плоскость, $\angle B_1AC = 60^\circ$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

С–15

1. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием служит прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90^\circ$). Плоскость грани AA_1C_1C перпендикулярна плоскости основания. Докажите, что CC_1B_1B — прямоугольник.
 2. В наклонной треугольной призме площади двух граней равны 70 и 150 см², угол между ними — 60° . Боковое ребро равно 10 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
-

С–16

1. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 4 см, а длина диагонали основания равна $6\sqrt{2}$ см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
 2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a , а высота равна $2a$. Найдите углы наклона боковых ребер и боковых граней к плоскости основания.
-

С–17

1. Основанием пирамиды $MABC$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $BC = a$, $\angle A = 30^\circ$. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 60° . Найдите высоту пирамиды.
2. В пирамиде $MABC$ боковое ребро MA перпендикулярно плоскости основания ABC , а грань MBC составляет с ним угол 60° , $AB = AC = 10$, $BC = 16$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

С-18

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a , а боковые грани наклонены к нему под углом 60° . Найдите площадь сечения, проведенного через среднюю линию основания параллельно боковой грани.
 2. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 6 и 8 см, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
-

С-19

1. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $ABCD$ — прямоугольник, E и F — середины ребер $B_1 C_1$ и $C_1 D_1$ соответственно. Запишите векторы с началом и концом в вершинах параллелепипеда, которые:
 - 1) сонаправлены с вектором $\overrightarrow{EF}$;
 - 2) противоположно направлены вектору $\overrightarrow{AB_1}$;
 - 3) имеют длину, равную длине вектора $\overrightarrow{A_1 C_1}$.
 2. Прямая a не лежит в плоскости α . Через прямую a проходит плоскость β , пересекающая плоскость α по прямой b . Точки A и B принадлежат прямой a , а точки C и D — прямой b . При каком условии векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ будут коллинеарными?
-

С-20

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Укажите вектор, равный сумме векторов $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1 C_1} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD}$.
 2. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C_1 A_1}$ и $\overrightarrow{A_1 A} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$ противоположны.
-

С-21

1. $DABC$ — тетраэдр. Изобразите вектор $\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.
2. Точка K не лежит в плоскости треугольника ABC , E и P — середины отрезков AB и BC соответственно. Выразите разность векторов $\overrightarrow{KE} - \overrightarrow{KP}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$.

С-22

1. Дан тетраэдр $DABC$, K — середина ребра AC , M — середина отрезка KD , $\vec{DA} = \vec{a}$, $\vec{DB} = \vec{b}$, $\vec{DC} = \vec{c}$. Разложите вектор $\vec{BM}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.
 2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ M — точка пересечения медиан треугольника $A_1 B_1 C_1$. Разложите вектор $\vec{DM}$ по векторам $\vec{DA}$, $\vec{DC}$ и $\vec{DD_1}$.
-

С-23

В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ $AB = 2$ см, $AA_1 = 1$ см.

- 1) Найдите площадь полной поверхности призмы.
- 2) Найдите площадь сечения призмы плоскостью ACB_1 .
- 3) Найдите угол, который составляет прямая AB_1 с плоскостью ABC .
- 4) Найдите угол между плоскостями $AB_1 C$ и ABC .
- 5) Найдите длину вектора $\vec{AA_1} - \vec{AC} + 2\vec{B_1 B} - \vec{C_1 C}$.
- 6) Докажите, что прямая $A_1 C_1$ параллельна плоскости ACB_1 .

С-1

1. Прямые a и b пересекаются в точке O , $A \in a$, $B \in b$, $Y \in AB$. Докажите, что прямые a и b и точка Y лежат в одной плоскости.
2. Даны пересекающиеся плоскости α и β . Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β в точке A . Прямая b лежит в плоскости β и пересекает плоскость α в точке B . Докажите, что AB — линия пересечения плоскостей α и β .

С-2

1. На рисунке 5 плоскости α и β пересекаются по прямой EF . Прямая AB лежит в плоскости α и параллельна EF . В плоскости β через точку C проведите прямую так, чтобы она:
 - 1) пересекала прямую AB ;
 - 2) была скрещивающейся с прямой AB ;
 - 3) была параллельна прямой AB .

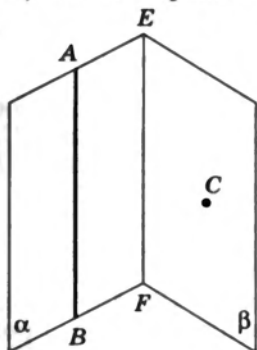


Рис. 5

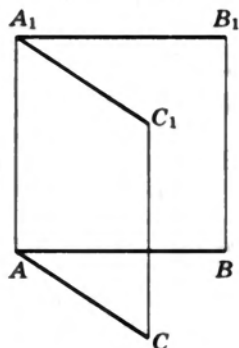


Рис. 6

2. На рисунке 6 $A_1C_1 = AC$, $A_1C_1 \parallel AC$, $A_1B_1 = AB$, $A_1B_1 \parallel AB$. Докажите, что $CC_1 \parallel BB_1$.

С-3

1. Точки E и F принадлежат сторонам AB и BC треугольника ABC , причем $BE : EA = 2 : 3$. Через эти точки проведена плоскость, параллельная AC . Найдите отношение $BF : FC$.
2. В плоскости α выбраны точки A и B . С концами в этих точках проведены в одном направлении от плоскости α равные и параллельные между собой отрезки AA_1 и BB_1 . Докажите, что $A_1B_1 \parallel \alpha$.

С-4

1. Дано $\frac{DE}{DA} = \frac{DK}{DC} = \frac{DM}{DB}$ (рис. 7). Докажите, что плоскости EKM и ABC параллельны.

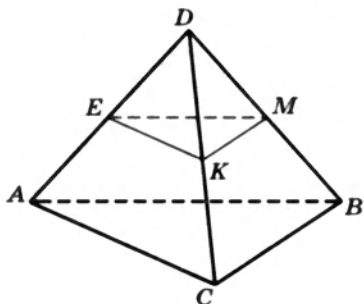


Рис. 7

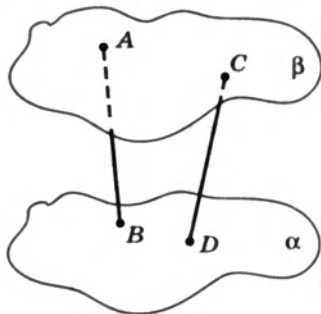


Рис. 8

2. Концы отрезков AB и CD лежат на параллельных плоскостях α и β (рис. 8). Постройте линии пересечения плоскости ABC с плоскостью α и плоскости BDC с плоскостью β .

С-5

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, AK лежит в плоскости AD_1C . Докажите, что AK параллельна плоскости A_1C_1B .
2. В тетраэдре $DABC$ $\angle DBC = \angle DBA = \angle ABC = 60^\circ$, $BD = BA = BC = 4$ см. Найдите площадь грани ADC .

С-6

1. В тетраэдре $DABC$ $DA = DC = 13$, $AC = 10$, E — середина BC . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку E параллельно плоскости ADC , и найдите площадь сечения.
2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $P \in A_1 D_1$ и $K \in B_1 C_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки P и K и параллельной AA_1 .

С-7

1. $ABCD$ — квадрат со стороной, равной $\sqrt{2}$, O — точка пересечения его диагоналей, OE — перпендикуляр к плоскости ABC , $OE = \sqrt{3}$. Найдите расстояние от точки E до вершин квадрата.
2. Дан треугольник ABC , AD и BE — перпендикуляры к плоскости ABC . Каково взаимное расположение линии пересечения плоскостей DAC и EBC и прямых AD и BE ?

С-8

1. Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $E \in BC$, $EM \perp ABC$. Докажите, что $AC \perp MB$.
2. $ABCD$ — параллелограмм, $AD = 4$, $CD = 6$, MC — перпендикуляр к плоскости ABC , $MD \perp AD$. Найдите площадь параллелограмма.

С-9

Из точки M к плоскости α проведены две наклонные, каждая из которых образует со своей проекцией на плоскость α угол 30° . Угол между наклонными равен 90° . Найдите расстояние между основаниями наклонных, если расстояние от точки M до плоскости α равно $\sqrt{2}$ см.

С-10

1. Треугольник ABC — прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), $\angle A = 30^\circ$, $AC = a$, $MC \perp ABC$, $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Найдите расстояние от точки M до прямой AB .
2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $ABCD$ — прямоугольник. Все боковые грани тоже прямоугольники, $AD = 12$, $CD = 5$, $A_1 C = 15$. Найдите углы между $A_1 C$ и плоскостью ABC и между $A_1 C$ и плоскостью $BB_1 C_1$.

С-11

1. Плоскость α пересекают грани двугранного угла по прямым AB и AC . Две пересекающиеся прямые, лежащие в плоскости α , перпендикулярны ребру этого угла. Докажите, что $\angle BAC$ — линейный угол этого двугранного угла.
2. $ABCD$ — ромб, $\angle A = 60^\circ$, $AB = m$, $BE \perp ABC$, $BE = \frac{m\sqrt{3}}{2}$. Найдите угол между плоскостями AED и ABC .

С-12

1. Прямоугольник $ABCD$ и параллелограмм $BEMC$ расположены так, что их плоскости взаимно перпендикулярны. Докажите, что $\angle MCD$ — прямой.
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка E — середина $C_1 D_1$, $AD = 5$, $AB = 4$, $B_1 D = \sqrt{77}$.
 - 1) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через AD и точку E , и докажите, что плоскость сечения перпендикулярна плоскости боковой грани $DD_1 C_1 C$.
 - 2) Найдите AA_1 .

С–13

1. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно $\sqrt{5}$, K — центр грани $AA_1 B_1 B$. Найдите угол между прямой KC и плоскостью основания.
 2. В правильной треугольной призме через среднюю линию основания под углом 60° к плоскости основания проведена плоскость, пересекающая боковое ребро. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна 4 см.
-

С–14

В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90^\circ$). Через сторону BC и вершину A_1 проведена плоскость, $\angle BA_1 C = 30^\circ$, $A_1 B = 10$, $AC = 5$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

С–15

1. Основанием наклонного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит прямоугольник $ABCD$. Грань $AA_1 D_1 D$ перпендикулярна плоскости основания. Докажите, что $DD_1 C_1 C$ — прямоугольник.
 2. В наклонной треугольной призме площади двух граней равны 15 и 25 см². Угол между ними 120° . Длина бокового ребра равна 5 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
-

С–16

1. В правильной треугольной пирамиде высота равна 12 см, а высота основания равна 15 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
 2. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a , а высота равна $3a$. Найдите углы наклона боковых ребер и боковых граней к плоскости основания.
-

С–17

1. В основании пирамиды $MABC$ лежит треугольник ABC , у которого $AB = a$ и $\angle ACB = 150^\circ$. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 45° . Найдите высоту пирамиды.
2. Основанием пирамиды $PEFM$ служит равнобедренный треугольник, $EF = EM$, $MF = 20\sqrt{6}$. Боковое ребро PE равно 10 и перпендикулярно плоскости основания. Угол между PE и плоскостью MPF равен 60° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

С-18

1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a , а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60° . Через диагональ основания параллельно боковому ребру проведена плоскость. Найдите площадь сечения.
 2. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 6 и 8 см, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
-

С-19

1. В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки K и M — середины ребер AD и DD_1 соответственно. Запишите векторы с началом и концом в вершинах параллелепипеда, которые:
 - 1) противоположно направлены вектору $\overrightarrow{KM}$;
 - 2) сонаправлены с вектором $\overrightarrow{DC}$;
 - 3) имеют длину, равную длине вектора $\overrightarrow{A_1 B}$.
 2. Пусть плоскость γ пересекает плоскости α и β по прямым a и b соответственно, $A \in a$, $B \in a$, $C \in b$, $D \in b$. Могут ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ быть коллинеарными? Если да, то укажите хотя бы одну из таких возможностей.
-

С-20

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Укажите вектор, равный сумме векторов $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C_1 D_1} + \overrightarrow{A_1 A} + \overrightarrow{DB_1}$.
 2. Докажите, что векторы $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{KF}$ и $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{EC}$ противоположны.
-

С-21

1. $FABC$ — тетраэдр. Изобразите вектор $\overrightarrow{FK} = 1,5\overrightarrow{CB} + 0,5\overrightarrow{CF}$.
2. В треугольнике ABC точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Точка M не лежит в плоскости треугольника ABC . Выразите вектор $\overrightarrow{CA}$ через разность векторов $\overrightarrow{MF}$ и $\overrightarrow{ME}$.

С-22

1. $ABCD, B_1C_1D_1$ — параллелепипед, M — точка пересечения DC_1 и D_1C , $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.
 2. В тетраэдре $DABC$ M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Разложите вектор $\overrightarrow{DM}$ по векторам $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$.
-

С-23

В правильной четырёхугольной пирамиде $EABCD$ ребро $EA = 2\sqrt{2}$ см, $AB = 2$ см.

- 1) Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
- 2) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью AEC .
- 3) Найдите угол, который составляет прямая EC с плоскостью ABC .
- 4) Найдите угол между плоскостями ECD и ABC .
- 5) Найдите длину вектора $\vec{BE} + \vec{EC} - \vec{AB} + \vec{DE}$.
- 6) Докажите, что плоскости AEC и ABC взаимно перпендикулярны.

Вариант 3

С-1

1. В чем ошибка чертежа (рис. 9)? Дайте объяснение. Сделайте верный чертеж.

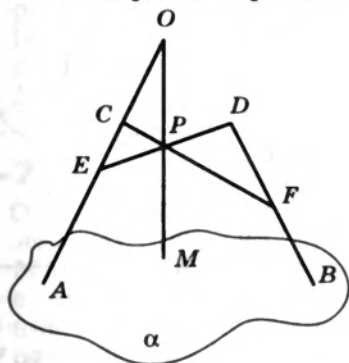


Рис. 9

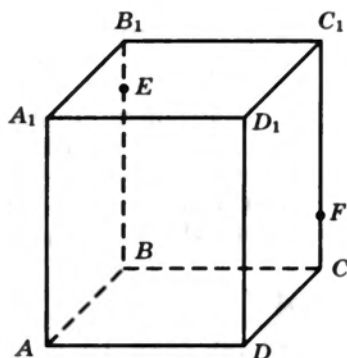


Рис. 10

2. По данным рисунка 10 постройте:
- 1) точки пересечения прямой EF с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$;
 - 2) линию пересечения плоскостей ADF и EFD ;
 - 3) линию пересечения плоскостей EFD и ABC .

С-2

1. Докажите, что прямые AA_1 и C_1D_1 , AA_1 и B_1D , AC и B_1D_1 являются скрещивающимися (рис. 11).
2. Прямая b лежит в плоскости α . Прямая a не лежит в плоскости α и параллельна прямой b . Через точку M , лежащую в плоскости α ($M \notin b$), проведена прямая c , параллельная a . Докажите, что c лежит в плоскости α .

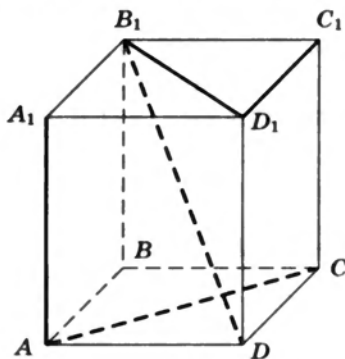


Рис. 11

С-3

1. $a \parallel b$, $a \parallel \alpha$. В каком взаимном положении находятся прямая b и плоскость α ? Дайте объяснение.
2. На рисунке 12 $ABCD$ — параллелограмм, $\angle ABC = 130^\circ$, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ и $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$.
1) Постройте линии пересечения плоскости AMD с плоскостями AA_1B_1 , BB_1C_1 и DD_1C_1 .
2) Найдите угол между прямыми AB и A_1D_1 .

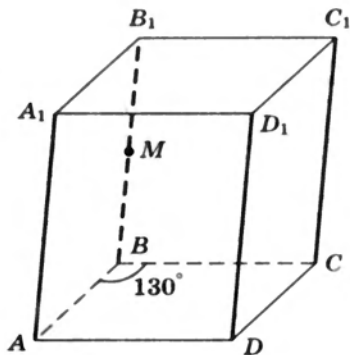


Рис. 12

С-4

1. На рисунке 13 $EF \parallel E_1F_1$ и $EM \parallel E_1M_1$. Докажите, что $\angle DFM = \angle DFM_1$.

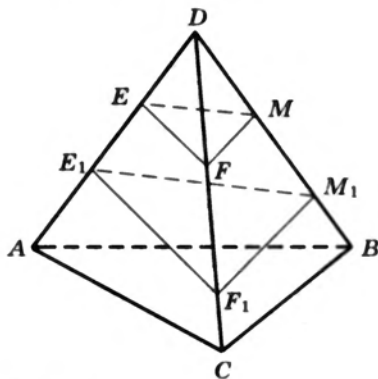


Рис. 13

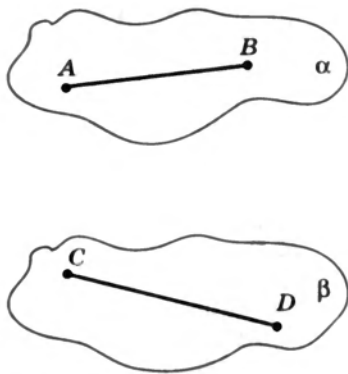


Рис. 14

2. Отрезки AB и CD лежат соответственно в параллельных плоскостях α и β (рис. 14). Что можно сказать о взаимном расположении прямых AD и BC ?

С-5

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E и F — середины $B_1 C_1$ и $C_1 D_1$ соответственно, $AA_1 \perp EF$. Докажите, что $B_1 D = BD_1$.
2. В тетраэдре $DABC$ $\angle DBC = \angle DBA = 60^\circ$, $BA = BC = 5$ см, $DB = 8$ см, $AC = 8$ см. Найдите площадь треугольника ADC .

С-6

1. В тетраэдре $DABC$ точка M — середина AD , $P \in DC$ и $DP : PC = 1 : 3$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M и P и параллельной BC . Найдите площадь сечения, если все ребра тетраэдра равны a .
 2. Постройте сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точки M , P и E , где $M \in B_1 C_1$, $P \in CC_1$ и $E \in AB$.
-

С-7

1. Отрезок AB не пересекает плоскость α , $AC \perp \alpha$ и $BD \perp \alpha$, $AC = 20$, $BD = 30$, $M \in AB$, причем $AM : MB = 2 : 3$, $MM_1 \perp \alpha$. Найдите MM_1 .
 2. $a \perp \alpha$ и $a \perp \beta$. Плоскость γ пересекает плоскость α по прямой b , а плоскость β по прямой c . Каково взаимное расположение прямых b и c ?
-

С-8

1. $ABCD$ — квадрат. Отрезок MD перпендикулярен плоскости ABC . Докажите, что $MB \perp AC$.
 2. $ABCD$ — прямоугольник. Отрезок AE перпендикулярен плоскости ABC , $EB = 15$, $EC = 24$, $ED = 20$. Докажите, что треугольник EDC — прямоугольный, и найдите AE .
-

С-9

Плоскости α и β параллельны. Из точки M (плоскости α и β расположены по одну сторону от точки M) проведены две прямые. Первая прямая пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B , а вторая — в точках C и D , $AM = CD$, $MC = 16$, $AB = 25$. Расстояние от точки M до плоскости α равно 12. Найдите расстояние между плоскостями.

С-10

1. $ABCD$ — ромб со стороной, равной a , $\angle A = 60^\circ$, $AM \perp ABC$, $AM = \frac{a}{2}$. Найдите расстояние от точки M до прямой CD .
2. В треугольнике ABC $AC = CB = 8$, $\angle ACB = 130^\circ$. Точка M удалена от плоскости ABC на расстояние, равное 12, и находится на равном расстоянии от вершин треугольника ABC . Найдите угол между MA и плоскостью ABC .

С—11

1. На гранях двугранного угла взяты две точки, удаленные от ребра двугранного угла на 6 и 10 см. Известно, что одна из этих точек удалена от второй грани на 7,5 см. Найдите расстояние от другой точки до противоположной грани двугранного угла.
 2. Через сторону ромба $ABCD$ проведена плоскость α . Сторона AB составляет с этой плоскостью угол 30° . Найдите угол между плоскостью ромба и плоскостью α , если острый угол ромба равен 45° .
-

С—12

1. Два правильных треугольника ABC и BBC расположены так, что их плоскости взаимно перпендикулярны. Найдите тангенс двугранного угла, образованного плоскостями ADC и ABC .
 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основание $ABCD$ — квадрат, $AD = 2$, $AC_1 = 2\sqrt{6}$.
 - 1) Найдите CC_1 .
 - 2) Докажите, что плоскости ACC_1 и $BB_1 D_1$ взаимно перпендикулярны.
-

С—13

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания равна 4 см. Через середину $A_1 C_1$ и сторону основания BC проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если длина бокового ребра равна 2 см.
 2. В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит ромб со стороной, равной a , $\angle BAD = 60^\circ$. Через сторону AD и вершину B_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол 45° . Найдите длину бокового ребра и площадь сечения.
-

С—14

В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 1$, $BC = 7\sqrt{3}$, $\angle ABC = 150^\circ$. Через диагональ AC и вершину B_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол 60° . Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

С-15

1. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник со стороной, равной a . Длина бокового ребра равна b , $\angle A_1AC = \angle A_1AB$. Найдите площадь грани CC_1B_1B .
 2. В наклонном параллелепипеде $ABCD A_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно 10, а площадь боковой поверхности равна 420. Расстояние между ребрами AA_1 и DD_1 на 11 больше расстояния между ребрами AA_1 и BB_1 . Расстояние между ребрами BB_1 и DD_1 равно 19. Найдите углы между смежными боковыми гранями параллелепипеда.
-

С-16

1. В правильной треугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . Расстояние от вершины основания до боковой грани равно $3\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
 2. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4 см, а расстояние от центра основания до бокового ребра равно 2 см. Найдите:
 - 1) угол между смежными боковыми гранями;
 - 2) плоский угол при вершине пирамиды.
-

С-17

1. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, основания которой равны 2 и 8 см. Боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . Найдите высоту пирамиды и площадь ее боковой поверхности.
 2. В основании пирамиды лежит ромб со стороной, равной a , и углом 60° . Боковые грани, проходящие через стороны острого угла ромба, перпендикулярны плоскости основания, а остальные две боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
-

С-18

1. В правильной четырехугольной пирамиде каждая из сторон основания равна a , а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Через центр основания параллельно боковой грани проведена плоскость. Найдите площадь сечения.
2. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 10 и 6 см, а площадь диагонального сечения $8\sqrt{10}$ см². Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

С-19

1. В призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = AC$, $\angle A_1AC = \angle A_1AB$, E и F — середины ребер AC и AB соответственно. Запишите векторы с началом и концом в вершинах призмы, которые:
1) сонаправлены с вектором $\overrightarrow{EF}$;
2) противоположно направлены вектору $\overrightarrow{C_1C}$;
3) имеют длину, равную длине вектора $\overrightarrow{CB_1}$.
2. Прямые AB и CD параллельны. Через эти прямые проведены соответственно плоскости α и β , которые пересекаются по прямой EF . Будут ли коллинеарными векторы $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{AB}$? Если да, то почему?

С-20

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Укажите вектор, равный сумме векторов $\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A_1A}$.
2. В пирамиде $MABCD$ (основание — прямоугольник $ABCD$) $AB = 8$ см, $BC = 15$ см. Найдите $|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{MA}|$.

С-21

1. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ диагонали грани BB_1C_1C пересекаются в точке M . Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{BC}$.
2. Диагонали параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ пересекаются в точке O . При каком значении k справедливо соотношение $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{CO} = k\overrightarrow{C_1A}$?

С-22

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $M \in AD$, причем $AM : MD = 1 : 3$, а $P \in DC$, причем $DP : PC_1 = 2 : 5$. Разложите вектор $\overrightarrow{MP}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.
2. Используя векторы, докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

С-23

В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$; $AB = 2$ см, $AA_1 = 2\sqrt{3}$ см.

- 1) Найдите площадь полной поверхности призмы.
- 2) Найдите площадь сечения призмы плоскостью A_1BC .
- 3) Найдите угол между плоскостями A_1BC и ABC .
- 4) Найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью A_1BC .
- 5) Разложите вектор $\overrightarrow{A_1M}$ по векторам $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{A_1C}$, если M — точка пересечения медиан треугольника ABC .
- 6) Найдите угол между плоскостями AA_1B_1 и A_1BC .

Вариант 4

С-1

1. В чем ошибка чертежа, где $O \in EF$ (рис. 15)? Дайте объяснение. Сделайте верный чертеж.

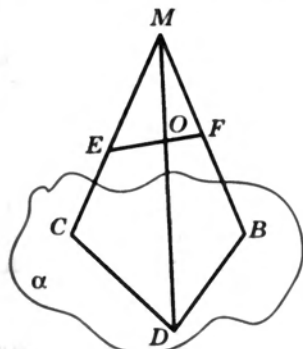


Рис. 15

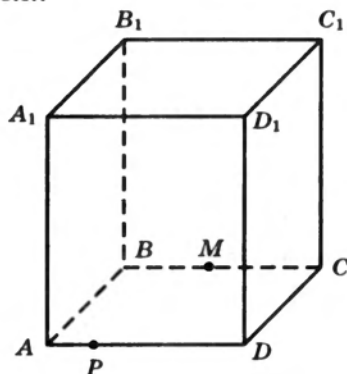


Рис. 16

2. По данным рисунка 16 постройте:
- 1) точку пересечения прямой PM с плоскостями DCC_1 и AA_1B_1 ;
 - 2) линию пересечения плоскостей PB_1M и AB_1M ;
 - 3) линию пересечения плоскостей PMC_1 и DD_1C_1 .

С-2

1. Докажите, что прямые AD и C_1D_1 , A_1D и D_1C , D_1C и AB_1 являются скрещивающимися (рис. 17).
2. Даны две параллельные прямые a и b и точка M , не лежащая ни на одной из них. Лежит ли точка M в одной плоскости с прямыми a и b , если известно, что через точку M можно провести прямую, пересекающую только одну из данных прямых?

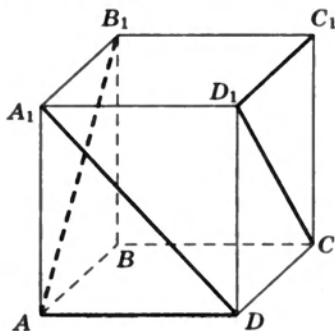


Рис. 17

С-3

1. $a \parallel \alpha$, $M \in \alpha$. Докажите, что в плоскости α существует прямая b , проходящая через точку M и параллельная прямой a .
2. На рисунке 18 $ABCD$ — параллелограмм, $\angle ADC = 100^\circ$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ и $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$.
1) Постройте линии пересечения плоскости AA_1E с плоскостями $A_1D_1C_1$, DD_1C_1 и ABC .
2) Чему равен угол между прямыми AD и D_1C_1 ?

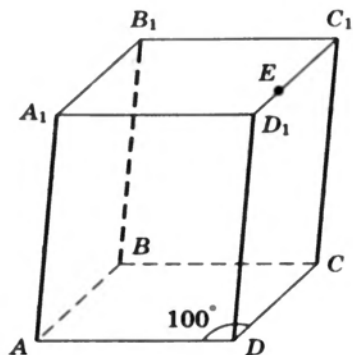


Рис. 18

С-4

1. На рисунке 19 $a \parallel b \parallel c$ и не лежат в одной плоскости, $AB \parallel A_1B_1$ и $BC \parallel B_1C_1$. Докажите, что $AC = A_1C_1$.

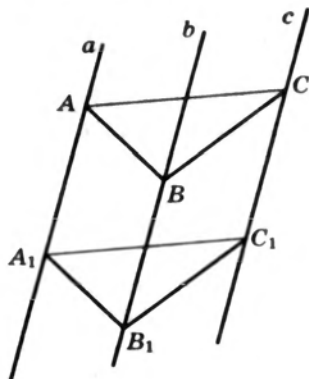


Рис. 19

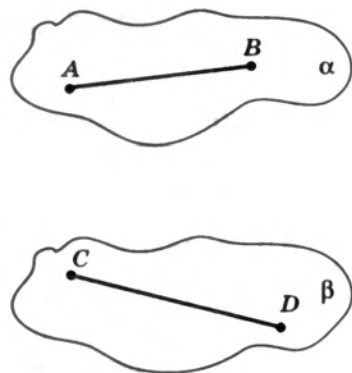


Рис. 20

2. Отрезки AB и CD лежат соответственно в параллельных плоскостях α и β (рис. 20). Что можно сказать о взаимном расположении прямых AC и BD ?

С-5

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки P и K — середины AB и BC соответственно, $A_1 C = AC_1$. Найдите угол между прямыми DD_1 и PK .
2. В тетраэдре $DABC$ ребро $DA = 6\sqrt{2}$ см, $AB = AC = 14$ см, $\angle DAB = \angle DAC = 45^\circ$, $BC = 16$ см. Найдите площадь грани BDC .

С-6

1. В тетраэдре $DABC$ точка P — середина AD , $E \in DB$, причем $DE : EB = 1 : 3$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки P и E и параллельной AC , и найдите площадь сечения, если каждое ребро тетраэдра равно a .
 2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $M \in D_1 C_1$, $P \in DD_1$ и $K \in BC$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки M , P и K .
-

С-7

1. Отрезок AB пересекает плоскость α , $AC \perp \alpha$ и $BD \perp \alpha$, $AC = 14$, $BD = 10$, точка E — середина AB , $EE_1 \perp \alpha$. Найдите EE_1 .
 2. $a \perp \alpha$, $b \perp a$ ($b \notin \alpha$). Через прямую b проведена плоскость β , пересекающая плоскость α по прямой c . Каково взаимное расположение прямых b и c ?
-

С-8

1. Треугольник ABC — равнобедренный, $AB = AC$, точка D — середина BC , прямая ED перпендикулярна плоскости ABC . Докажите, что $AE \perp BC$.
 2. Точка A принадлежит окружности, AK — перпендикуляр к ее плоскости, $AK = 1$ см, AB — диаметр, BC — хорда окружности, составляющая с AB угол 45° . Радиус окружности равен 2 см. Докажите, что треугольник KCB — прямоугольный, и найдите KC .
-

С-9

Точка M расположена между параллельными плоскостями α и β . Через точку M проведены две прямые. Первая прямая пересекает плоскость α в точке A , а плоскость β в точке B . Вторая пересекает эти плоскости соответственно в точках C и D , $MA = MD$, $MC = 32$, $MB = 50$. Расстояние от точки M до плоскости α равно 24. Найдите расстояние между плоскостями.

С-10

1. В треугольнике ABC $AC = BC = m$, $\angle ACB = 120^\circ$, $PA \perp ABC$. Точка P удалена на расстояние, равное m , от прямой BC . Найдите расстояние от точки P до плоскости ABC .
2. Треугольник ABC — прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), $\angle A = 20^\circ$, $AC = 15$. Точка M удалена на расстояние, равное 25, от каждой из вершин треугольника. Найдите угол между MC и плоскостью ABC .

С–11

1. Две точки лежат на грани двугранного угла и удалены от второй грани соответственно на 48 и 60 см. Одна из этих точек отстоит от ребра двугранного угла на 50 см. Найдите расстояние от второй точки до ребра двугранного угла.
 2. Через вершину прямого угла C равнобедренного прямоугольного треугольника ACB проведена плоскость α , параллельная гипотенузе и составляющая с катетом угол 30° . Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью α .
-

С–12

1. Сторона правильного треугольника ABC равна 4. Треугольник DBC — равнобедренный ($DB = DC$). Их плоскости взаимно перпендикулярны. Плоскость ADC составляет с плоскостью ABC угол 60° . Найдите площадь треугольника DBC .
 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ боковая грань $DD_1 C_1 C$ — квадрат, $DC = 3$, $BD_1 = \sqrt{22}$.
 - 1) Найдите BC .
 - 2) Докажите, что плоскости BCD_1 и $DC_1 B_1$ взаимно перпендикулярны.
-

С–13

1. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна a , а боковое ребро равно $\frac{a\sqrt{14}}{2}$. Через диагональ основания BD и середину $D_1 C_1$ проведена плоскость. Найдите площадь сечения.
 2. В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит ромб со стороной, равной m , $\angle ADC = 135^\circ$. Через сторону DC и вершину A_1 проведена плоскость под углом 60° к плоскости основания. Найдите длину бокового ребра и площадь сечения.
-

С–14

В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $BC = 7$, $CD = 15$, $\angle BCD = 60^\circ$. Через диагональ BD и вершину C_1 проведена плоскость под углом 45° к плоскости основания. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

С-15

1. В наклонном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит квадрат $ABCD$ со стороной, равной a , $AA_1 = b$, $\angle A_1 AD = \angle A_1 AB$. Найдите площадь диагонального сечения $BB_1 D_1 D$.
 2. В наклонном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ боковое ребро равно 10, а площадь боковой поверхности равна 880. Расстояния от ребра DD_1 до ребер CC_1 и AA_1 относятся как 7 : 15. Расстояние между ребрами AA_1 и CC_1 равно 26. Найдите углы между смежными боковыми гранями параллелепипеда.
-

С-16

1. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 60° , а расстояние от середины стороны основания до противоположной боковой грани равно $4\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
 2. В правильной треугольной пирамиде высота основания равна $2\sqrt{3}$ см, а расстояние от середины стороны основания до противоположного бокового ребра равно 3 см. Найдите:
1) угол между боковыми гранями;
2) плоский угол при вершине пирамиды.
-

С-17

1. Основанием пирамиды служит ромб, сторона которого равна a , а острый угол равен 60° . Боковые грани наклонены к основанию под углом 45° . Найдите высоту пирамиды и площадь ее боковой поверхности.
 2. В основании пирамиды $DABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC , $AC = CB = a$, $\angle ACB = 120^\circ$. Грани DAC и DAB перпендикулярны плоскости основания, а грань DBC составляет с ней угол 45° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
-

С-18

1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a , а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Через сторону основания, перпендикулярную противоположной боковой грани, проведена плоскость. Найдите площадь сечения.
2. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны $8\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$ см. Через боковое ребро и середину противоположной стороны верхнего основания проведена плоскость. Площадь сечения равна $\frac{21\sqrt{3}}{2}$ см². Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

С-19

1. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $ABCD$ — ромб, $\angle A_1 A D = \angle A_1 A B$, точки E и F — середины ребер $A_1 B_1$ и $A_1 D_1$ соответственно. Запишите векторы с началом и концом в вершинах параллелепипеда, которые:
 - 1) сонаправлены с вектором $\overrightarrow{EF}$;
 - 2) противоположно направлены вектору $\overrightarrow{DC_1}$;
 - 3) имеют длину, равную длине вектора $\overrightarrow{B_1 D}$.
2. Плоскости α и β перпендикулярны плоскости γ и пересекаются по прямой AB . Прямая CD , не принадлежащая этим плоскостям, перпендикулярна плоскости γ . Будут ли коллинеарными векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$? Если да, то почему?

С-20

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Укажите вектор, равный сумме векторов $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A_1 D_1} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.
2. В треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ основанием служит правильный треугольник ABC , сторона которого равна $2\sqrt{3}$ см, O — середина AB . Найдите $|\overrightarrow{A_1 A} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{A_1 C}|$.

С-21

1. В тетраэдре $MABC$ CE — медиана грани BMC , K — середина CE . Выразите $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BM}$.
2. Диагонали параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ пересекаются в точке O . При каком значении k справедливо соотношение $k(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AO}) = \overrightarrow{A_1 C}$?

С-22

1. В тетраэдре $DABC$ O — точка пересечения медиан треугольника ABC , $F \in AD$, причем $AF : FD = 3 : 1$. Разложите вектор $\overrightarrow{OF}$ по векторам $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$.
2. Используя векторы, докажите: диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

С-23

В пирамиде $DABC$ $AD = 4\sqrt{3}$ см и перпендикулярно основанию, $AB = 2$ см, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, M — середина DA .

- 1) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- 2) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BMC .
- 3) Найдите угол между плоскостями MBC и ABC .
- 4) Найдите угол между прямой BD и плоскостью BMC .
- 5) Разложите вектор $\overrightarrow{DO}$ по векторам $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$, если O — точка пересечения медиан треугольника ABC .
- 6) Найдите угол между плоскостями MBC и ABD .

Вариант 5

С-1

1. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) AB пересекает CD в точке M , E — середина AD , $O \in BC$. Точка K расположена вне плоскости трапеции. При каком условии точки K , M , O и E лежат в одной плоскости?
2. Постройте линию пересечения плоскостей AB_1C и A_1C_1B (рис. 21).

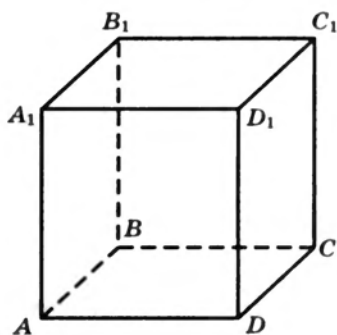


Рис. 21

С-2

1. На рисунке 22 прямые a и b — скрещивающиеся. Каково взаимное расположение прямых EF и a , EF и b ?

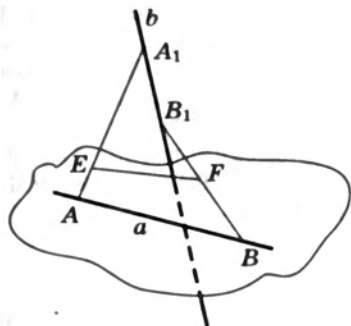


Рис. 22

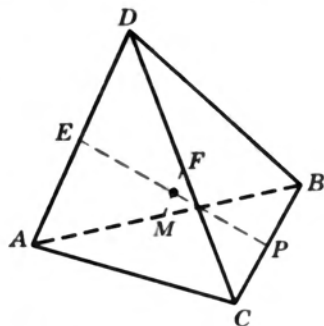


Рис. 23

2. На рисунке 23 точки E , F , P и M — середины отрезков AD , CD , BC и AB соответственно. Докажите, что EP и MF пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

С-3

1. Треугольники ABC и DBC не лежат в одной плоскости. Точки M , N и K — середины отрезков BD , CD и AC соответственно. Плоскость MKN пересекает отрезок AB в точке P . Докажите, что отрезки PN и MK пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

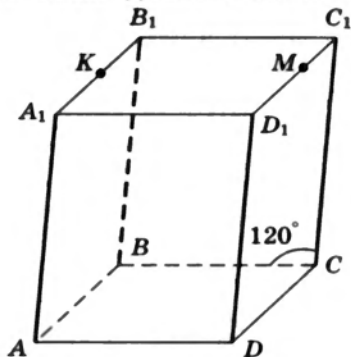


Рис. 24

2. На рисунке 24 $ABCD$ — параллелограмм, $\angle BCC_1 = 120^\circ$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ и $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$.
 - 1) Постройте линию пересечения OO_1 плоскостей, проходящих через прямую AA_1 и точку M и прямую DD_1 и точку K .
 - 2) Каково взаимное расположение прямых OO_1 и AA_1 ?
 - 3) Чему равен угол между прямыми OO_1 и AD ?

С-4

1. Три плоскости параллельны. Скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 пересекают эти плоскости в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 . Известно, что $B_1B_2 = 5$ см, $A_2A_3 = 6$ см, $A_1A_2 : B_2B_3 = 8 : 15$. Найдите длины отрезков A_1A_3 и B_1B_3 .
2. Пересекающиеся прямые p и q лежат в плоскости α , $A \notin \alpha$, $AB \parallel p$, $AC \parallel q$, $A \in \beta$, $C \in \beta$. Каково взаимное расположение плоскостей α и β ?

С-5

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $E \in B_1 C_1$, $F \in AD$, причем $B_1 E : EC_1 = FD : AF = 5 : 2$. Докажите, что точки E и F симметричны относительно точки пересечения диагоналей параллелепипеда.
2. Докажите, что сумма квадратов ребер тетраэдра в четыре раза больше суммы квадратов отрезков, соединяющих середины противоположных ребер.

С-6

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все грани — квадраты со стороной, равной 8 см (куб). Точки P , M и T соответствуют серединам ребер $A_1 B_1$, $C_1 C$ и AD . Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки P , M и T , и найдите площадь сечения.
2. $DABC$ — тетраэдр, $P \in AB$, DE — медиана грани CDB . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки C и P и параллельной DE .

С-7

1. Через вершину A треугольника ABC проведена плоскость α , параллельная BC , $BB_1 \perp \alpha$ и $CC_1 \perp \alpha$, $CC_1 = 4$, $\angle BAC = 60^\circ$, $AC_1 = \sqrt{209}$, $AB_1 = \sqrt{33}$. Найдите BC .
2. Плоскости α и β параллельны, $a \perp \alpha$ и пересекает плоскость α в точке A , $b \perp \beta$ и пересекает плоскость β в точке B , PP_1 пересекает плоскости α и β в точках M и P_1 . Постройте точки пересечения прямой a с плоскостью β и прямой b с плоскостью α . Дайте обоснование (рис. 25).

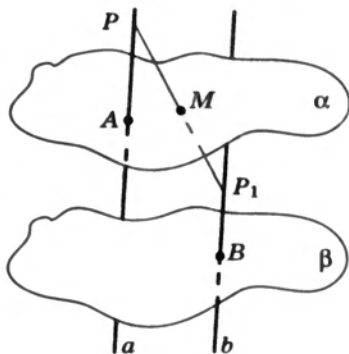


Рис. 25

С-8

1. В тетраэдре $DABC$ $AB = BC$, $\angle DBC = \angle DBA$. Докажите, что $AC \perp DB$.
2. $DABC$ — тетраэдр, каждое из ребер которого равно a , точка E — середина BC . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку E и перпендикулярной DB , и найдите площадь сечения.

С-9

Вершины A и D параллелограмма $ABCD$ лежат в плоскости α , а две другие — вне этой плоскости, $AB = 15$ см, $BC = 19$ см. Проекции диагоналей параллелограмма на плоскость α равны 20 и 22 см. Найдите расстояние от стороны BC до плоскости α .

С-10

1. Точка M удалена от каждой из сторон равнобедренной трапеции на расстояние, равное 12 см. Основания трапеции равны 18 см и 32 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости трапеции.
 2. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена наклонная AM к плоскости прямоугольника, составляющая угол 50° со сторонами AD и AB . Найдите угол между этой наклонной и плоскостью прямоугольника.
-

С-11

1. Концы отрезка $AB = 25$ см лежат на гранях двугранного угла, равного 60° . Из точек A и B опущены перпендикуляры AC и BD на ребро двугранного угла, $AC = 5$ см, $BD = 8$ см. Найдите CD .
 2. $ABCD$ — квадрат, O — точка пересечения диагоналей, $OM \perp ABC$, $OM = 3$. Сторона квадрата равна $4\sqrt{2}$. Найдите угол между плоскостями BMC и DMC .
-

С-12

1. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 3$, $AD = 4$. Этот прямоугольник перегнут по диагонали AC так, что образовался прямой двугранный угол. Найдите расстояние между вершинами B и D .
 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 4$, $AB_1 = 15$, $B_1 D = \sqrt{305}$. Найдите расстояние между AB и $B_1 D$ и изобразите на рисунке общий перпендикуляр этих скрещивающихся прямых.
-

С-13

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ все ребра равны $2\sqrt{3}$. Через сторону основания под углом 60° к его плоскости проведена плоскость. Найдите площадь сечения.
2. Площадь боковой грани правильной шестиугольной призмы равна Q . Найдите площадь сечения, перпендикулярного меньшей диагонали основания и делящего эту диагональ пополам.

С-14

В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = 13$, $BC = 21$, $AC = 20$. Диагональ боковой грани A_1C составляет с плоскостью грани CC_1B_1B угол 30° . Найдите площадь полной поверхности призмы.

С-15

1. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны между собой. Ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол 60° , $\angle A_1AC = \angle A_1AB < 90^\circ$. Площадь грани CC_1B_1B равна Q . Найдите площадь боковой поверхности призмы.
 2. В наклонном параллелепипеде $ABCD A_1B_1C_1D_1$ расстояние от ребра AA_1 до ребра DD_1 равно 10, а от AA_1 до BB_1 равно 17. Площадь диагонального сечения BB_1D_1D равна 210. Расстояние между ребром AA_1 и диагональю B_1D равно 8. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
-

С-16

1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a , угол между смежными боковыми гранями равен 120° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
 2. В правильной n -угольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом φ . Найдите плоский угол при вершине пирамиды и вычислите его при $\varphi = 40^\circ$ и $n = 10$.
-

С-17

1. В основании пирамиды $MABC$ лежит треугольник ABC , у которого $AB = BC$, $AC = b$ и $\angle A = \alpha$. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом φ . Найдите высоту пирамиды и площадь ее боковой поверхности.
2. В основании пирамиды $MABC$ лежит треугольник ABC , у которого $AB = AC = 50$, $BC = 80$, $\angle MAC = \angle MAB < 90^\circ$. Плоскости MBC и ABC взаимно перпендикулярны. Основание высоты пирамиды удалено от грани AMC на расстояние, равное $12\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

C-18

1. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ через середины сторон AB и AD параллельно боковому ребру AM проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна a , а боковое ребро равно b .
2. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны $8\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$. Через вершину верхнего основания перпендикулярно плоскости основания и параллельно противоположащей стороне основания проведена плоскость. Площадь сечения равна $4\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды и высоту полной пирамиды, частью которой является данная усеченная пирамида.

C-19

1. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ точки E, M, T и K — середины ребер DC, DB, BA и AC соответственно.
- 1) Перечислите пары противоположно направленных векторов, не лежащих на одной прямой, с началом и концом в точках E, M, T и K .
 - 2) Перечислите пары равных векторов с началом и концом в точках E, M, T и K .
 - 3) Перечислите векторы, имеющие равные длины, с концами в точках E, M, T и K .

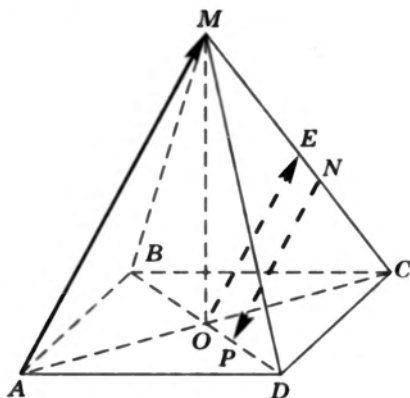


Рис. 26

2. На рисунке 26 $MABCD$ — правильная пирамида, $ME = EC$. Какие из указанных на рисунке векторов коллинеарны? Почему?

С-20

1. $EABCDF$ — правильный октаэдр с ребром, равным a .
Найдите

$$|\vec{FA} + \vec{BC} + \vec{DC} + \vec{FA}|.$$

2. Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ произвольно расположены в пространстве. Докажите, что

$$\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{AB_1} + \vec{BC_1} + \vec{CA_1}.$$

С-21

1. Точка M расположена вне плоскости правильного треугольника ABC на равном расстоянии от его вершин, MO — перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость треугольника. Выразите вектор $\vec{MO}$ через векторы $\vec{MB}$, $\vec{BC}$ и $\vec{CA}$.
2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отличны от нулевого вектора и неколлинеарны. Найдите m и n , если $3\vec{a} + 5\vec{b} = m\vec{a} + (2n + 1)\vec{b}$.

С-22

1. Длина стороны основания $ABCDEF$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равна a . Диагональ AB_1 боковой грани AA_1B_1B наклонена к стороне AB основания под углом φ . Пусть $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ — единичные векторы, сонаправленные с векторами $\vec{AB}$, $\vec{AF}$ и $\vec{AA_1}$ соответственно. Разложите вектор $\vec{AD_1}$ по векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.
2. В наклонной треугольной призме проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и параллельная основаниям. Докажите, что точки пересечения медиан оснований и сечения лежат на одной прямой.

С-23

В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $AC = 13$ см, $AB = 14$ см, $BC = 15$ см, $AA_1 = 10$ см. Точки M и N — середины ребер AA_1 и BB_1 соответственно.

- 1) Найдите площадь полной поверхности призмы.
- 2) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNC .
- 3) Найдите угол между плоскостями MNC и ABC .
- 4) Найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью MNC .
- 5) Разложите вектор $\vec{MK}$ по векторам $\vec{AA_1}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AB}$, если K — середина отрезка CH .
- 6) Постройте линию пересечения плоскостей MNC и ABC .

С-1

1. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O , $AB : BC = 2 : 3$, $E \in AC$, точка D лежит вне плоскости ABC . При каком условии можно провести плоскость через точки D , B , O и E ?
2. Постройте линию пересечения плоскостей PKT и MCE (рис. 27).

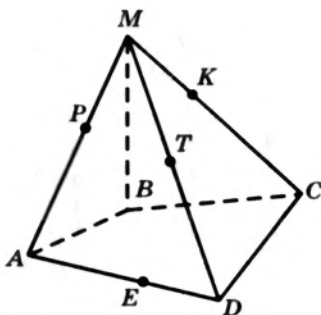


Рис. 27

С-2

1. На рисунке 28 прямые a и b — скрещивающиеся. Каково взаимное расположение прямых PQ и a , PQ и b ?

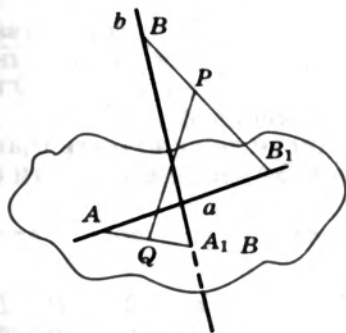


Рис. 28

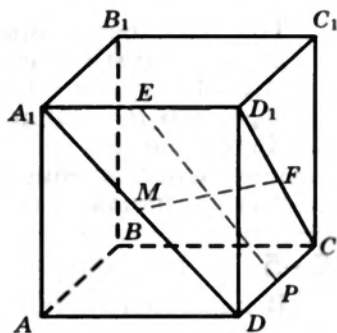


Рис. 29

2. На рисунке 29 E , F , P и M — середины A_1D_1 , D_1C , CD и A_1D соответственно. Докажите, что EP и MF пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

С-3

1. Треугольник APD и трапеция $ABCD$ имеют общую сторону AD и лежат в разных плоскостях. Через основание BC трапеции и середину отрезка PD — точку K проведена плоскость, которая пересекает прямую AP в точке M , $AD = 2BC$. Докажите, что отрезки MC и BK пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

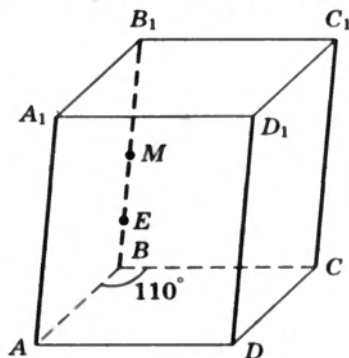


Рис. 30

2. На рисунке 30 $ABCD$ — параллелограмм, $\angle ABC = 110^\circ$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ и $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$.
 - 1) Постройте линию пересечения KK_1 плоскостей, проходящих через прямую AD и точку M и прямую A_1D_1 и точку E .
 - 2) Каково взаимное расположение прямых KK_1 и BC ?
 - 3) Чему равен угол между прямыми KK_1 и DC ?

С-4

1. Три плоскости параллельны между собой. Скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 пересекают эти плоскости в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 , $A_1A_2 = 4$ см, $B_2B_3 = 9$ см, $A_2A_3 = B_1B_2$. Найдите длины отрезков A_1A_3 и B_1B_3 .
2. Дано $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$, $b \parallel \alpha$, $b \parallel \beta$. Каково должно быть взаимное расположение данных прямых, чтобы плоскости α и β были параллельными?

С-5

1. В параллелепипеде $ABCD A_1B_1C_1D_1$ $K \in A_1B_1$ и $P \in DC$, причем $A_1K : KB_1 = CP : PD = 3 : 1$. Докажите, что точки K и P симметричны относительно точки пересечения диагоналей параллелепипеда.
2. Докажите, что прямые, проходящие через вершины тетраэдра и точки пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке.

С-6

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все грани — квадраты со стороной, равной 4 см (куб). Диагонали оснований $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ пересекаются в точках O и O_1 соответственно, точка P — середина AD , а точка T — середина CD . Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки P , T и середину отрезка OO_1 , и найдите площадь сечения.
2. В тетраэдре $DABC$ $P \in AB$, CE — медиана грани DCB . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки D и P и параллельной CE .

С-7

1. Через вершину E треугольника EFM проведена плоскость α , параллельная FM , $MM_1 \perp \alpha$, $MM_1 = 12$ см, P — точка пересечения медиан треугольника, $PP_1 \perp \alpha$. Найдите PP_1 .
2. Плоскости α и β параллельны, $m \perp \beta$ и $n \perp \alpha$. Прямая n пересекает плоскость α в точке P , а прямая m пересекает плоскость β в точке M . Прямая ET пересекает плоскость β в точке K . Постройте точки пересечения прямой m с плоскостью α и прямой n с плоскостью β . Дайте обоснование (рис. 31).

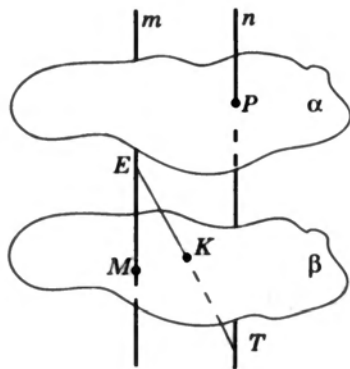


Рис. 31

С-8

1. В тетраэдре $DABC$ $\angle DAC = \angle DAB$ и $\angle ADC = \angle ADB$. Докажите, что $BC \perp AD$.
2. В тетраэдре $DABC$ ребро DB перпендикулярно плоскости ABC , $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = BD$, точка F — середина AD . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку F и перпендикулярной CD .

С-9

Одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Средняя линия трапеции параллельна плоскости α и удалена от нее на 13 см, точка пересечения диагоналей трапеции удалена от плоскости на 15 см. Найдите расстояния от оснований трапеции до плоскости α .

С–10

1. Средняя линия прямоугольной трапеции равна 6. Острый угол равен 30° . Точка M удалена от плоскости трапеции на расстояние, равное $2\sqrt{3}$, и находится на равном расстоянии от ее сторон. Найдите расстояние от точки M до сторон трапеции.
 2. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AM , составляющая с плоскостью прямоугольника угол 40° , $\angle MAD = \angle MAB$. Найдите эти углы.
-

С–11

1. Концы отрезка $AB = 16$ см лежат на гранях двугранного угла, равного 120° . Из точек A и B опущены перпендикуляры AC и BD на ребро двугранного угла. Найдите CD , если $AC = 7$ см и $BD = 11$ см.
 2. ABC — правильный треугольник, O — середина AC , $OD \perp ABC$, $OD = 3$. Сторона треугольника равна $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. Найдите угол между плоскостями ABD и CBD .
-

С–12

1. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 4$, $AC = 5$, $\angle BAC = 60^\circ$. Этот параллелограмм перегнут по диагонали AC так, что образовался прямой двугранный угол. Найдите расстояние между вершинами B и D .
 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $ABCD$ — квадрат со стороной 5 см. Расстояние между BC и AC_1 равно 4 см. Найдите AC_1 и изобразите на рисунке общий перпендикуляр этих скрещивающихся прямых.
-

С–13

1. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна 8 см, а боковое ребро равно $3\sqrt{2}$ см. Через диагональ основания под углом 45° к его плоскости проведено сечение. Найдите его площадь.
2. Площадь боковой грани правильной шестиугольной призмы равна Q . Найдите площадь сечения, которое перпендикулярно большей диагонали основания и делит эту диагональ пополам.

С-14

В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AD = 17$, $DC = 28$, $AC = 39$. Диагональ боковой грани $A_1 D$ составляет с плоскостью боковой грани $DD_1 C_1 C$ угол 45° . Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

С-15

1. В наклонном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит квадрат $ABCD$. Все ребра параллелепипеда равны между собой. Боковое ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол 60° , $\angle A_1 AD = \angle A_1 AB < 90^\circ$. Площадь диагонального сечения $BB_1 D_1 D$ равна Q . Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
 2. В наклонной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ двугранные углы с ребрами CC_1 и BB_1 соответственно равны 45° и 30° . Расстояние от ребра AA_1 до диагонали $B_1 C$ грани $CC_1 B_1 B$ равно 1. Площадь грани $CC_1 B_1 B$ равна $4(1 + \sqrt{3})$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
-

С-16

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна m . Угол между смежными боковыми гранями равен 120° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
 2. В правильной n -угольной пирамиде плоский угол при вершине равен α . Найдите угол наклона боковых граней к плоскости основания и вычислите его, если $\alpha = 10^\circ$ и $n = 20$.
-

С-17

1. В основании пирамиды $MABC$ лежит треугольник ABC , у которого $AB = AC$, $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под равными углами, а боковые грани, проходящие через равные стороны основания, наклонены к плоскости основания под углом φ . Найдите высоту пирамиды и площадь каждой из этих граней.
2. В основании пирамиды $MABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 4$ см, $BC = 3$ см. Грань MAC перпендикулярна плоскости основания, а остальные две грани наклонены к плоскости основания под равными углами, расстояние от основания высоты до грани BMC равно $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

С-18

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a , а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Через центр основания проведена плоскость, параллельная стороне основания и перпендикулярная грани, проходящей через эту сторону. Найдите площадь сечения.
2. В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона верхнего основания равна 2. Плоский угол при вершине нижнего основания равен 60° . Через сторону верхнего основания параллельно боковому ребру проведена плоскость. Площадь сечения равна 8. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды и высоту полной пирамиды, частью которой является данная усеченная пирамида.

С-19

1. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ точки K, M, T и E — середины ребер AB, PA, PC и BC соответственно.
 - 1) Перечислите пары сонаправленных векторов с концами в точках K, M, T и E .
 - 2) Перечислите пары равных векторов с концами в точках K, M, T и E .
 - 3) Перечислите векторы, имеющие равные длины, с концами в точках K, M, T и E .

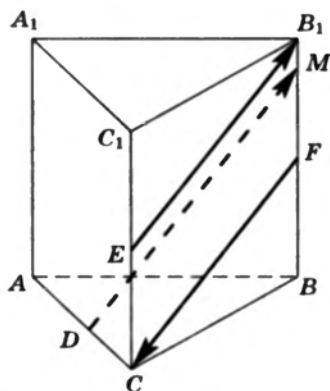


Рис. 32

2. На рисунке 32 $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, E и F — середины ребер CC_1 и B_1B . Какие из указанных на рисунке векторов коллинеарны? Почему?

С-20

1. $PABCDT$ — правильный октаэдр с ребром, равным a , K — середина ребра PC . Найдите

$$|\vec{KD} + \vec{AB} + \vec{CT} + \vec{CP}|.$$

2. Два четырехугольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ произвольно расположены в пространстве. Докажите, что

$$\vec{AB}_1 + \vec{BC}_1 + \vec{CD}_1 + \vec{DA}_1 = \vec{AA}_1 + \vec{BB}_1 + \vec{CC}_1 + \vec{DD}_1.$$

С-21

1. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка E — середина B_1B , C_1B пересекает CE в точке P . Выразите вектор $\vec{AP}$ через векторы $\vec{AC}_1$, $\vec{CB}$ и $\vec{CC}_1$.

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отличны от нулевого вектора и неколлинеарны. Найдите x и y , если

$$(x + y - 1)\vec{a} + (2x - y)\vec{b} = \vec{0}.$$

С-22

1. В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$ сторона основания равна a , а боковые ребра составляют с плоскостью основания угол φ , $P \in MC$, причем $MP : PC = 2 : 3$. Пусть $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ — единичные векторы, сонаправленные с векторами $\vec{FA}$, $\vec{FE}$ и $\vec{FM}$. Разложите вектор $\vec{FP}$ по векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

2. В треугольной пирамиде проведены две плоскости, параллельные основанию и пересекающие три боковых ребра. Докажите, что точки пересечения медиан основания и полученных сечений лежат на одной прямой.

С-23

В пирамиде $DABC$ $DA = DB = DC = AC = 2$ см, $AB = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$. Точки M и H — середины ребер AD и DC соответственно.

- 1) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- 2) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BMH .
- 3) Найдите угол между плоскостями BMH и ABC .
- 4) Найдите угол между прямой BD и плоскостью BMH .
- 5) Разложите вектор $\vec{MK}$ по векторам $\vec{AD}$, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, если K — середина отрезка BH .
- 6) Постройте линию пересечения плоскостей MBH и ABC .

С-1

1. Точка K лежит в плоскости ABC . Постройте точку пересечения прямой DK и плоскости EFM (рис. 33).

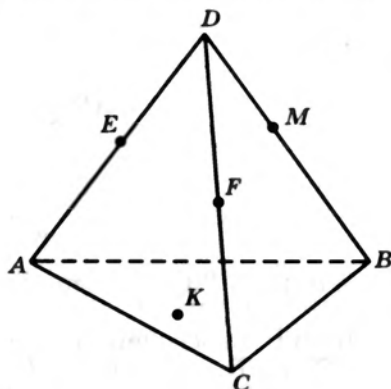


Рис. 33

2. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Принадлежит ли точка C плоскости, в которой лежат точки A , B и O ?

С-2

1. Точка O не лежит в плоскости γ , которая задается параллельными прямыми a и b . Плоскость α проходит через точку O и прямую a , а плоскость β проходит через точку O и прямую b . Докажите, что линия пересечения этих плоскостей параллельна прямым a и b .
2. В плоскости α расположен треугольник ABC . Через его вершины проведены параллельные отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 , расположенные по одну сторону от плоскости α , $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Точки E , F и M — середины отрезков AB , BC и AC соответственно. Докажите, что отрезки A_1F , B_1M и C_1E пересекаются в одной точке. В каком отношении точка пересечения делит эти отрезки?

С-3

1. Параллельна ли плоскость AMC прямой, проходящей через точки H и H_1 пересечения медиан треугольников MAD и MCD ? Дайте объяснение (рис. 34).

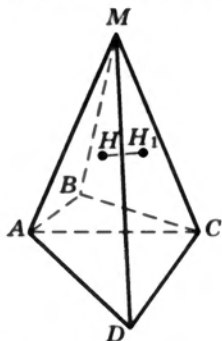


Рис. 34

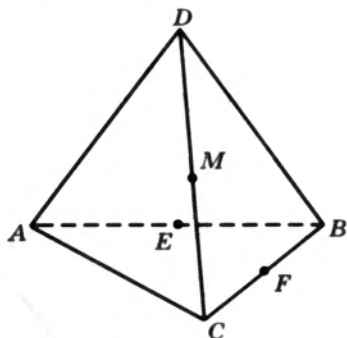


Рис. 35

2. На рисунке 35 точки M , F и E — середины отрезков CD , BC и AB .
 - 1) Постройте линии пересечения плоскости MFE с плоскостями ABC , CDB , ADC и ADB . Дайте объяснение.
 - 2) Найдите угол между прямыми AC и DB , если $AC = 10$, $BD = 20$, а площадь четырехугольника, образованного построенными линиями пересечения, равна $25\sqrt{3}$.

С-4

1. На рисунке 36 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ и $AA_1 = BB_1 = CC_1$, точка M лежит в плоскости AA_1C_1 . Через точку M проведена плоскость, параллельная плоскости B_1BK . Постройте линию пересечения этой плоскости с плоскостью AA_1B_1 .

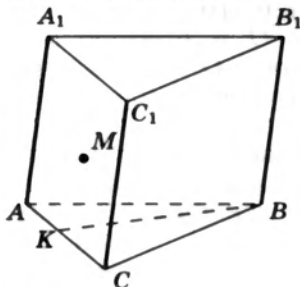


Рис. 36

2. $M \notin \alpha$. Где расположены все прямые, проходящие через точку M и параллельные плоскости α ?

С-5

1. Дан четырехугольник $ABCD$, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ и $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$, причем указанные отрезки расположены по одну сторону от плоскости ABC . Отрезки AC_1 , A_1C , B_1D и BD_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед.
2. В тетраэдре $DABC$ боковое ребро равно 3 см. Каждый из углов при основании в боковых гранях равен 75° . Точка A начинает двигаться по грани ADC , затем по грани CDB и наконец по грани ADB и возвращается в исходное положение. Какой наименьший путь проходит эта точка?

С-6

1. В тетраэдре $DABC$ AE — высота треугольника ABC , O — середина AE , $DO \perp AE$ и $DO \perp BC$, $K \in AC$, причем $AK : KC = 3 : 1$, $BC = a$, $DO = b$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку K и параллельной прямым BC и DO , и найдите площадь сечения.
2. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Точка P лежит в грани $AA_1 B_1 B$, точка R — в грани $AA_1 D_1 D$, $T \in C_1 D_1$, $M \in AA_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точку M и параллельна плоскости PRT (рис. 37).

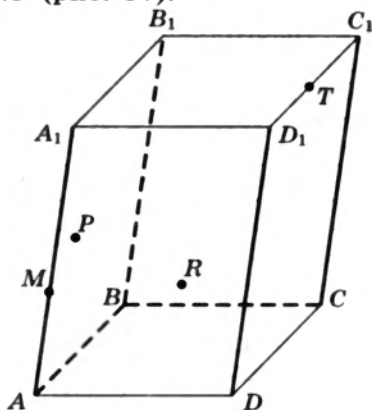


Рис. 37

С-7

1. $ABCD$ — параллелограмм. Из точек A , B , C и D на плоскость α опущены перпендикуляры AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 , $AA_1 = 13$, $BB_1 = 36$ и $CC_1 = 19$. Найдите DD_1 .
2. На данной прямой найдите точки, равноудаленные от двух данных точек.

С-8

1. Все грани параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — равные ромбы, углы между ребрами, имеющие общую точку A_1 , равны. Докажите, что $A_1 C \perp B_1 D_1$.
2. Все грани параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольники, M — внутренняя точка сечения $AA_1 C_1 C$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной BB_1 .

С-9

Дан квадрат $ABCD$ со стороной, равной 1, $MB \perp ABC$, $MB = 1$. Найдите расстояние между прямыми AC и MD .

С-10

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все грани — квадраты, E и F — середины ребер AD и AA_1 соответственно, K — точка пересечения диагоналей грани $DD_1 C_1 C$. Докажите, что $B_1 E \perp FK$.
2. В тетраэдре $DABC$ ABC — правильный треугольник со стороной, равной $2\sqrt{3}$, $DA = DB = DC$, $DO \perp ABC$, $DO = \sqrt{3}$. Найдите угол между AC и плоскостью BDC .

С-11

1. Равнобедренные треугольники ABC и ADC образуют острый двугранный угол (рис. 38). Прямая m , которая перпендикулярна ребру угла AC , пересекает одну из граней в точке X . Постройте точку пересечения этой прямой с другой гранью.

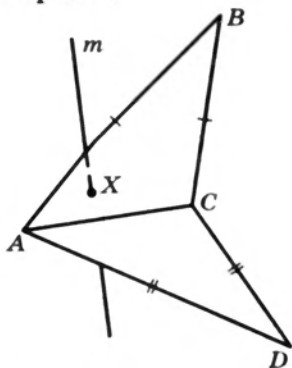


Рис. 38

2. $ABCD$ — квадрат со стороной, равной a , $BM \perp ABC$, $BM = a$. Найдите двугранный угол, образованный гранями AMD и CMD .

С-12

1. Катет и гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника лежат в разных гранях прямого двугранного угла. Вершина прямого угла треугольника удалена от ребра на расстояние, равное 2 см, а вершина острого угла — на расстояние, равное $\sqrt{15}$ см. Найдите площадь треугольника.
 2. Стороны основания и боковое ребро прямоугольного параллелепипеда равны 3, 4 и 14 см. Найдите площадь сечения, проведенного через середины двух смежных сторон основания и точку пересечения диагоналей параллелепипеда.
-

С-13

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны между собой. Найдите угол между диагоналями AC_1 и B_1C ее боковых граней.
 2. В правильной шестиугольной призме меньшая диагональ основания равна боковому ребру. Проведено сечение, которое перпендикулярно меньшей диагонали призмы и делит ее пополам. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна a .
-

С-14

Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит ромб $ABCD$. Угол между ребром AA_1 и диагональю B_1D равен 60° , а расстояние между ними равно 3 см. Расстояние между диагональю основания AC и диагональю B_1D равно 2 см. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

С-15

1. Основанием наклонного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит ромб $ABCD$, $AC = 40$, $BD = 30$, $AA_1 = 2\sqrt{17}$, $\angle A_1AD = \angle A_1AB < 90^\circ$. Высота параллелепипеда равна 2. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
2. Основанием наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), у которого $BC = a$. Вершина B_1 проектируется в точку C . Двугранный угол с ребром BB_1 равен φ , боковые ребра составляют с плоскостью основания угол α . Найдите площадь боковой поверхности призмы.

С-16

1. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ сторона основания равна a , а высота равна $2a$. Найдите угол между стороной основания AC и плоскостью грани CMB .
 2. В правильной шестиугольной пирамиде $PABCDEF$ сторона основания равна a , угол между гранями PBC и PAF равен α . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
-

С-17

1. Основанием треугольной пирамиды служит правильный треугольник со стороной, равной a . Боковые грани имеют разные площади. Высота пирамиды равна a . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
 2. Если высота треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот основания, то суммы квадратов скрещивающихся ребер пирамиды равны между собой. Докажите.
-

С-18

1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a , а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60° . Через вершину основания проведена плоскость, перпендикулярная противоположному боковому ребру. Найдите площадь сечения.
2. В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной, равной $\frac{20\sqrt{3}}{3}$. Одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а остальные две наклонены к нему под равными углами. Высота пирамиды равна 12. На одном из боковых ребер выбрана точка, которая делит его в отношении $2:3$, считая от вершины. Через эту точку проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите площадь боковой поверхности образовавшейся усеченной пирамиды.

С-19

1. Точка O — центр нижнего основания правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, $M \in AA_1$.
 - 1) Запишите векторы с началом и концом в вершинах призмы, которые: а) сонаправлены с вектором $\vec{OC}$; б) равны вектору $\vec{FD}$.
 - 2) От точки M отложите векторы, равные векторам $\vec{FD}$ и $\vec{OC}$.
 2. В тетраэдре $DABC$ F и E — точки пересечения медиан граней ADB и CDB соответственно, $M \in AB$, $N \in BC$, причем $AM : MB = CN : NB$.
 - 1) Докажите, что векторы $\vec{FE}$ и $\vec{MN}$ коллинеарны.
 - 2) Найдите $|\vec{FE}|$, если $AC = 18$ см.
-

С-20

1. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Представьте вектор $\vec{AA_1}$ как алгебраическую сумму векторов $\vec{DA_1}$, $\vec{DC_1}$ и $\vec{DB_1}$.
 2. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Укажите такую точку M , для которой верно равенство
$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} + \vec{MA_1} + \vec{MB_1} + \vec{MC_1} + \vec{MD_1} = \vec{0}.$$
-

С-21

1. В тетраэдре $DABC$ $\angle DAC = \angle DAB$. Грань DBC перпендикулярна плоскости ABC , DM — высота тетраэдра, $AC = a$, $AB = b$, $AD = c$. От точки A отложены единичные векторы $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$, сонаправленные соответственно с векторами $\vec{AC}$, $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$. Выразите вектор $\vec{DM}$ через векторы $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$.
2. Точка O находится вне плоскости трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания), AD в k раз больше BC . Выразите вектор $\vec{OD}$ через векторы $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ и $\vec{OC} = \vec{c}$.

С-22

1. Основанием пирамиды $PA BCD$ служит параллелограмм $ABCD$, $M \in BD$ и $N \in PC$, причем $MN \parallel AF$, где F — середина PB . Найдите отношение $\frac{MN}{AF}$.
2. Даны четыре точки A, B, C и D , причем $A \in BC$. Покажите, что если $\vec{OD} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$, причем $x + y + z = 1$ и O — произвольная точка пространства, то эти точки принадлежат одной плоскости.

С-23

- В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит ромб $ABCD$, $AC = 8$ см, $BD = 6$ см, $BB_1 = 6$ см.
1. Через сторону AD и точку P ($P \in BB_1$ и $PB = 2$ см) проведена плоскость. Найдите площадь боковой поверхности образовавшейся треугольной призмы.
 2. Через диагональ параллелепипеда $B_1 D$ параллельно диагонали AC основания проведена плоскость.
 - 1) Найдите площадь сечения.
 - 2) Найдите расстояние OK от точки пересечения диагоналей ромба $ABCD$ до плоскости сечения.
 - 3) Найдите расстояние между AA_1 и $B_1 D$.
 - 4) Разложите вектор $\vec{OK}$ по векторам $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ и $\vec{AA_1}$.
 - 5) Найдите угол между AD и плоскостью сечения.

С-1

1. Точка M лежит в плоскости BDC . Постройте точку пересечения прямой AM с плоскостью DBE (рис. 39).

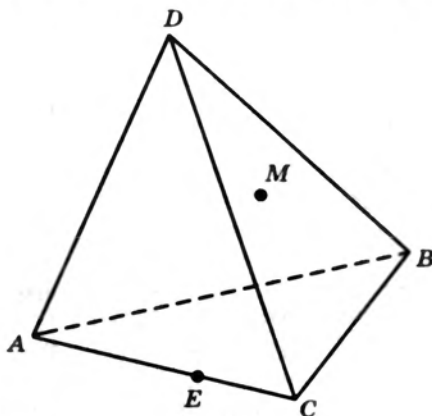


Рис. 39

2. Точка O — центр окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$. Точки A , O и C принадлежат плоскости α . Принадлежит ли этой плоскости вершина D ?

С-2

1. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые и точка M не принадлежит ни одной из них. Всегда ли существует прямая, проходящая через точку M и пересекающая обе данные прямые?
2. В плоскости α расположен треугольник ABC . Через его вершины проведены параллельные отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 , расположенные по одну сторону от плоскости α , $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Точки F , E и M — середины отрезков B_1C , AC_1 и A_1B соответственно. Докажите, что треугольники EMF и ABC подобны.

С-3

1. Параллельна ли плоскость AHC прямой, проходящей через точки M и M_1 пересечения медиан треугольников ABC и HAB (рис. 40)?

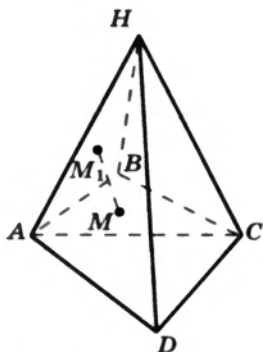


Рис. 40

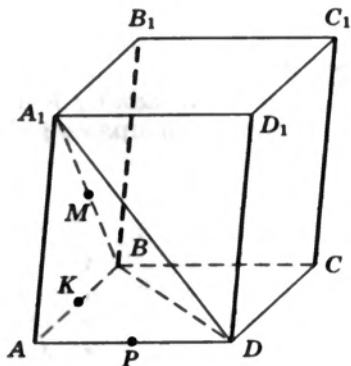


Рис. 41

2. На рисунке 41 $ABCD$ — параллелограмм, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ и $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, точки K , M и P — середины отрезков AB , A_1B_1 и AD , $AA_1 = 20$, $BD = 40$. Угол между прямыми CC_1 и BD — прямой.
 - 1) Постройте линии пересечения плоскости MKP с плоскостями AA_1B , BA_1D , AA_1D_1 и ABC .
 - 2) Найдите площадь четырехугольника, образованного построенными линиями пересечения.

С-4

1. Дано: $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ и $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$, точка M лежит в плоскости AA_1B_1 (рис. 42). Через точку M проведена плоскость, параллельная плоскости C_1CE . Постройте линию пересечения этой плоскости с плоскостью AA_1D_1 .
2. Дано $\alpha \parallel \beta$. Отрезки AB и CD пересекаются в точке M . Точки A и C лежат в плоскости α , а точки D и B — в плоскости β . Докажите, что $\frac{AM}{MB} = \frac{CM}{MD}$.

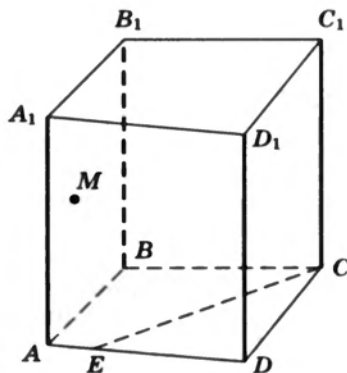


Рис. 42

С-5

1. Докажите, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проходит через точку пересечения медиан сечения BDA_1 .
2. В тетраэдре $DABC$ угол при основании боковых граней равен 70° . Точка A начинает двигаться по грани ADC , затем по грани CDB и наконец по грани ADB и возвращается в исходное положение. Наименьший путь, который проходит точка, равен $12\sqrt{3}$ см. Найдите длину бокового ребра.

С-6

1. В тетраэдре $DABC$ $AC = 12$, $DB = 9$, O — точка пересечения медиан треугольника ABC . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, которая проходит через точку O и параллельна прямым AC и DB . Найдите площадь сечения, если угол между прямыми AC и DB равен 60° .
2. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, $T \in A_1 B_1$, $M \in DD_1$. Точка K лежит в плоскости грани $DD_1 C_1 C$, а точка E — в плоскости грани $AA_1 D_1 D$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, которая параллельна плоскости TEK (рис. 43).

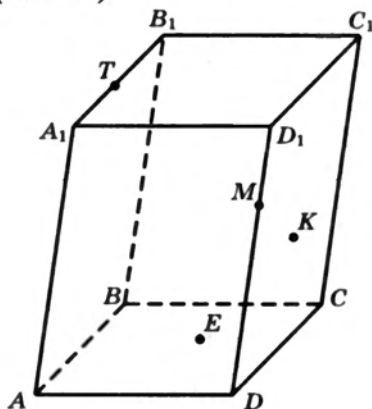


Рис. 43

С-7

1. Плоскость α параллельна наибольшей средней линии прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$ и $CC_1 \perp \alpha$, $C_1 B_1 = 11$ см, $C_1 A_1 = 12$ см и $A_1 B_1 = 19$ см. Найдите площадь треугольника.
2. На данной плоскости найдите точки, равноудаленные от двух данных точек.

С-8

1. В параллелепипеде $MPKHM_1P_1K_1H_1$ все грани — ромбы, $\angle M_1MH + \angle M_1MP = 180^\circ$. Докажите, что $P_1H \perp MK$.
2. Все грани параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольники, M — внутренняя точка сечения AA_1C_1C . Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной BC .

С-9

Отрезки AB и CD упираются своими концами в две параллельные плоскости α и β , причем точки A и C лежат в плоскости α , а точки B и D — в плоскости β , $AB \perp \alpha$. Найдите расстояние между AB и CD , если $AB = 20$, $CD = 25$, $AC = 14$ и $BD = 13$.

С-10

1. В параллелепипеде $ABCD A_1B_1C_1D_1$ все грани — прямоугольники, K — середина AA_1 , L — точка пересечения диагоналей грани DD_1C_1C , $E \in AD$, $AD = 4$, $CD = 2$, $AE = \frac{1}{2}$. Докажите, что $B_1E \perp KL$.
2. $ABCD$ — квадрат, O — точка пересечения его диагоналей, $MO \perp ABC$, F — середина AB . Сторона квадрата равна 4, $MO = 2\sqrt{3}$. Найдите угол между FD и плоскостью DMC .

С-11

1. В плоскостях α и β расположены равнобедренные трапеции $ABCD$ и $ADEF$ (рис. 44). Прямая a перпендикулярна ребру AD острого двугранного угла, образованного этими плоскостями. Прямая a пересекает плоскость β в точке X . Постройте точку ее пересечения с плоскостью α .
2. Все грани параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ — квадраты. Найдите величину двугранного угла, который образован сечениями AB_1C_1D и CB_1A_1D параллелепипеда.

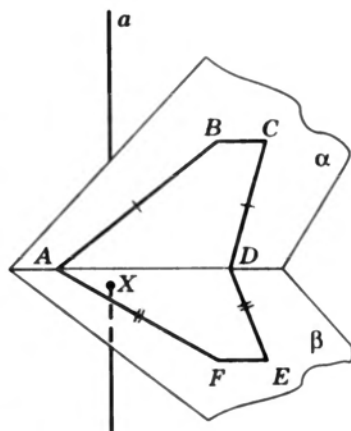


Рис. 44

С-12

1. Два равных квадрата $ABCD$ и $CEFK$ расположены в двух взаимно перпендикулярных плоскостях так, что их стороны CD и CE лежат на линии пересечения этих плоскостей по разным сторонам от общей вершины C . Найдите угол между прямыми DB и EK .
 2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AD = 4$, $CD = 3$ и $CC_1 = 14$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середины AD и DC и параллельной $B_1 D$. Найдите площадь сечения.
-

С-13

1. В прямой треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ основанием служит прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 4$, $BC = 3$, $BB_1 = 4$. Найдите угол между диагоналями AC_1 и $B_1 C$ двух боковых граней.
 2. Сторона основания правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ равна a , а боковое ребро равно $2a$. Через середину диагонали $F_1 C$ и перпендикулярно к ней проведено сечение. Найдите его площадь.
-

С-14

Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит ромб $ABCD$, $\angle BAD = 60^\circ$. Длина бокового ребра равна 4 см, а расстояние между AD и $D_1 C$ равно $\frac{12}{5}$ см. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

С-15

1. В наклонном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит параллелограмм $ABCD$, $AD = 15$, $BD = 7$, $\angle BDA = 60^\circ$, $\angle A_1 AD = \angle A_1 AB < 90^\circ$, $A_1 D$ составляет с плоскостью основания угол 45° . Вершина A_1 проектируется на BD . Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
2. Основанием наклонной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Вершина B_1 проектируется на середину BC . Боковое ребро равно l и составляет с плоскостью основания угол φ . Двугранный угол с ребром BB_1 равен α . Найдите площадь боковой поверхности призмы.

С-16

1. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ сторона основания равна a , а высота равна $a\sqrt{2}$. Найдите угол между боковым ребром MA и плоскостью DMC .
 2. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна a , угол между смежными боковыми гранями равен φ . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
-

С-17

1. В пирамиде $MABC$ основанием служит равнобедренный треугольник ABC , у которого $AB = AC$, $BC = 24$, а высота $AK = 5$. Высоты боковых граней, проведенные из вершины M , равны между собой. Высота пирамиды равна 12. Найдите площадь боковой поверхности, если известно, что $\angle MAB \neq \angle MAC$.
 2. Если одна из высот треугольной пирамиды проектируется в точку пересечения высот соответствующей грани, то и другая высота имеет такое же свойство. Докажите.
-

С-18

1. В основании пирамиды $MABCD$ лежит ромб с диагоналями $AC = 32$ см и $BD = 18$ см. Грани, проходящие через стороны AB и AD основания, перпендикулярны плоскости основания. Их общее ребро равно 24 см. Через точку A и середину ребра MC проведена плоскость, параллельная BD . Найдите площадь сечения.
2. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, катеты которого 32 и 10 см. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под равными углами. Высота пирамиды равна 12 см. На боковом ребре выбрана точка, которая делит его в отношении 1 : 3, считая от вершины. Через эту точку проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите площадь боковой поверхности образовавшейся усеченной пирамиды.

С-19

1. Точка O_1 — центр верхнего основания правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$.

1) Запишите векторы с началом и концом в вершинах призмы, которые: а) противоположно направлены вектору $\vec{O_1 F_1}$; б) имеют равные с вектором $\vec{FC}$ длины.

2) От точки A_1 отложите векторы, равные векторам $\vec{B_1 D}$ и $\vec{OE}$.

2. В пирамиде $PABCD$ основанием служит параллелограмм $ABCD$, P и T — точки пересечения медиан граней BPC и DPC , точки E и F — середины ребер AB и CD соответственно.

1) Докажите, что векторы $\vec{PT}$ и $\vec{FE}$ коллинеарны.

2) Найдите $|\vec{FE}|$, если $PT = 6$ см.

С-20

1. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Представьте вектор $\vec{DB}$ как алгебраическую сумму векторов $\vec{DA_1}$, $\vec{DB_1}$ и $\vec{DC_1}$.

2. $EABCDF$ — правильный октаэдр. Укажите такую точку K , что

$$\vec{KE} + \vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} + \vec{KD} + \vec{KF} = \vec{0}.$$

С-21

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\angle A_1 AD = \angle A_1 AB$, $AD = a$, $AB = b$ ($a > b$), $AA_1 = c$, $A_1 M$ — высота параллелепипеда, AM пересекает BC в точке P . Выразите вектор $\vec{A_1 P}$ через единичные векторы $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$, отложенные от вершины A и сонаправленные соответственно с векторами $\vec{AD}$, $\vec{AB}$ и $\vec{AA_1}$.

2. В треугольнике ABC точки E и F лежат на сторонах AB и BC , причем $\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FB} = \frac{3}{2}$. Точка O расположена вне плоскости треугольника ABC . Выразите вектор $\vec{OF}$ через векторы $\vec{OE} = \vec{m}$, $\vec{OA} = \vec{p}$ и $\vec{OC} = \vec{k}$.

С-22

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $M \in BD$ и $N \in B_1 C_1$, причем $MN \parallel AC_1$. Найдите отношения $\frac{BM}{MD}$ и $\frac{B_1 N}{N C_1}$.
2. Даны четыре точки A, B, C и D , причем $A \notin BC$. Докажите, что если эти точки принадлежат одной плоскости, то $\vec{OD} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$, причем $x + y + z = 1$ и O — произвольная точка пространства.

С-23

Основанием пирамиды $MABCD$ служит квадрат $ABCD$ со стороной, равной a . Грань MAB — правильный треугольник — перпендикулярна плоскости основания.

- 1) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
 - 2) Найдите площадь сечения, проведенного через середину ребра MD перпендикулярно плоскости основания и параллельно AB .
 - 3) Найдите угол между плоскостями AMB и DMC .
 - 4) Найдите угол между MD и плоскостью сечения.
 - 5) Пусть H — точка пересечения диагоналей сечения.
- Разложите вектор $\vec{AH}$ по векторам $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ и $\vec{AM}$.
- 6) Найдите расстояние между BC и MD .

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ НА ПОВТОРЕНИЕ ПЛАНИМЕТРИИ

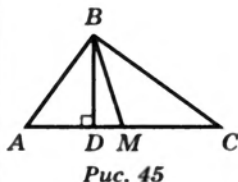
СП–1 Вариант 1

1. Дано:

$\triangle ABC$,
 $AB \perp BC$,
 $BD \perp AC$,
 $AM = MC$,
 $BD = 4$,
 $BM = 5$ (рис. 45).

Найти:

- 1) $S_{\triangle ABC}$
- 2) $\cos(\angle BMC)$.



СП–1 Вариант 2

1. Дано:

$\triangle ABC$,
 $AB \perp BC$,
 $BD \perp AC$,
 $AM = MC$,
 $BM = 25$,
 $DM = 5$ (рис. 45).

Найти:

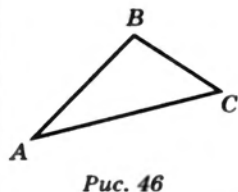
- 1) $S_{\triangle ABC}$
- 2) $\cos(\angle BMC)$.

2. Дано:

$\triangle ABC$,
 $AC = 30$,
 $AB = 28$,
 $BC = 26$ (рис. 46).

Найти:

- 1) $R_o \cdot r_{\triangle}$;
- 2) m_{AC} .



2. Дано:

$\triangle ABC$,
 $AC = 8$,
 $AB = 7$,
 $BC = 6$ (рис. 46).

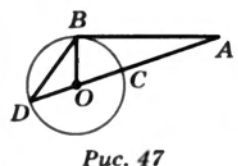
Найти:

- 1) $R_o \cdot r_{\triangle}$;
- 2) m_{AC} .

3. Дано:

AB — касательная
 к окружности,
 $AO = 85$,
 $BO = 36$ (рис. 47).

Найти AC .



3. Дано:

AB — касательная
 к окружности,
 $AB = 77$,
 $OB = 36$ (рис. 47).

Найти AC .

THE NORTH ATLANTIC TREATY ORGANIZATION

1949
 1949-1950

The North Atlantic Treaty Organization (NATO) was established on 4 April 1949 by the signing of the North Atlantic Treaty in Washington, D.C. The treaty was signed by twelve countries: Belgium, Canada, France, Greece, Iceland, Italy, Luxembourg, the Netherlands, Norway, Portugal, the United Kingdom, and the United States. The treaty's purpose was to provide a collective defense against the Soviet Union and its allies.

The North Atlantic Treaty Organization (NATO) was established on 4 April 1949 by the signing of the North Atlantic Treaty in Washington, D.C. The treaty was signed by twelve countries: Belgium, Canada, France, Greece, Iceland, Italy, Luxembourg, the Netherlands, Norway, Portugal, the United Kingdom, and the United States. The treaty's purpose was to provide a collective defense against the Soviet Union and its allies.

The North Atlantic Treaty Organization (NATO) was established on 4 April 1949 by the signing of the North Atlantic Treaty in Washington, D.C. The treaty was signed by twelve countries: Belgium, Canada, France, Greece, Iceland, Italy, Luxembourg, the Netherlands, Norway, Portugal, the United Kingdom, and the United States. The treaty's purpose was to provide a collective defense against the Soviet Union and its allies.

СП-1 Вариант 3

1. Дано:

$BC \parallel AD$,
 $AB = 13$,
 $BC = 6$,
 $CD = 20$,
 $AD = 27$
 (рис. 48).

Найти:

1) S_{ABCD} ;

2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\angle A}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\angle D}{2}\right)$.

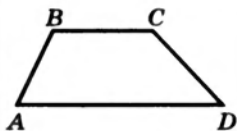


Рис. 48

СП-1 Вариант 4

1. Дано:

$BC \parallel AD$,
 $AB = 17$,
 $BC = 5$,
 $CD = 25$,
 $AD = 33$
 (рис. 48).

Найти:

1) S_{ABCD} ;

2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\angle A}{2}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\angle D}{2}\right)$.

2. Дано:

$ABCD$ —
 четырехугольник,
 $AC = BD$,
 P, M, K, N —
 середины сторон,
 $PK = 6$,
 $MN = 4$
 (рис. 49).

Найти S_{ABCD} .

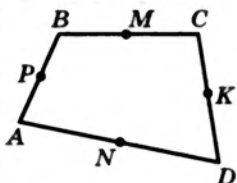


Рис. 49

2. Дано:

$ABCD$ —
 четырехугольник,
 $AC = BD = 13$,
 $PK = 5$,
 P, K —
 середины сторон
 (рис. 49).

Найти S_{ABCD} .

3. Дано:

AB, AC —
 касательные
 к окружности,
 $OB = 11$,
 $AB + AC = 120$
 (рис. 50).

Найти AD .

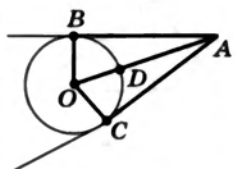


Рис. 50

3. Дано:

AB, AC —
 касательные
 к окружности,
 $OA = 61$,
 $AB + AC = 120$
 (рис. 50).

Найти AD .

1. Дано:

$BC = 12$
 $AD = 18$
 $AC = 10$
 $BD = 14$
 $AB = 10$
 $CD = 14$

Найти:

1) EF
 2) EF

$$EF = \frac{AD + BC}{2} = \frac{18 + 12}{2} = 15$$



Рис. 48

2. Дано:

$ABCD$ —
 четырехугольник,
 $AC = BD$,
 P, M, K, N —
 середины сторон,
 $PK = 8$,
 $MN = 8$
 (рис. 49)

Найти AC



Рис. 49

3. Дано:

$AB = 10$
 $AC = 12$
 $BC = 14$
 $AD = 10$
 $BD = 12$
 $CD = 14$
 (рис. 50)

Найти AD



Рис. 50

1. Дано:

$BC = 12$
 $AD = 18$
 $AC = 10$
 $BD = 14$
 $AB = 10$
 $CD = 14$

Найти:

1) EF
 2) EF

$$EF = \frac{AD + BC}{2} = \frac{18 + 12}{2} = 15$$

2. Дано:

$ABCD$ —
 четырехугольник,
 $AC = BD$,
 P, M, K, N —
 середины сторон,
 $PK = 8$,
 $MN = 8$
 (рис. 49)

Найти AC

3. Дано:

$AB = 10$
 $AC = 12$
 $BC = 14$
 $AD = 10$
 $BD = 12$
 $CD = 14$
 (рис. 50)

Найти AD

СП-1 Вариант 5

1. Дано:

$$\begin{aligned} \triangle ABC, \\ h_{BC} = 20, \\ h_{AC} = 12, \\ h_{AB} = 15. \end{aligned}$$

Найти $S_{\triangle ABC}$.

2. Дано:

$$\begin{aligned} ABCD — \\ \text{трапеция,} \\ S_{\triangle KBC} = n^2, \\ S_{\triangle AKD} = m^2, \\ m + n = 10 \\ (\text{рис. 51}). \end{aligned}$$

Найти S_{ABCD} .

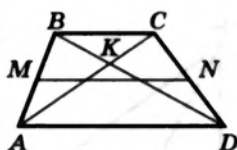


Рис. 51

3. Дано:

$$\begin{aligned} AB \perp BC, \\ BD \perp AC, \\ KB = 18, \\ BP = 12 \\ (\text{рис. 52}). \end{aligned}$$

Найти:

- 1) AB ;
- 2) BC .

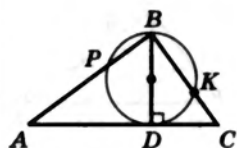


Рис. 52

СП-1 Вариант 6

1. Дано:

$$\begin{aligned} \triangle ABC, \\ h_{BC} = 60, \\ h_{AC} = 21, \\ h_{AB} = 28. \end{aligned}$$

Найти $S_{\triangle ABC}$.

2. Дано:

$$\begin{aligned} ABCD — \text{трапеция,} \\ \text{описанная около} \\ \text{окружности,} \\ MN — \\ \text{средняя линия,} \\ MN = 5, \\ \frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = \frac{7}{13} \\ (\text{рис. 51}). \end{aligned}$$

Найти h_{ABCD} .

3. Дано:

$$\begin{aligned} AB \perp BC, \\ BD \perp AC, \\ KB = 12, \\ BP = 8 \\ (\text{рис. 52}). \end{aligned}$$

Найти:

- 1) AB ;
- 2) BC .

СП-1 Вариант 7

1. Дано:

$ABCD$ — трапеция,
описанная около
окружности,
 $AB = CD$,
 $BC = 3\sqrt{15}$,
 $AD = 5\sqrt{15}$
(рис. 53).

Найти S_{ABCD} .

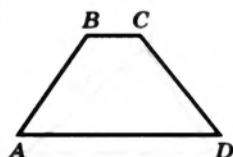


Рис. 53

2. Дано:

$\triangle ABC$,
 $\angle ABD = \angle CBD$,
 $AB = 35$,
 $BC = 14$,
 $BD = 12$
(рис. 54).

Найти $S_{\triangle ABC}$.

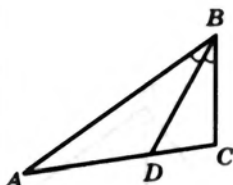


Рис. 54

3. Дано:

$\triangle ABC$,
 $AB \perp BC$.
 O_1, O_2 — центры
полуокружностей,
 $AT = 80$,
 $BC = 75$
(рис. 55).

Найти:

- 1) AP ;
- 2) CK .

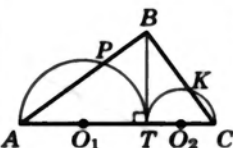


Рис. 55

СП-1 Вариант 8

1. Дано:

$ABCD$ — трапеция,
описанная около
окружности,
 $AB = CD$,
 $BC = 8$,
 $AD = 18$
(рис. 53).

Найти $S_{\triangle ABC}$.

2. Дано:

$\triangle ABC$,
 $\angle ABD = \angle CBD$,
 $AB = 22$,
 $BC = 10$,
 $S_{\triangle ABC} = 105,6$
(рис. 54).

Найти BD .

3. Дано:

$\triangle ABC$,
 $AB \perp BC$.
 O_1, O_2 — центры
полуокружностей,
 $TC = 45$,
 $AB = 100$
(рис. 55).

Найти:

- 1) AP ;
- 2) CK .

1. Дано:

$ABCD$ — трапеция,
основания AD и BC параллельны.
 $AB = CD$,
 $BC = 3\sqrt{15}$,
 $AD = 5\sqrt{15}$.
(рис. 23)



Рис. 23

1. Дано:

$ABCD$ — трапеция,
основания AD и BC параллельны.
 $AB = CD$,
 $BC = 3$,
 $AD = 5$.
(рис. 24)

Найти $\angle A$.

Найти $\angle A$.

2. Дано:

$\triangle ABC$,
 $\angle ABD = \angle CBD$,
 $AB = 30$,
 $BC = 14$,
 $BD = 12$.
(рис. 24)



Рис. 24

2. Дано:

$\triangle ABC$,
 $\angle ABD = \angle CBD$,
 $AB = 30$,
 $BC = 14$,
 $BD = 12$.
(рис. 24)

Найти $\angle A$.

Найти $\angle A$.

3. Дано:

$\triangle ABC$,
 $AB = AC$,
 $\angle A = 120^\circ$,
 $BC = 12$.
(рис. 25)



Рис. 25

3. Дано:

$\triangle ABC$,
 $AB = AC$,
 $\angle A = 120^\circ$,
 $BC = 12$.
(рис. 25)

Найти $\angle B$.

Найти $\angle B$.

1. Дано:

1. Дано:

СП-2 Вариант 1

1. Дано:

$\triangle ABC$,
 $AB = AC = 9$,
 $BC = 6$,
 $AM = 6$
 (рис. 56).

Найти:

- 1) BM ;
- 2) $S_{\triangle AMB}$;
- 3) m_{AB} .

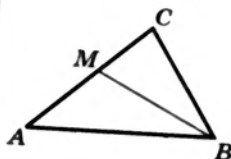


Рис. 56

СП-2 Вариант 2

1. Дано:

$\triangle ABC$,
 $AB = AC = 16$,
 $BC = 8$,
 $AM = 4$
 (рис. 56).

Найти:

- 1) BM ;
- 2) $S_{\triangle AMB}$;
- 3) m_{AB} .

2. Дано:

$\triangle ABC$,
 $AB \perp BC$,
 $BH \perp AC$,
 $AH = 6$,
 $BC = 12$
 (рис. 57).

Найти:

- 1) AB ;
- 2) l_{AC} .

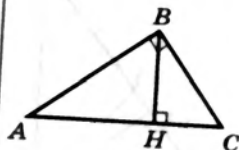


Рис. 57

2. Дано:

$\triangle ABC$,
 $AB \perp BC$,
 $BH \perp AC$,
 $AH = 28$,
 $BC = 7\sqrt{5}$
 (рис. 57).

Найти:

- 1) AB ;
- 2) l_{AC} .

3. Дано:

окружность,
 BM, DM —
 секущие,
 $BM = 10$,
 $MD = 15$,
 $CD = MA$
 (рис. 58).

Найти CD .

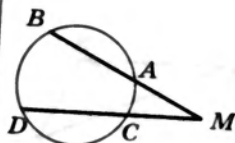


Рис. 58

3. Дано:

окружность,
 BM, DM —
 секущие,
 $AM = 20$,
 $CD = 11$,
 $AB = MC$
 (рис. 58).

Найти AB .

1. Дано:

$\triangle ABC$

$AB = AC = 10$

$BC = 8$

$AM = 4$

(рис. 28)

Найти:

1) BM ;

2) $\angle AMB$;

3) $\angle AMB$.



1. Дано:

$\triangle ABC$

$AB = AC = 9$

$BC = 8$

$AM = 6$

(рис. 29)

Найти:

1) BM ;

2) $\angle AMB$;

3) $\angle AMB$.

2. Дано:

$\triangle ABC$

$AB \perp BC$

$BC \perp AC$

$AB = 3$

$BC = 4$

(рис. 31)

Найти:

1) AB ;

2) AC .



2. Дано:

$\triangle ABC$

$AB \perp BC$

$BC \perp AC$

$AB = 3$

$BC = 4$

(рис. 32)

Найти:

1) AB ;

2) AC .

3. Дано:

$AB \perp BC$

$BC \perp AC$

$AB = 3$

$BC = 4$

$AM = 1$

$AN = 2$

(рис. 33)

Найти:

3. Дано:

$AB \perp BC$

$BC \perp AC$

$AB = 3$

$BC = 4$

$AM = 1$

$AN = 2$

(рис. 34)

Найти:

СП–2 Вариант 3

1. Дано:

$\triangle ABC$,
 $A(-3; 2)$,
 $B(4; -1)$,
 $C(1; 5)$.

Найти:

- 1) m_{AC} ;
- 2) $S_{\triangle ABC}$;
- 3) $\operatorname{tg}(\angle ABC)$.

2. Дано:

$\triangle ABC$,
 $AC \perp BC$,
 $CC_1 \perp AB$,
 $CC_1 = 4\sqrt{2}$,
 $\angle BCC_2 = \angle ACC_2$,
 $CC_2 = 5\sqrt{2}$
 (рис 59).

Найти:

- 1) m_{CB} ;
- 2) AC ;
- 3) BC .

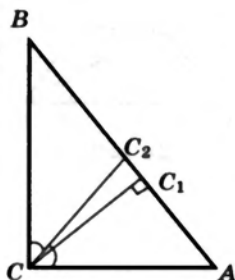


Рис. 59

3. Дано:

AB — касательная,
 $AB + AC = 30$,
 $AB - CD = 2$
 (рис. 60).

Найти:

- 1) AB ;
- 2) AC .

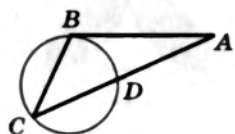


Рис. 60

СП–2 Вариант 4

1. Дано:

$\triangle ABC$,
 $A(2; -3)$,
 $B(-1; 4)$,
 $C(5; 1)$.

Найти:

- 1) m_{BC} ;
- 2) $S_{\triangle ABC}$;
- 3) $\operatorname{tg}(\angle ABC)$.

2. Дано:

$\triangle ABC$,
 $AC \perp BC$,
 $\angle ACC_2 = \angle BCC_2$,
 $CC_1 \perp AB$,
 $CC_1 = 3\sqrt{2}$,
 $CC_2 = 5\sqrt{2}$
 (рис 59).

Найти:

- 1) m_{AB} ;
- 2) AC ;
- 3) BC .

3. Дано:

AB — касательная,
 $CD + AB = 20$,
 $AB - CD = 8$
 (рис. 60).

Найти:

- 1) AB ;
- 2) AC .

СП–2 Вариант 5

1. Дано:

$\triangle ABC$,
 $\angle ABD = \angle CBD$,
 $AB = 21$,
 $BD = 8\sqrt{7}$,
 $DC = 8$
 (рис. 61).

Найти $S_{\triangle ABC}$.

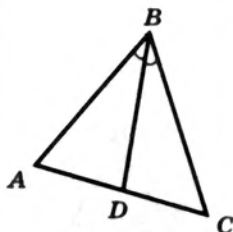


Рис. 61

СП–2 Вариант 6

1. Дано:

$\triangle ABC$,
 $\angle ABD = \angle CBD$,
 $AB = 21$,
 $DC = 8$,
 $AD + DC = 31$
 (рис. 61).

Найти BD .

2. Дано:

$BC \parallel AD$,
 $\angle BAC = \alpha$,
 $\angle CAD = \alpha$,
 $AB = a$,
 $AB \perp CD$
 (рис. 62).

Найти S_{ABCD} .

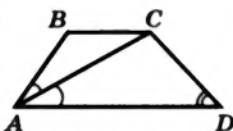


Рис. 62

2. Дано:

$BC \parallel AD$,
 $\angle BAD = 2(\angle ADC)$,
 $\angle BAC = \angle CAD = \alpha$,
 $BC = a$
 (рис. 62).

Найти S_{ABCD} .

3. Дано:

$ABCD$ —
 квадрат,
 вписанный
 в окружность,
 $S_{\text{сегмента}} = 2\pi - 4$
 (рис. 63).

Найти:

- 1) S_{ABCD} ;
- 2) $S_{\text{ровочки}}$.

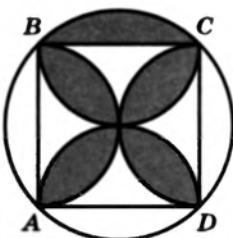


Рис. 63

3. Дано:

$ABCD$ —
 квадрат,
 вписанный
 в окружность,
 $S_{\text{ровочки}} = 2\pi - 4$
 (рис. 63).

Найти:

- 1) S_{ABCD} ;
- 2) $S_{\text{сегмента}}$.

1. Дано:

$\angle ABC = 90^\circ$
 $\angle ADB = 90^\circ$
 $AB = 2$
 $BD = 2$
 $DC = 2$
 (рис. 81)

Найти: AC



рис. 81

2. Дано:

$BC \parallel AD$
 $\angle BAC = 90^\circ$
 $\angle CAD = 60^\circ$
 $AD = 4$
 $AB \perp CD$
 (рис. 82)

Найти: BD



рис. 82

3. Дано:

$\angle ACD = 90^\circ$
 $\angle ADB = 90^\circ$
 $AB \parallel CD$
 $AD = 2$
 $BC = 2$
 (рис. 83)

Найти: AC



рис. 83

1. Дано:

$\angle ABC = 90^\circ$
 $\angle ADB = 90^\circ$
 $AB = 2$
 $BD = 2$
 $DC = 2$
 (рис. 81)

Найти: AC

2. Дано:

$BC \parallel AD$
 $\angle BAC = 90^\circ$
 $\angle CAD = 60^\circ$
 $AD = 4$
 $AB \perp CD$
 (рис. 82)

Найти: BD

3. Дано:

$\angle ACD = 90^\circ$
 $\angle ADB = 90^\circ$
 $AB \parallel CD$
 $AD = 2$
 $BC = 2$
 (рис. 83)

Найти: AC

СП-2 Вариант 7

1. Дано:

$\triangle ABC$,
 $AB = BC$,
 $AC = a$,
 $\angle BAK = \angle CAK$,
 $MK \parallel AC$,
 $\angle A = \alpha$,
 $PT \parallel AC$,
 $O \in PT$
 (рис. 64).

Найти:

- 1) $R_{\text{оп. } \triangle ABK}$;
- 2) $S_{\triangle ABK}$;
- 3) $r_{\text{вп. } \triangle ABK}$;
- 4) PT .

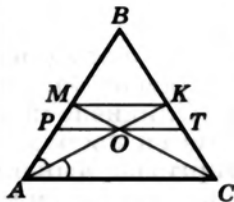


Рис. 64

СП-2 Вариант 8

1. Дано:

$\triangle ABC$,
 $AB = BC$,
 $MK = a$,
 $MK \parallel AC$,
 $\angle BAK = \angle CAK$,
 $\angle A = \alpha$,
 $PT \parallel AC$,
 $O \in PT$
 (рис. 64).

Найти:

- 1) $R_{\text{оп. } \triangle ABK}$;
- 2) $S_{\triangle ABK}$;
- 3) $r_{\text{вп. } \triangle ABK}$;
- 4) PT .

2. Дано:

окружность
 с центром O ,
 $\triangle ABC$ —
 правильный,
 $S_{\text{сегмента}} = 4\pi\sqrt{3} - 9$
 (рис. 65).

Найти:

- 1) $S_{\triangle ABC}$;
- 2) $S_{\text{кр. } O_1}$

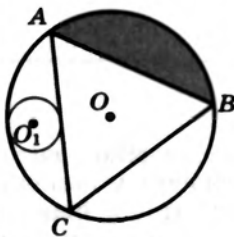


Рис. 65

2. Дано:

окружность
 с центром O ,
 $\triangle ABC$ —
 правильный,
 $S_{\text{кр. } O_1} = \frac{3}{4}\pi\sqrt{3}$
 (рис. 65).

Найти:

- 1) $S_{\triangle ABC}$;
- 2) $S_{\text{сегмента}}$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

ДС-1

Вариант 1

1. Три точки проектируются на плоскость. Сколько при этом может получиться точек на плоскости проекции?
 2. Изобразите ромб с перпендикулярами, опущенными из середины одной из сторон на его диагонали.
 3. Изобразите правильный шестиугольник с перпендикуляром, опущенным из его центра на одну из его сторон.
-

ДС-1

Вариант 2

1. Что представляют собой проекции двух параллельных прямых на плоскости?
 2. Изобразите равнобедренный треугольник с перпендикуляром, опущенным из середины боковой стороны на основание.
 3. Изобразите правильный шестиугольник с перпендикуляром, опущенным из его центра на меньшую диагональ.
-

ДС-1

Вариант 3

1. Перечислите свойства прямоугольника, которые сохраняются при параллельном проектировании.
 2. Изобразите правильный шестиугольник с биссектрисой одного из его внешних углов.
 3. Катеты AC и BC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) относятся как $2 : 3$. Изобразите треугольник с высотой, опущенной из вершины прямого угла.
-

ДС-1

Вариант 4

1. Перечислите свойства ромба, которые сохраняются при параллельном проектировании.
2. Изобразите ромб с углом 60° и перпендикуляром, опущенным из точки пересечения диагоналей на сторону.
3. Изобразите равнобедренный треугольник ABC , у которого $AB = BC = 4$ и $AC = 5$, с центром вписанной в треугольник окружности.

ДС—1**Вариант 5**

1. Что представляют собой проекции двух скрещивающихся прямых на плоскости?
 2. Изобразите квадрат $ABCD$ с перпендикуляром, опущенным из вершины C на отрезок BE , где E — середина AD .
 3. Изобразите равнобедренную трапецию $ABCD$ (AD и BC — основания) с углом при основании 45° и с центром описанной около нее окружности.
-

ДС—1**Вариант 6**

1. Проекции двух прямых на плоскости параллельны. Каково взаимное расположение самих прямых?
 2. Дано изображение некоторого треугольника и центра его описанной окружности, расположенного внутри треугольника. Постройте изображения высот этого треугольника.
 3. Изобразите равнобедренный прямоугольный треугольник с квадратом, построенным на его гипотенузе (квадрат расположен вне треугольника).
-

ДС—2**Вариант 1**

1. Существует ли трехгранный угол с плоскими углами:
а) 90° , 20° , 120° ; б) 40° , 30° , 70° ?
 2. В трехгранном угле $OABC$ каждый из плоских углов равен 60° . Какой угол с плоскостью BOC составляет ребро OA ?
 3. Плоские углы трехгранного угла равны 45° , 60° и 90° . Найдите двугранный угол, лежащий против плоского угла 60° .
-

ДС—2**Вариант 2**

1. Существует ли трехгранный угол с плоскими углами:
а) 100° , 150° , 110° ; б) 60° , 90° , 120° ?
2. В трехгранном угле $OABC$ $\angle AOC = \angle AOB$, $\angle BOC = 90^\circ$. Ребро OA составляет с плоскостью противоположащего плоского угла угол 45° . Найдите равные плоские углы.
3. В трехгранном угле плоские углы равны 120° , 120° и 90° . Найдите двугранный угол, лежащий против меньшего плоского угла.

ДС—2**Вариант 3**

1. В трехгранном угле два плоских угла равны 110° и 100° . В каких границах может находиться третий плоский угол?
 2. В пирамиде $DABC$ $\angle DAC = \angle DAB = 30^\circ$. Двугранный угол при ребре AD равен 90° , $DC \perp AC$ и $DB \perp AB$, $DC = DB = 20$. Найдите площадь грани BDC .
 3. Плоские углы трехгранного угла равны 60° , 60° и 90° . Если сечение этого угла плоскостью, перпендикулярной грани с наибольшим плоским углом, имеет форму равнобедренного треугольника (основание треугольника лежит в плоскости прямого угла), то секущая плоскость отсекает на ребрах трехгранного угла равные отрезки. Докажите.
-

ДС—2**Вариант 4**

1. В каких границах могут изменяться плоские углы при стороне основания правильной пятиугольной пирамиды?
 2. В пирамиде $DABC$ $\angle DAC = \angle DAB = 60^\circ$. Двугранный угол при ребре AD равен 120° , $DC \perp AC$, $DB \perp AB$, $BC = \sqrt{39}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BDC .
 3. Плоские углы трехгранного угла равны 60° , 60° и 90° . Докажите, что плоскость, отсекающая от ребер три равных отрезка, перпендикулярна плоскости прямого угла.
-

ДС—2**Вариант 5**

1. Докажите, что в трехгранном угле против равных плоских углов лежат равные двугранные углы.
2. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $\angle A_1AC = 45^\circ$, $\angle A_1AB = 60^\circ$, $\angle BAC = 90^\circ$, $AC = \sqrt{6}$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AA_1 = 5$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
3. Основанием пирамиды $MABCD$ служит квадрат со стороной a . Грань MAB — правильный треугольник, плоскость которого перпендикулярна плоскости основания. Найдите двугранный угол при ребре MD .

ДС-2

Вариант 6

1. Покажите, что в трехгранном угле против равных двугранных углов лежат равные плоские углы.
2. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен 120° , а высота боковой грани равна m . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
3. Основанием пирамиды $MABCD$ служит квадрат со стороной a . Ребро MB равно a и перпендикулярно плоскости основания. Найдите величину двугранного угла с ребром MD .

К-1

Вариант 1

1. Точки A, C, M и P лежат в плоскости α , а точка $B \notin \alpha$ (рис. 66). Постройте точку пересечения прямой MP с плоскостью ABC . Поясните.

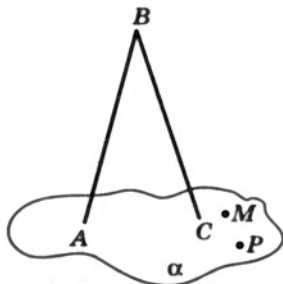


Рис. 66

2. Треугольники ABC и ADC лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону AC . Точка E лежит на стороне AB , а точка F — на стороне BC , причем EF параллельна плоскости ADC , точка P — середина AD , а точка K — середина DC .
 - 1) Докажите, что $EF \parallel PK$.
 - 2) Каково взаимное расположение прямых PK и AB ? Чему равен угол между этими прямыми, если $\angle ABC = 40^\circ$ и $\angle BCA = 80^\circ$?
3. Плоскости α и β пересекаются по прямой m . Прямая a лежит в плоскости α . Каково возможное взаимное расположение прямой a и плоскости β ? Сделайте рисунок и поясните.
- 4*. Используя рисунок 67, постройте линию пересечения плоскости EFM с плоскостью α . Поясните.

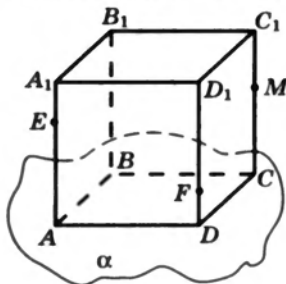


Рис. 67

1. Точки A и B лежат в плоскости α , а точка C — в плоскости β (рис. 68). Постройте линии пересечения плоскости ABC с плоскостями α и β . Поясните.

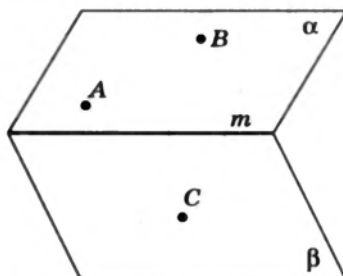


Рис. 68

2. Треугольники ABC и DCE лежат в разных плоскостях и имеют общую вершину C , $AB \parallel DE$.
- 1) Постройте линию пересечения плоскостей ABC и DCE . Поясните.
 - 2) Каково взаимное расположение прямых AB и DF , где точка F лежит на стороне CE ? Чему равен угол между этими прямыми, если $\angle FED = 60^\circ$ и $\angle DFE = 100^\circ$? Поясните.
3. Прямая a параллельна плоскости α , точка M и прямая c лежат в плоскости α ($M \notin c$). Через точку M проведена прямая b , параллельная a . Каково взаимное расположение прямых b и c ? Поясните.
- 4*. Плоскости α и β пересекаются по прямой m (рис. 69). Прямая AB лежит в плоскости α , а CD — в плоскости β . Что нужно изменить в условии, чтобы прямые EF и MK были параллельными? Поясните.

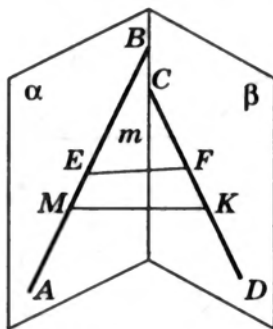


Рис. 69

1. Точки A , C , E и F лежат в плоскости α , а точка $B \notin \alpha$ (рис. 70). Постройте точку пересечения прямой EF с плоскостью ABC . Поясните.

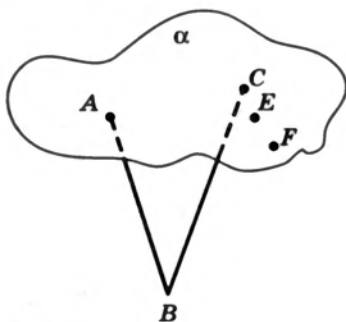


Рис. 70

2. Трапеция $ABCD$ (AD и BC — основания) и треугольник AED имеют общую сторону AD и лежат в разных плоскостях. Точка M лежит на стороне AE , а точка P — на стороне DE , причем MP параллельна плоскости трапеции.
 - 1) Докажите, что $MP \parallel BC$.
 - 2) Каково взаимное расположение прямых MP и AB ? Чему равен угол между этими прямыми, если $\angle ABC = 110^\circ$? Поясните.
3. Плоскости α и β пересекаются по прямой m . Прямая a лежит в плоскости α , а b — в плоскости β . Каково возможное взаимное расположение прямых a и b ? Сделайте рисунок и поясните.
- 4*. Используя рисунок 71, постройте линию пересечения плоскости MPK с плоскостью α . Поясните.

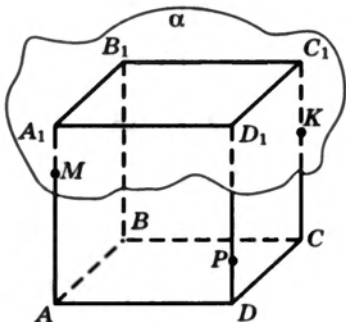


Рис. 71

1. Точка N лежит на отрезке AC треугольника ABC . Известно, что $AN = 2$, $NC = 3$, $BN = 4$. Найдите AB .



2. Точка N лежит на отрезке AC треугольника ABC . Известно, что $AN = 2$, $NC = 3$, $BN = 4$. Найдите AB .
3. Точка N лежит на отрезке AC треугольника ABC . Известно, что $AN = 2$, $NC = 3$, $BN = 4$. Найдите AB .
4. Точка N лежит на отрезке AC треугольника ABC . Известно, что $AN = 2$, $NC = 3$, $BN = 4$. Найдите AB .



1. Точки E и F лежат в плоскости β , а точка M — в плоскости α (рис. 72). Постройте линии пересечения плоскости EMF с плоскостями α и β . Поясните.

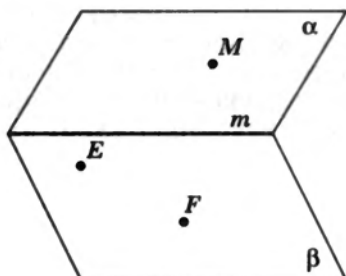


Рис. 72

2. Основание AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α . Через точки B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках E и F соответственно.
- 1) Докажите, что $BCFE$ — параллелограмм.
 - 2) Каково взаимное расположение прямых EF и AB ? Чему равен угол между ними, если $\angle ABC = 150^\circ$? Поясните.
3. Отрезок AB параллелен плоскости α , а отрезок CD лежит в этой плоскости, причем $AB = CD$. Можно ли утверждать, что четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм? Поясните.
- 4*. Плоскости α и β пересекаются по прямой m (рис. 73). Прямая AB лежит в плоскости α , а CD — в плоскости β . Что нужно изменить в условии, чтобы прямые AC и BD пересекались? В каком случае это возможно?

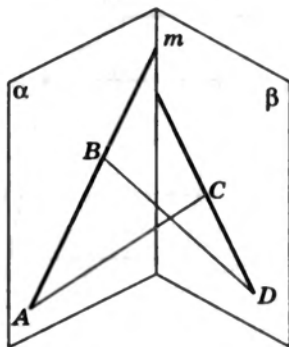


Рис. 73

Прямая AB делит $\triangle ABC$ на две части. Докажите, что AB — медиана $\triangle ABC$, если $AB^2 = AC \cdot BC$.



2. Основание AB трапеции $ABCD$ делит AD на AM и MD . Докажите, что AB — медиана $\triangle ABC$, если $AB^2 = AC \cdot BC$.

3. Основание AB трапеции $ABCD$ делит AD на AM и MD . Докажите, что AB — медиана $\triangle ABC$, если $AB^2 = AC \cdot BC$.

4. Основание AB трапеции $ABCD$ делит AD на AM и MD . Докажите, что AB — медиана $\triangle ABC$, если $AB^2 = AC \cdot BC$.

5. Основание AB трапеции $ABCD$ делит AD на AM и MD . Докажите, что AB — медиана $\triangle ABC$, если $AB^2 = AC \cdot BC$.



1. Параллелограммы $ABCD$ и $ADFE$ лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону AD . Прямая m , параллельная BC , пересекает плоскости ABE и DCF соответственно в точках H и P . Докажите, что $HPFE$ — параллелограмм.
2. Плоскости α и β параллельны, $a \parallel a_1$ (рис. 74). Прямая a пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B , а прямая a_1 пересекает плоскость α в точке A_1 . Постройте точку пересечения a_1 с плоскостью β . Поясните.

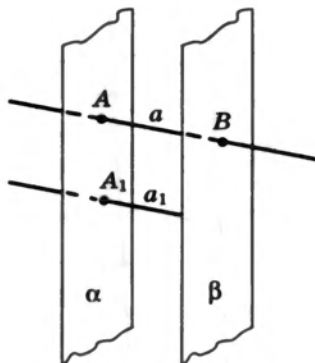


Рис. 74

3. В тетраэдре $DABC$ $\angle DBA = \angle DBC = 90^\circ$, $DB = 6$, $AB = BC = 8$, $AC = 12$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через середину DB и параллельной плоскости ADC . Найдите площадь сечения.
- 4*. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки E и F параллельно прямой a (рис. 75).

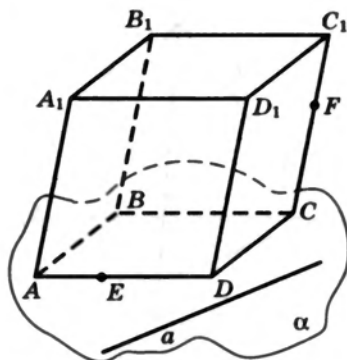


Рис. 75

1. Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Тогда $\angle C = 180^\circ - \alpha - \beta$.
 По теореме синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.
 По теореме косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.
 По теореме синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.
 По теореме косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.
 По теореме синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.
 По теореме косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.



2. Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Тогда $\angle C = 180^\circ - \alpha - \beta$.
 По теореме синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.
 По теореме косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.
 По теореме синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.
 По теореме косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.
 По теореме синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.
 По теореме косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.



1. Вне плоскости α расположен треугольник ABC , у которого медианы AA_1 и BB_1 параллельны плоскости α . Через вершины B и C треугольника проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α соответственно в точках E и F . Докажите, что $ECBF$ — параллелограмм.
2. Плоскости α и β параллельны (рис. 76). Прямая a пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B , а прямая b — в точках C и D . Найдите взаимное расположение прямых a и b . Поясните.

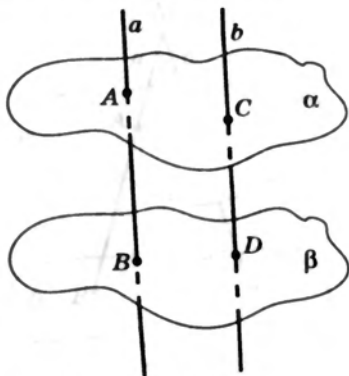


Рис. 76

3. Все грани параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — квадраты со стороной a . Через середину ребра AD параллельно плоскости $DA_1 B_1$ проведена плоскость. Найдите периметр сечения.
- 4*. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки C и K параллельно прямой a (рис. 77).

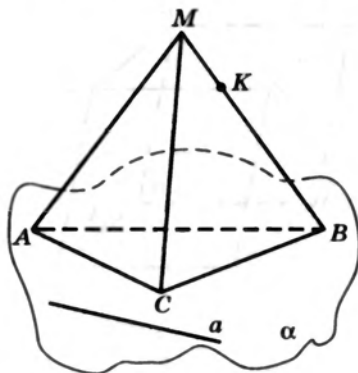


Рис. 77

1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. В AB_1 отмечена точка M , в BC_1 — точка N . Прямые AM и BN продолжены до пересечения в точке P . Найти AP .

2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. В AB_1 отмечена точка M , в BC_1 — точка N . Прямые AM и BN продолжены до пересечения в точке P . Найти AP .



3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. В AB_1 отмечена точка M , в BC_1 — точка N . Прямые AM и BN продолжены до пересечения в точке P . Найти AP .

4. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. В AB_1 отмечена точка M , в BC_1 — точка N . Прямые AM и BN продолжены до пересечения в точке P . Найти AP .



1. Прямоугольники $ABCD$ и $EBCF$ лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону BC . Прямая a параллельна AD и пересекает плоскости ABE и DCF соответственно в точках P и H . Докажите, что $PBCH$ — параллелограмм.
2. Плоскости α и β параллельны (рис. 78). Прямые a и b пересекаются в точке M . Прямая a пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B , а прямая b пересекает плоскость β в точке D . Постройте точку пересечения прямой b с плоскостью α .

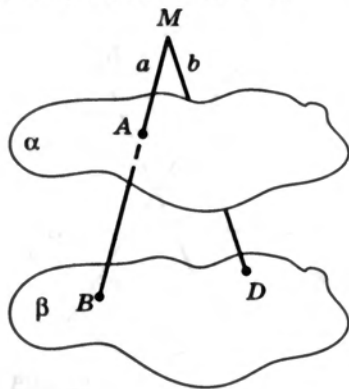


Рис. 78

3. В тетраэдре $DABC$ точка M — середина AC , $DB = 6$, $MD = 10$, $\angle DBM = 90^\circ$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через середину ребра DC параллельно плоскости DMB , и найдите площадь сечения.
- 4*. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки E и P параллельно прямой a (рис. 79).

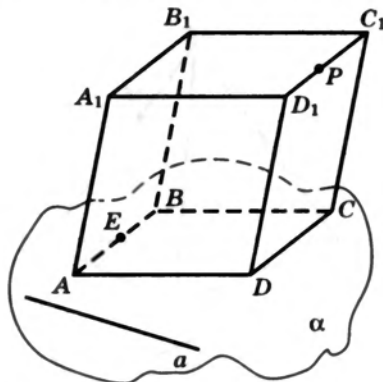


Рис. 79

1. Трапеция $ABCD$ (AD и BC — основания) расположена вне плоскости α . Диагонали трапеции параллельны плоскости α . Через вершины A и B проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α соответственно в точках E и F . Докажите, что $EABF$ — параллелограмм.
2. Плоскости α и β параллельны (рис. 80). Прямая a пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B , а прямая b — в точках C и D . Каково взаимное расположение прямых a и b ? Поясните.

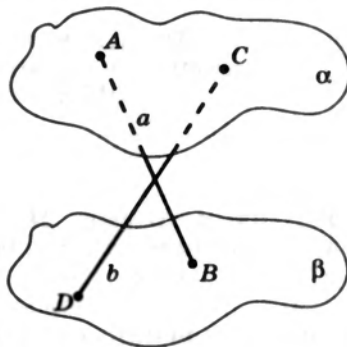


Рис. 80

3. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, все грани которого — прямоугольники, $AD = 4$, $DC = 8$, $CC_1 = 6$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середину ребра DC параллельно плоскости $AB_1 C_1$, и найдите периметр сечения.
- 4*. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки C и M параллельно прямой a (рис. 81).

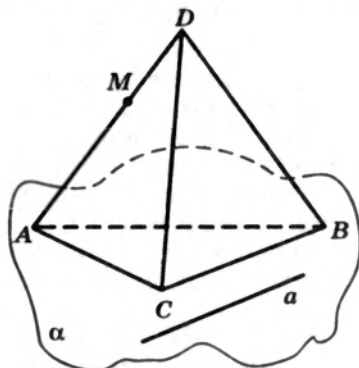


Рис. 81

К-3**Вариант 1**

1. В треугольнике ABC $AC = CB = 10$ см, $\angle A = 30^\circ$, BK — перпендикуляр к плоскости треугольника, равный $5\sqrt{6}$ см. Найдите расстояние от точки K до AC .
 2. Точка M равноудалена от всех вершин равнобедренного прямоугольного треугольника ACB ($\angle C = 90^\circ$), $AC = BC = 4$ см. Расстояние от точки M до плоскости треугольника равно $2\sqrt{3}$ см.
 - 1) Докажите, что плоскость AMB перпендикулярна плоскости ABC .
 - 2) Какой угол плоскость BMC составляет с плоскостью ABC ?
 - 3) Найдите угол между MC и плоскостью ABC .
 - 3*. Найдите расстояние от точки E — середины стороны AC до плоскости BMC .
-

К-3**Вариант 2**

1. Через сторону AC треугольника ABC проведена плоскость α , удаленная от вершины B на расстояние, равное 4 см, $AC = BC = 8$ см, $\angle ABC = 22^\circ 30'$. Найдите угол между плоскостями ABC и α .
 2. $ABCD$ — квадрат со стороной, равной 4 см. Треугольник AMB имеет общую сторону AB с квадратом, $AM = BM = 2\sqrt{6}$ см. Плоскости треугольника и квадрата взаимно перпендикулярны.
 - 1) Докажите, что $BC \perp AM$.
 - 2) Найдите угол между MC и плоскостью квадрата.
 - 3*. Найдите расстояние от точки A до плоскости DMC .
-

К-3**Вариант 3**

1. $ABCD$ — ромб со стороной 4 см, $\angle ADC = 150^\circ$, BM — перпендикуляр к плоскости ромба, равный $2\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние от точки M до AD .
- 2*. Точка M равноудалена от всех сторон правильного треугольника ABC , сторона которого равна 4 см. Расстояние от точки M до плоскости ABC равно 2 см.
 - 1) Докажите, что плоскость AMO перпендикулярна плоскости BMC (O — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC).
 - 2) Найдите угол между плоскостью BMC и плоскостью ABC .
 - 3) Найдите угол между MC и плоскостью ABC .
- 3*. Точка E принадлежит AC , причем $AE : EC = 2 : 1$. Найдите расстояние от точки E до плоскости BMC .

К-3**Вариант 4**

1. Через сторону AD ромба $ABCD$ проведена плоскость α , удаленная от BC на расстояние, равное $3\sqrt{3}$ см. Сторона ромба равна 12 см, $\angle BCD = 30^\circ$. Найдите угол между плоскостью ромба и плоскостью α .
 2. Треугольник ACB — прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), $AC = CB = 3$ см. Треугольник AMC имеет общую сторону AC с треугольником ACB , $AM = CM = \sqrt{6}$ см. Плоскости треугольников взаимно перпендикулярны.
 - 1) Докажите, что $MC \perp BC$.
 - 2) Найдите угол между MB и плоскостью ABC .
 - 3*. Найдите расстояние от точки E — середины AB до плоскости BMC .
-

К-4**Вариант 1**

1. В основании прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$ со стороной, равной a , и углом BAD , равным 60° . Плоскость $BC_1 D$ составляет с плоскостью основания угол 60° . Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.
 2. В основании пирамиды $DABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC , $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 10$. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под равными углами. Высота пирамиды равна 5. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
 - 3*. В указанной выше пирамиде найдите угол между прямыми AC и DB .
-

К-4**Вариант 2**

1. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм со сторонами 3 и 5 см. Острый угол параллелограмма равен 60° . Площадь большего диагонального сечения равна 63 см^2 . Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.
2. Основанием пирамиды $MABCD$ служит ромб $ABCD$, $AC = 8$, $BD = 6$. Высота пирамиды равна 1. Все двугранные углы при основании равны. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
- 3*. В указанной выше пирамиде найдите угол между гранями BMC и DMC .

К-4**Вариант 3**

1. В основании прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$, у которого $BD \perp AB$, $AB = 3$ см, $BD = 4$ см. Плоскость $AB_1 C_1$ составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.
2. В основании пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной, равной 12. Грани MBA и MBC перпендикулярны плоскости основания. Высота пирамиды равна 5. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
3. В указанной выше пирамиде найдите расстояние между прямыми BC и MD .

К-4**Вариант 4**

1. В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит параллелограмм $ABCD$, $AD = 2$, $DC = 2\sqrt{3}$, $\angle A = 30^\circ$. Большая диагональ составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
2. Основанием пирамиды $MABC$ служит прямоугольный треугольник ABC , катеты которого $AC = 8$ см, $BC = 6$ см. Высота пирамиды равна $3\sqrt{5}$ см. Двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
- 3*. В указанном выше параллелепипеде найдите угол между $A_1 C$ и плоскостью грани $DD_1 C_1 C$.

К-5**Вариант 1**

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Изобразите на рисунке векторы, равные:
1) $\vec{AC_1} + \vec{OA_1} + \vec{B_1 B} + \vec{BA}$;
2) $\vec{BA} - \vec{B_1 C_1}$.
2. В тетраэдре $DABC$ M — точка пересечения медиан грани BDC , а точка E — середина ребра AC . Разложите вектор $\vec{EM}$ по векторам $\vec{AC}$, $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$.
3. Даны три неколлинеарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите значения p и q , при которых векторы $\vec{m} = p\vec{a} + q\vec{b} + 8\vec{c}$ и $\vec{h} = \vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c}$ коллинеарны.
- 4*. В тетраэдре $DABC$ точки M и N — середины ребер AD и BC соответственно. Докажите, используя векторы, что прямые AB , HM и DC параллельны одной плоскости.

К-5**Вариант 2**

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Изобразите на рисунке векторы, равные:
 1) $\overrightarrow{B_1 C_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{B_1 A_1}$;
 2) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB_1}$.
2. В тетраэдре $DABC$ точка E — середина ребра AD , а точка M — точка пересечения медиан грани BDC . Разложите вектор $\overrightarrow{EM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.
3. Докажите, что векторы $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{h} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{p} = 8\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ компланарны.
- 4*. В тетраэдре $DABC$ точки M и K — середины ребер AB и CD соответственно. Докажите, что середины отрезков MC , MD , NA и NB являются вершинами параллелограмма.

К-5**Вариант 3**

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Изобразите на рисунке векторы, равные:
 1) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C_1 D_1} + \overrightarrow{B_1 B} + \overrightarrow{D_1 A_1}$;
 2) $\overrightarrow{D_1 C_1} - \overrightarrow{A_1 B}$.
2. В тетраэдре $DABC$ точка E — середина DB , а точка M — точка пересечения медиан грани ABC . Разложите вектор $\overrightarrow{EM}$ по векторам $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$.
3. Даны три неколлинеарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите значение k , при котором векторы $\vec{m} = k\vec{a} + k^2\vec{b} + 2\vec{c}$ и $\vec{n} = \vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}$ коллинеарны.
- 4*. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E и F — середины отрезков BD и $C_1 C$. Докажите, используя векторы, что прямые BC_1 , EF и DC параллельны одной плоскости.

К-5**Вариант 4**

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Изобразите на рисунке векторы, равные:
 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1 B} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$;
 2) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AB_1}$.
2. В тетраэдре $DABC$ точка M — точка пересечения медиан грани ACD , а точка N — середина ребра AB . Разложите вектор $\overrightarrow{KM}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$.
3. Докажите, что векторы $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{p} = 3\vec{a} - 4\vec{b} - 5\vec{c}$ компланарны.
- 4*. В пространстве расположен параллелограмм $ABCD$ и произвольный четырехугольник $A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1 B B_1$, $B_1 C C_1$, $C_1 D D_1$ и $A_1 A D_1$ являются вершинами параллелограмма.

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат в одной плоскости. Найти вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:
 1) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
 2) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$
 3) $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$
 4) $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$
 5) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 6) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 7) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 8) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 9) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 10) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат в одной плоскости. Найти вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:
 1) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
 2) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$
 3) $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$
 4) $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$
 5) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 6) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 7) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 8) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 9) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 10) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат в одной плоскости. Найти вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:
 1) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
 2) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$
 3) $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$
 4) $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$
 5) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 6) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 7) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 8) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 9) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 10) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

К-6**Вариант 1**

В треугольнике ABC $AB = 14$, $BC = 13$, $AC = 15$ (рис. 82). Найдите:

- 1) высоту, проведенную к стороне AC ;
- 2) косинус угла A ;
- 3) синус угла B ;
- 4) тангенс угла C ;
- 5) радиус описанной окружности;
- 6) радиус вписанной окружности;
- 7) медиану, проведенную к стороне BC ;
- 8) биссектрису, проведенную из вершины C .

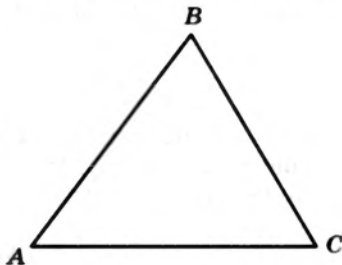


Рис. 82

К-6**Вариант 2**

В треугольнике ABC высоты, проведенные к сторонам AC , BC и AB , соответственно равны 15, 35 и 21 (рис. 83). Найдите:

- 1) площадь треугольника;
- 2) сторону AB ;
- 3) сторону BC ;
- 4) сторону AC ;
- 5) радиус описанной окружности;
- 6) радиус вписанной окружности;
- 7) медиану, проведенную к стороне BC ;
- 8) биссектрису, проведенную из вершины B .

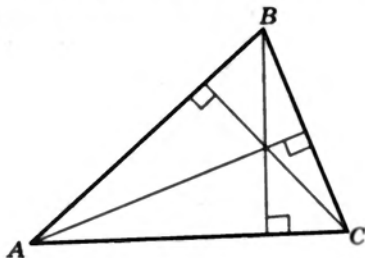


Рис. 83

К-6

Вариант 3

В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC боковая сторона $CD = 15$, диагональ $AC = 41$, причем $AC \perp CD$, $AB \perp BD$. Через точку O пересечения диагоналей проведен отрезок MN параллельно основаниям трапеции. Параллельно основаниям трапеции проведены отрезки TL и A_1D_1 так, что трапеции $ATLD$ и $TBCL$ подобны, а площади трапеций AA_1D_1D и A_1BCD_1 равны (рис. 84).

Найдите:

- 1) сторону AB ;
- 2) косинус угла CDB ;
- 3) площадь трапеции $ABCD$;
- 4) тангенс $\left(\frac{\angle A}{2}\right)$;
- 5) отрезок MN ;
- 6) площадь треугольника BOA ;
- 7) радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$;
- 8) радиус окружности, вписанной в треугольник ABC ;
- 9) отрезок TL ;
- 10) отрезок A_1D_1 .

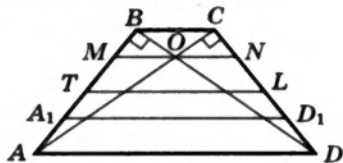


Рис. 84

К-6

Вариант 4

В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD перпендикулярны. Средняя линия трапеции $PK = 2,5$. Через точку O пересечения диагоналей проведен отрезок $MN = 1,6$ параллельно основаниям трапеции. Параллельно основаниям трапеции проведены отрезки TL и A_1D_1 так, что трапеции $ATLD$ и $TBCL$ подобны, а площади трапеций AA_1D_1D и A_1BCD_1 равны (рис. 85). Найдите:

- 1) площадь трапеции $ABCD$;
- 2) основание BC ;
- 3) основание AD ;
- 4) косинус угла BAC ;
- 5) радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$;
- 6) котангенс $\left(\frac{\angle A}{2}\right)$;
- 7) отрезок OK ;
- 8) площадь трапеции $PMNK$;
- 9) отрезок TL ;
- 10) отрезок A_1D_1 .

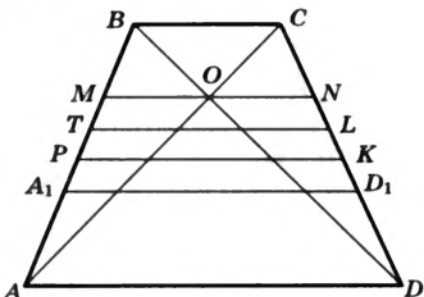


Рис. 85

МД—1

Вариант 1

1. В каком случае три точки в пространстве не определяют положение плоскости, проходящей через эти точки?
2. Могут ли две различные плоскости иметь только одну общую точку?
3. Точка M не лежит на прямой a . Через точку M проведены прямые, пересекающие прямую a . Лежат ли эти прямые в одной плоскости?
4. Каково взаимное расположение прямых (рис. 86):
1) AD_1 и MN ; 2) AD_1 и BC_1 ; 3) MN и DC ?
5. Прямые a и b скрещиваются с прямой c . Могут ли прямые a и b пересекаться?
6. Прямая a параллельна плоскости α . Существуют ли на плоскости α прямые, не параллельные a ? Если да, то каково их взаимное расположение?
7. Прямые m и n пересекаются в точке M (рис. 87), $A \in m$, $B \in n$, B лежит в плоскости α , $a \parallel b$. Каково взаимное расположение прямых b и c ?
8. Даны треугольник ABC и плоскость α , $AB \parallel \alpha$, $AC \parallel \alpha$. Каково взаимное расположение прямой BC и плоскости α ?
9. Плоскости α и β параллельны (рис. 88). Пересекающиеся в точке M прямые a и b пересекают плоскость α в точках A и C , а β в точках B и D , $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$. Найдите отношение $\frac{MC}{MD}$.
10. Плоскость α пересекает только боковые ребра параллелепипеда. Определите вид сечения.

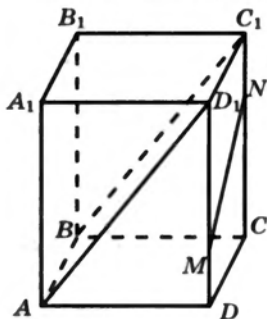


Рис. 86

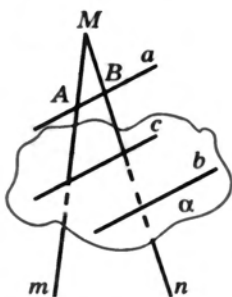


Рис. 87

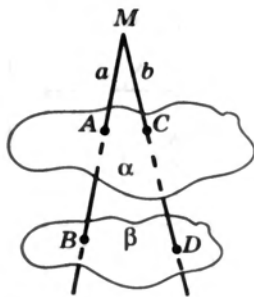


Рис. 88

Вариант 2

1. Что можно сказать о взаимном расположении двух плоскостей, имеющих три общие точки, не лежащие на одной прямой?
2. Могут ли две различные плоскости иметь только две общие точки?
3. Прямые a и b пересекаются в точке M . Прямая c , не проходящая через точку M , пересекает прямые a и b . Лежат ли все эти прямые в одной плоскости?
4. Каково взаимное расположение прямых (рис. 89):
1) A_1D и MN ; 2) A_1D и B_1C ; 3) MN и A_1B_1 ?
5. Прямые a и b скрещиваются с прямой c . Могут ли прямые a и b быть параллельными?
6. Две прямые параллельны одной и той же плоскости. Можно ли утверждать, что эти прямые параллельны? Если нет, то каково их взаимное расположение?
7. Прямые m и n параллельны (рис. 90). Точки A и B соответственно принадлежат прямым m и n ; b лежит в плоскости α , $a \parallel b$. Каково взаимное расположение прямых b и c ?
8. Даны четырехугольник $ABCD$ и плоскость α . Его диагонали AC и BD параллельны плоскости α . Каково взаимное расположение прямой AB и плоскости α ?
9. Плоскости α и β параллельны (рис. 91). Пересекающиеся в точке M прямые a и b пересекают плоскость α соответственно в точках B и A , а плоскость β в точках E и F , $\frac{EM}{MF} = \frac{2}{5}$. Найдите отношение $\frac{MB}{MA}$.
10. Плоскость α проходит через диагональ основания параллелепипеда и середину одной из сторон верхнего основания. Определите вид сечения.

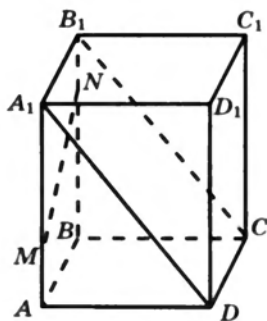


Рис. 89

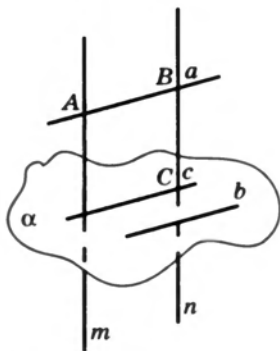


Рис. 90

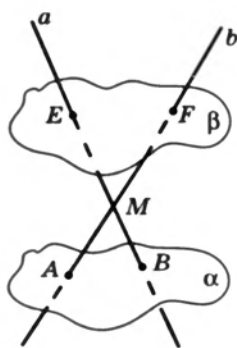


Рис. 91

1. $AB \perp \alpha$, $CD \perp \alpha$, $B \in \alpha$, $D \in \alpha$, $AB = CD$. Каково взаимное расположение прямой AC и плоскости α ?
2. К плоскости проведены две равные наклонные. Равны ли их проекции?
3. Точка M равноудалена от всех вершин прямоугольного треугольника, катеты которого 6 и 8 см. Расстояние от точки M до плоскости треугольника равно 12 см. Найдите расстояние от точки M до вершин треугольника.
4. Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат со стороной, равной a . Расстояние от бокового ребра до скрещивающейся с ним диагонали параллелепипеда равно ...
5. $ABCD$ — квадрат (рис. 92). Сторона AE перпендикулярна плоскости квадрата, $K \in EB$. Чему равен угол между BC и AK ?
6. В треугольнике ABC $AB = 10$, $\angle A = 30^\circ$, $BD \perp AC$, $BD = 12$. Расстояние от точки D до AC равно ...
7. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат со стороной, равной 4. Диагональ параллелепипеда равна 8. Угол между диагональю и боковой гранью равен ...
8. Точка M равноудалена от всех сторон квадрата $ABCD$, сторона которого равна 8 см. Расстояние от точки M до плоскости квадрата равно 4 см. Угол между плоскостью MCD и плоскостью квадрата равен ...
9. Прямая a и плоскость α перпендикулярны плоскости β . Каково взаимное расположение прямой a и плоскости α ?
10. Треугольник MAV и квадрат $ABCD$ имеют общую сторону AB , и их плоскости взаимно перпендикулярны. Угол MAD равен ...

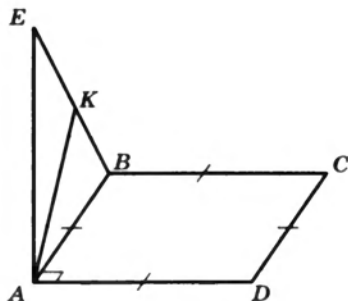


Рис. 92

Вариант 2

1. $AB \perp \alpha$, $CD \parallel AB$, $B \in \alpha$, $D \in \alpha$, $E \in \alpha$, $\angle ECD = 40^\circ$. Тогда $\angle CED$ равен ...
2. Две наклонные, проведенные к плоскости, имеют равные проекции. Равны ли сами наклонные?
3. Точка D равноудалена от всех вершин правильного треугольника и находится на расстоянии 3 см от его плоскости. Высота треугольника равна 6 см. Расстояние от точки D до вершины треугольника равно ...
4. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат со стороной, равной a . Расстояние между скрещивающимися диагоналями противоположных граней параллелепипеда равно ...
5. $ABCD$ — квадрат (рис. 93). Сторона AE перпендикулярна плоскости квадрата, $M \in EC$. Угол между BD и AM равен ...
6. В треугольнике ABC $AB = 16$ см, $\angle A = 30^\circ$, сторона BK перпендикулярна плоскости треугольника. Найдите BK , если расстояние от точки K до AC равно 17 см.
7. В прямоугольном параллелепипеде основанием служит квадрат. Диагональ параллелепипеда равна 10 см и составляет с плоскостью боковой грани угол 60° . Найдите сторону основания.
8. Точка D равноудалена от всех сторон правильного треугольника ABC . Расстояние от точки D до плоскости треугольника равно $2\sqrt{3}$. Радиус описанной около треугольника окружности равен 4. Угол между плоскостью CDB и плоскостью треугольника равен ...
9. Две плоскости перпендикулярны третьей. Линии пересечения этих плоскостей с третьей плоскостью параллельны. Каково взаимное расположение этих плоскостей?
10. Прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90^\circ$) и треугольник $СМВ$ имеют общую сторону BC . Плоскости треугольников взаимно перпендикулярны. Угол $АСМ$ равен ...

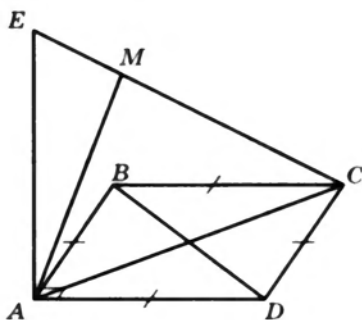


Рис. 93

1. Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 4 см, а боковое ребро равно 5 см. Найдите площадь сечения, которое проходит через ребро AA_1 и вершину C .
2. В правильной треугольной призме сторона основания равна 3 см, а диагональ боковой грани составляет с плоскостью основания угол 60° . Площадь боковой поверхности призмы равна ...
3. В наклонном параллелепипеде основанием служит квадрат. Две противоположные боковые грани перпендикулярны плоскости основания. Все ребра параллелепипеда равны 4 см. Найдите площадь каждой из наклонных боковых граней.
4. В наклонной треугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит правильный треугольник со стороной, равной a . Боковое ребро равно b , $\angle A_1 AC = \angle A_1 AB$. Площадь грани $CC_1 B_1 B$ равна ...
5. В наклонной треугольной призме боковое ребро равно 10 см. Площади двух боковых граней равны 30 и 40 см^2 , угол между ними прямой. Площадь боковой поверхности призмы равна ...
6. В правильной четырехугольной пирамиде угол между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром равен ...
7. В правильной четырехугольной пирамиде угол между противоположными боковыми гранями равен 40° . Найдите угол наклона боковых граней к плоскости основания.
8. Основанием пирамиды служит треугольник со стороной, равной 8 см, и с противоположным этой стороне углом 150° . Боковые ребра наклонены к основанию под углом 45° . Высота пирамиды равна ...
9. Основанием пирамиды служит трапеция, основания которой равны 2 и 8 см. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под равными углами. Высота одной из боковых граней равна 10 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
10. В пирамиде $MABCD$ основанием служит квадрат со стороной, равной a . Грань MAB — правильный треугольник, плоскость которой перпендикулярна плоскости основания. Площади граней MAD и MBC равны ...

Вариант 2

1. Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 3 см, а боковое ребро равно 4 см. Найдите площадь сечения, которое проходит через сторону основания AD и вершину C_1 .
2. В правильной треугольной призме боковое ребро равно 4 см, а диагональ боковой грани составляет с плоскостью основания угол 45° . Площадь боковой поверхности призмы равна ...
3. В наклонном параллелепипеде основанием служит квадрат. Две противоположные боковые грани перпендикулярны плоскости основания. Все ребра параллелепипеда равны между собой. Площадь наклонной боковой грани равна 25 см^2 . Длина ребра параллелепипеда равна ...
4. Основанием наклонного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит квадрат со стороной, равной a . Боковое ребро равно b . Вершина A_1 равноудалена от всех вершин нижнего основания. Площадь диагонального сечения $BB_1 D_1 D$ равна ...
5. В наклонной треугольной призме боковое ребро равно 5 см. Площади двух боковых граней равны 20 см^2 , угол между ними 60° . Площадь боковой поверхности призмы равна ...
6. В правильной треугольной пирамиде угол между скрещивающимися ребрами равен ...
7. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 50° . Угол между противоположными боковыми гранями пирамиды равен ...
8. В пирамиде основанием служит треугольник со стороной 6 см и противолежащим углом 30° . Боковые ребра наклонены к основанию под углом 60° . Длина бокового ребра равна ...
9. Основанием пирамиды служит трапеция, боковые стороны которой равны 2 см и 4 см. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под равными углами. Высота одной из боковых граней равна 5 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
10. Основанием пирамиды $MABCD$ служит квадрат со стороной 6 см. Ребро MB перпендикулярно плоскости основания. Равные боковые ребра равны 8 см. Площадь каждой из наклонных боковых граней равна ...

1. $DABC$ — правильная треугольная пирамида. Сторона основания равна $\sqrt{3}$. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 60° . Найдите $|\vec{DA} + \vec{CB} + \vec{AC}|$.
2. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 1. Найдите $|\vec{DC_1} - \vec{DA_1}|$.
3. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, $A_1 C$ пересекает $B_1 D$ в точке M , $\vec{B_1 D} = x \vec{DM}$. Найдите x .
4. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Укажите какой-нибудь вектор с началом и концом в вершинах параллелепипеда, который был бы компланарен с векторами $\vec{AB_1}$ и $\vec{AC}$.
5. $\vec{AC} = x \vec{AB} + y \vec{AD}$. Могут ли прямые AC и BD быть скрещивающимися?
6. Даны векторы $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{p} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{k} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$. Укажите тройку компланарных векторов.
7. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Найдите $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB_1}$.
8. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, $D_1 C$ пересекает $C_1 D$ в точке M . Выразите вектор $\vec{AM}$ через векторы $\vec{AD_1}$ и $\vec{AC}$.
9. Дано: $PABCD$ — пирамида, $ABCD$ — параллелограмм, $\vec{PA} = \vec{a}$, $\vec{PB} = \vec{b}$, $\vec{PC} = \vec{c}$. Выразите вектор $\vec{PD} = \vec{x}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.
10. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ отрезок DO — высота. Разложите вектор $\vec{DO}$ по векторам $\vec{DA}$, $\vec{DB}$ и $\vec{DC}$.

Вариант 2

1. Основанием пирамиды $MABC$ служит прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 6$, $BC = 8$. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 60° . Найдите $|\vec{AC} + \vec{BM} + \vec{CB}|$.
2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 1, точка E — середина A_1C_1 . Найдите $|\vec{CE} - \vec{CB_1}|$.
3. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, A_1C пересекает B_1D в точке M , $\vec{A_1C} = x\vec{CM}$. Найдите x .
4. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, E и F — середины AD и CD соответственно. Будут ли компланарны векторы $\vec{AC}$, $\vec{EF}$ и $\vec{DD_1}$?
5. Даны векторы $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = -\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{k} = 3\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$. Укажите тройку компланарных векторов.
6. $\vec{AC} \neq x\vec{AB} + y\vec{AD}$. При всех x и y векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ не являются коллинеарными. Могут ли пересекаться прямые AC и BD ?
7. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Найдите $\vec{C_1B_1} + \vec{C_1D_1} + \vec{C_1C}$.
8. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, где AB_1 пересекает A_1B в точке E . Выразите вектор $\vec{DE}$ через векторы $\vec{DB_1}$ и $\vec{DA}$.
9. В пирамиде $EABCD$ основанием служит параллелограмм $ABCD$, $\vec{EB} = \vec{m}$, $\vec{EC} = \vec{n}$, $\vec{ED} = \vec{p}$, $\vec{EA} = \vec{y}$. Выразите вектор $\vec{y}$ через векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$.
10. В тетраэдре $DABC$ отрезки DE и CF — медианы грани BDC , DE пересекает CF в точке O . Выразите вектор $\vec{AD}$ через векторы $\vec{AO}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AB}$.

Самостоятельные работы

С—1

Вар. 1. 2. Да, пересекаются.

Вар. 3. 1. Точки A , M , B должны лежать на одной прямой.

2. 1) Прямая EF пересекает BC в точке X , а B_1C_1 в точке Y . Тогда X — точка пересечения EF с плоскостью ABC , а Y — с плоскостью $A_1B_1C_1$.

2) Линия пересечения плоскостей ADF и EFD — прямая FD .

3) Линия пересечения плоскостей EFD и ABC — прямая XD .

Вар. 5. 1. При условии, что $BO = OC$.

2. Пусть AB_1 и A_1B пересекаются в точке X , а BC_1 и B_1C — в точке Y . Тогда можно доказать, что XY — линия пересечения плоскостей AB_1C и A_1C_1B .

Вар. 6. 1. При условии, что $AE : EC = 2 : 3$.

2. Пусть ME пересекается с PT в точке X . Тогда можно доказать, что XK — линия пересечения плоскостей PTK и MCE .

Вар. 7. 1. Пусть BK пересекает AC в точке P , а PD пересекает EF в точке L . Искомой точкой X является точка пересечения DK и LM . Это требует доказательства.

2. Если $\angle C = 90^\circ$, то центр O описанной окружности принадлежит AB . Через эту прямую можно провести плоскость, в которой точка C не лежит. Поэтому точка C необязательно лежит в плоскости ABC .

Вар. 8. 1. Пусть DM пересекает BC в точке L , а AL пересекает BE в точке P . Искомой точкой Y является точка пересечения AM и DP . Это требует доказательства.

2. Необязательно.

С—2

Вар. 1. 1. 1) Прямая BC .

2) Любая прямая, лежащая в плоскости β и проходящая через точку C , но не совпадающая с BC .

3) Таких прямых нет.

Вар. 2. 1. 1) Таких прямых нет.

2) Любая прямая, лежащая в плоскости β и проходящая через точку C , но не параллельная EF .

3) Прямая, проходящая через точку C и параллельная прямой EF .

Вар. 4. 2. Нет, не лежит.

Вар. 5. 1. Прямые EF и a , EF и b — скрещивающиеся, так как в противном случае прямые AA_1 и BB_1 лежали бы в одной плоскости, что невозможно.

Вар. 6. 1. Решается аналогично задаче 1 из варианта 5.

Вар. 7. 1. Прямые c и a лежат в одной плоскости и не пересекаются. Если предположить, что c и a пересекаются в точке X , то тогда легко установить, что точка X принадлежит трем плоскостям α , β и γ , а значит, что она лежит и на линиях пересечения этих плоскостей, взятых попарно. Но тогда прямые a и b будут иметь общую точку X , что противоречит условию. Аналогично доказывается, что $c \parallel b$.

2. Рассмотрим отрезки A_1F и C_1E , $EF \parallel AC$, так как EF — средняя линия треугольника ABC . Легко доказать, что $AC \parallel A_1C_1$. Отсюда следует, что $EF \parallel A_1C_1$. В таком случае EFC_1A_1 — трапеция, основания которой EF и A_1C_1 , причем $EF : A_1C_1 = 1 : 2$. Пусть диагонали этой трапеции A_1F и C_1E пересекаются в точке K . Из подобия треугольников A_1KC_1 и EKF следует, что $A_1K : KF = C_1K : KE = 1 : 2$. Рассмотрим теперь отрезки A_1F и B_1M . Аналогично можно доказать, что они пересекаются в некоторой точке K_1 , причем $A_1K_1 : K_1F = B_1K_1 : K_1M = 1 : 2$. В таком случае точки K и K_1 совпадают. Этим и доказывается данное утверждение.

Вар. 8. 1. Через прямую a и точку M проходит плоскость α . Если эта плоскость пересекает прямую b в некоторой точке X , то прямая XM , если она не параллельна α , является искомой.

2. Легко доказать, что CC_1B_1B , AA_1C_1C и AA_1B_1B — параллелограммы и точки F , E и M — точки пересечения их диагоналей, EF — средняя линия треугольника AC_1B и $EF = \frac{1}{2}AB$. Аналогично

$MF = \frac{1}{2}AC$ и $EM = \frac{1}{2}BC$. Отсюда следует подобие треугольников EMF и ABC по третьему признаку подобия.

С—3

Вар. 2. 1. $BF : FC = 2 : 3$.

Вар. 3. 1. Прямая b либо параллельна плоскости α , либо лежит в этой плоскости.

2. 2) 50° .

Вар. 4. 2. 2) 80° .

Вар. 5. 1. Необходимо доказать, что четырехугольник $PKHM$ является параллелограммом.

2. 2) $OO_1 \parallel AA_1$. 3) 60° .

Вар. 6. 1. Решается аналогично задаче 1 из варианта 5.

2. 2) $KK_1 \parallel BC$. 3) 70° .

Вар. 7. 1. Пусть ME и MF — медианы треугольников AMD и DMC . Рассмотрим треугольники EMF и HMN_1 , где $\frac{MN}{ME} = \frac{MN_1}{MF} = \frac{2}{3}$. Кроме того, у этих треугольников угол EMF —

общий. Отсюда следует, что $\triangle EMF \sim \triangle HMN_1$. В таком случае $NN_1 \parallel EF$. Так как EF — средняя линия треугольника ADC , то $EF \parallel AC$. Поэтому $NN_1 \parallel AC$ и NN_1 параллельна плоскости AMC .

2. MF и EF — линии пересечения плоскости MFE с плоскостями CDB и ABC . Линия пересечения с плоскостью ADC проходит через точку M и параллельна AC . Пусть ее точка пересечения с AD есть точка P . Тогда PE — линия пересечения с плоскостью ADB , $PMFE$ — параллелограмм, $\angle EFM$ — угол между скрещивающимися прямыми AC и DB , $EF = 5$, $MF = 10$, $S = EF \cdot MF \sin \angle EFM$, $25\sqrt{3} = 50 \sin \angle EFM$, $\sin \angle EFM = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle EFM = 60^\circ$ (угол между скрещивающимися прямыми — острый или прямой).

Вар. 8. 1. Да, параллельны.

2. 200. Задача решается аналогично задаче из варианта 7.

С—4

Вар. 3. 2. Если прямые AB и CD — скрещивающиеся, то AD и BC тоже скрещивающиеся прямые. Если же $AB \parallel CD$, то AD и BC пересекаются или параллельны.

Вар. 4. 2. AC и BD скрещивающиеся, пересекающиеся или параллельны. См. ответ к задаче 2 из варианта 3.

Вар. 5. 1. 10 см, 12,5 см.

2. О положении плоскостей судить нельзя.

Вар. 6. 1. 10 см, 15 см.

2. Прямые должны пересекаться или скрещиваться.

Вар. 7. 1. Через точку M проводим прямую, параллельную BB_1 , до пересечения с AC в точке E . Через точку E проводим прямую, параллельную KB , до пересечения с прямой AB в точке P . Через точку P проводим прямую, параллельную BB_1 . Легко доказать, что эта прямая является линией пересечения указанной плоскости с плоскостью ABB_1 .

2. В плоскости, проходящей через точку M и параллельной α .

Вар. 8. 1. Решается аналогично задаче 1 из варианта 7.

С—5

Вар. 1. 2. $2\sqrt{3}$ см².

Вар. 2. 2. $4\sqrt{3}$ см².

Вар. 3. 2. $4\sqrt{33}$ см².

Вар. 4. 1. 90° . 2. 48 см².

Вар. 5. 2. Каждые два из указанных отрезков являются диагоналями параллелограмма, причем стороны этого параллелограмма являются средними линиями соответствующих граней тетраэдра. Для доказательства следует воспользоваться теоремой о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.

Вар. 6. 2. Рассмотрите любые два отрезка указанных прямых и докажите, что, пересекаясь, они делятся в отношении 1 : 3.

Вар. 7. 1. Для решения задачи нужно доказать, что $ABCD$ — параллелограмм. Пусть указанные отрезки пересекаются в точке O , AA_1C_1C — параллелограмм, так как $AA_1 \parallel CC_1$ и $AA_1 = CC_1$. Тогда $A_1O = OC$ и $AO = OC_1$; BB_1D_1D — параллелограмм, так как $BB_1 \parallel DD_1$ и $BB_1 = DD_1$. Тогда $B_1O = OD$ и $BO = OD_1$. В четырехугольнике A_1B_1CD $A_1O = OC$ и $B_1O = OD$. Значит, A_1B_1CD — параллелограмм и $A_1B_1 \parallel CD$, но $A_1B_1 \parallel AB$, а потому $AB \parallel CD$. Аналогично можно доказать, что $BC \parallel AD$, и тогда $ABCD$ — параллелограмм. Итак, $ABCD A_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

2. Необходимо сделать развертку боковой поверхности тетраэдра (рис. 94). Наименьший путь равен длине отрезка AA' , $\angle ADA' = 30^\circ \cdot 3 = 90^\circ$. Тогда $AA' = 3\sqrt{2}$ см.

Вар. 8. 1. Плоскости BDA_1 и AA_1C_1 пересекаются по прямой A_1O , где O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, AC_1 пересекает A_1O в точке M . Это и есть точка пересечения AC_1 и плоскости BDA_1 . Обозначим точку пересечения AC_1 и A_1C через P . Тогда AP и A_1O — медианы треугольника AA_1C .

В таком случае $A_1M : MO = 2 : 1$, а это и означает, что M — точка пересечения медиан сечения BDA_1 .

2. 12 см. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 7.

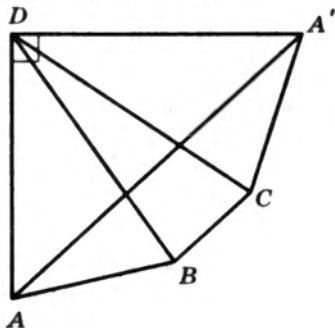


Рис. 94

С—6

Вар. 1. 2. $(10 + \sqrt{2})$ см.

Вар. 2. 1. 15.

Вар. 3. 1. $\frac{a^2 \sqrt{11}}{64}$.

Вар. 4. 1. $\frac{a^2 \sqrt{2}}{16}$.

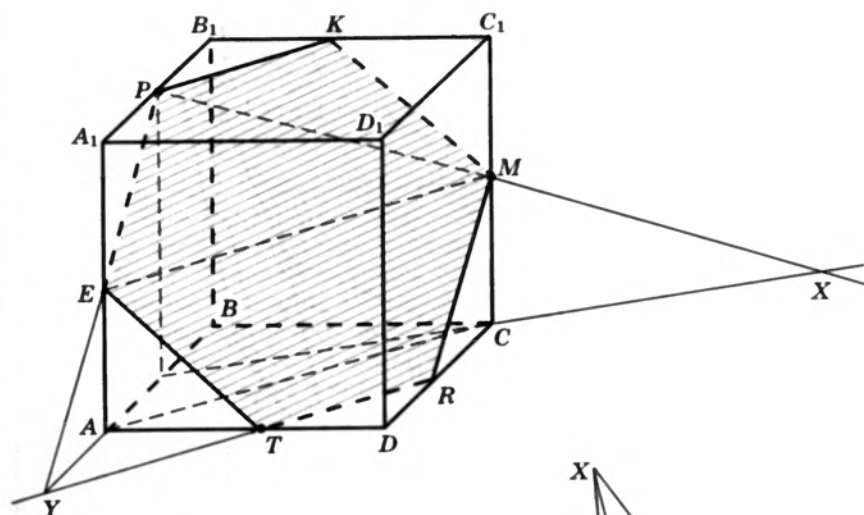
Вар. 5. 1. Построение сечения показано на рисунке 95. Надо доказать, что в сечении получился правильный шестиугольник со стороной, равной $4\sqrt{2}$ см. Его площадь равна $48\sqrt{3}$ см².

2. Построение сечения показано на рисунке 96. Секущая плоскость пересекает плоскость BDC по прямой CX , параллельной DE . Доказательство построения очевидно.

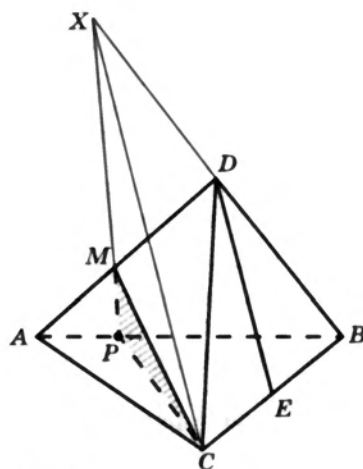
Вар. 6. 1. Построение сечения показано на рисунке 97. Надо доказать, что в сечении получился правильный шестиугольник со стороной, равной $2\sqrt{2}$ см. Его площадь равна $12\sqrt{3}$ см².

2. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 5.

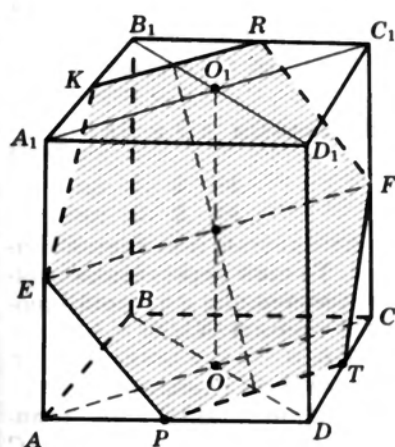
Вар. 7. 1. Построение сечения показано на рисунке 98. В сечении получилась трапеция $KPTL$, у которой основания $KL = \frac{3}{4}a$ и



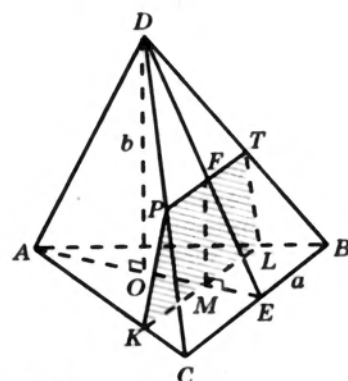
Puc. 95



Puc. 96



Puc. 97



Puc. 98

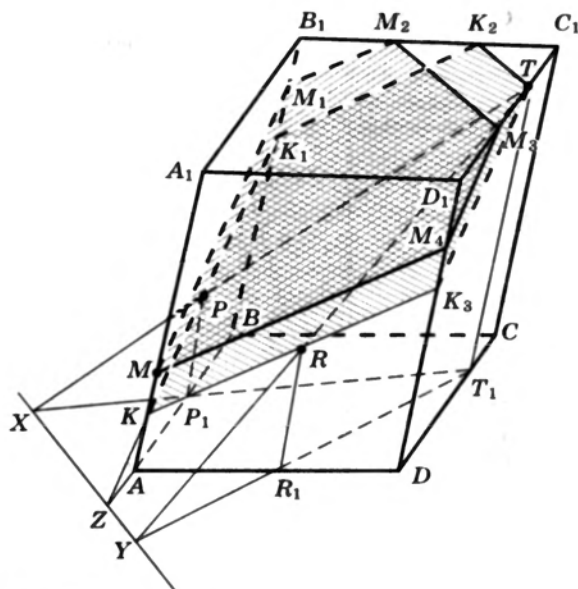


Рис. 99

$PT = \frac{a}{2}$. Высота трапеции $FM = \frac{b}{2}$. Тогда площадь трапеции $\frac{5ab}{16}$.

2. Построение сечения показано на рисунке 99. При построении использовалось свойство параллельных плоскостей.

Вар. 8. 1. Сечением является параллелограмм, стороны которого равны 8 и 3, а угол 60° . Тогда площадь сечения равна $12\sqrt{3}$.

2. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 7.

С—7

Вар. 1. 1. 2.

Вар. 2. 1. 2.

2. Линия пересечения параллельна прямым AD и BE .

Вар. 3. 1. 24. 2. $b \parallel c$.

Вар. 4. 1. 2. 2. $b \parallel c$.

Вар. 5. 1. 13.

2. Точкой пересечения прямой b с плоскостью α является точка пересечения прямой AM с прямой b . Точкой пересечения прямой a с плоскостью β является точка пересечения a с прямой, проходящей через точку B и параллельной прямой AM .

Вар. 6. 1. 8 см.

2. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 5.

Вар. 7. 1. Рассмотрим случай, когда вершины параллелограмма расположены по одну сторону от плоскости α . Пусть AC и BD пересекаются в точке O , а A_1C_1 и B_1D_1 — в точке O_1 . Легко

доказать, что OO_1 параллельна прямым AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 . В таком случае OO_1 — средняя линия в трапециях ACC_1A_1 и BDD_1B_1 :

$$OO_1 = \frac{AA_1 + CC_1}{2}, OO_1 = \frac{BB_1 + DD_1}{2}.$$

Отсюда $AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$. Исходя из условия задачи $13 + 19 = 36 + DD_1$, чего не может быть. Это означает, что точка D находится по другую сторону от плоскости BB_1D_1D мы имеем пересекающиеся отрезки BD и B_1D_1 , $BB_1 \perp B_1D_1$, $DD_1 \perp B_1D_1$, $BB_1 = 36$. Расстояние OO_1 между серединами BD и B_1D_1 равно 16. Тогда легко получить, что $DD_1 = 4$.

2. Рассмотрим две точки A и B и искомую прямую m . Множеством точек, одинаково удаленных от точек A и B , является плоскость α , перпендикулярная AB и проходящая через середину AB . Если $m \parallel \alpha$, то таких точек нет; если α пересекает прямую m , то искомой является эта точка пересечения; если m лежит в плоскости α , то условию удовлетворяет каждая точка прямой m .

Вар. 8. 1. Легко доказать, что $AB \parallel \alpha$ и $AB = A_1B_1 = 19$. Через точку C проведена плоскость β , параллельная плоскости α . Эта плоскость пересекает BB_1 в точке B_2 , а AA_1 в точке A_2 , $CB_2 = 11$ см, $CA_2 = 12$ см и $A_2B_2 = 19$ см. Треугольники CB_2B и CA_2A — прямоугольные. Пусть $BB_2 = AA_2 = x$, $CB^2 = x^2 + 121$, $CA^2 = x^2 + 144$, $AB^2 = CA^2 + CB^2$, $x^2 + 121 + x^2 + 144 = 361$. Отсюда $x^2 = 48$, $CA = \sqrt{48 + 121} = 13$, $CB = \sqrt{48 + 144} = 8\sqrt{3}$, $S_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 13 = 52\sqrt{3}$ (см²).

2. Множеством точек, равноудаленных от двух данных точек A и B , является плоскость β , перпендикулярная AB и проходящая через середину AB . Если плоскость β пересекает данную плоскость α , то искомым множеством является линия пересечения плоскостей α и β . Если $\beta \parallel \alpha$, то таких точек нет. Если же α и β совпадут, то данному условию удовлетворяет любая точка плоскости α .

С—8

Вар. 1. 2. 84.

Вар. 2. 2. 24.

Вар. 3. 2. 7.

Вар. 4. 2. 3 см.

Вар. 5. 1. Из равенства треугольников DBC и DBA вытекает, что $DA = DC$. Пусть E — середина AC , тогда DE и BE — медианы треугольников ADC и ABC . Так как эти треугольники — равнобедренные, то $AC \perp EB$ и $AC \perp ED$, т. е. AC — перпендикуляр к плоскости DEB , а значит, $AC \perp DB$.

2. Пусть F — середина DB . Так как все грани тетраэдра — правильные треугольники, то $CF \perp DB$ и $AF \perp DB$. Строим

$EM \parallel CF$ и $MK \parallel AF$, $M \in DB$. Тогда треугольник KME — искомое сечение. Его площадь равна $\frac{a^2 \sqrt{2}}{16}$.

Вар. 6. 1. Решается аналогично задаче 1 из варианта 5.

2. Строим FE параллельно AC и соединяем точки E и B , FEB — искомое сечение. Легко доказать, что $FE \perp CD$ и $EB \perp CD$, т. е. плоскость FEB перпендикулярна CD .

Вар. 7. 1. Треугольники AA_1D_1 и AA_1B_1 равны, а потому $AB_1 = AD_1$. Пусть O — середина отрезка B_1D_1 . Тогда $B_1D_1 \perp AO$ и $B_1D_1 \perp A_1C_1$, т. е. B_1D_1 — перпендикуляр к плоскости ACC_1 , а потому $B_1D_1 \perp A_1C$, так как A_1C лежит в этой плоскости.

2. Через точку M проводим прямую, параллельную AC , через точку пересечения этой прямой с ребром AA_1 проводим прямую, параллельную AB . Дальнейшее построение очевидно.

Вар. 8. Решения аналогичны задачам из варианта 7.

С—9

Вар. 1. $6\sqrt{5}$ см.

Вар. 2. 4 см.

Вар. 3. 15.

Вар. 4. 54.

Вар. 5. 12 см. Необходимо воспользоваться теоремой о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.

Вар. 6. Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 — перпендикуляры к плоскости α . Плоскости, определяемые параллельными прямыми AA_1 , CC_1 и BB_1 , DD_1 , пересекаются по прямой OO_1 . Очевидно, что $OO_1 \perp \alpha$ и $OO_1 = 15$ см. Так как средняя линия трапеции параллельна плоскости α , то этой плоскости параллельны и основания трапеции AD и BC . Пусть $AA_1 = x$. Так как средняя линия трапеции удалена от плоскости α на расстояние, равное 13, то $BB_1 = 26 - x$. Рассмотрим трапецию BDD_1B_1 . Так как основания трапеции относятся как 1 : 2, то очевидно, что и $BO : OD = 1 : 2$. Итак, в трапеции BDD_1B_1 $BB_1 = 26 - x$, $DD_1 = x$, $OO_1 \parallel BB_1$, причем $BO : OD = 1 : 2$. Отсюда легко найти, что $x = 7$. Тогда расстояния от оснований до плоскости α равны 7 и 19 см.

Вар. 7. В треугольнике MBD необходимо опустить перпендикуляр OK на прямую MD , где O — точка пересечения диагоналей квадрата. Легко доказать, что OK — искомое расстояние.

Из подобия треугольников MBD и OKD находим, что $OK = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Вар. 8. Из точки C опустим перпендикуляр CC_1 на плоскость α , $CC_1 = 20$. Из треугольника CC_1D находим, что $DC_1 = 15$. Легко доказать, что искомое расстояние будет равно высоте треугольника BC_1D , опущенной на сторону DC_1 . Ответ: 11,2.

С—10

Вар. 1. 1. 8. 2. $55^\circ 33'$, $23^\circ 35'$.

Вар. 2. 1. a . 2. $29^\circ 56'$, $19^\circ 28'$.

Вар. 3. 1. a . 2. $51^\circ 45'$.

Вар. 4. 1. $\frac{m}{2}$. 2. $28^\circ 42'$.

Вар. 5. 1. Точка M лежит в плоскости трапеции.

2. $32^\circ 57'$. Пусть $MM_1 \perp ABC$, M_1 лежит на биссектрисе угла BAD . Опустим из точки M_1 перпендикуляр M_1E на сторону AD и соединим точки M и E . Легко доказать, что $ME \perp AD$. Пусть $AM = a$. Тогда из треугольника AME находим AE , а затем из треугольника AEM_1 находим AM_1 . Зная AM_1 , находим косинус искомого угла.

Вар. 6. 1. 4.

2. $57^\circ 12'$. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 5.

Вар. 7. 1. Пусть $KK_1 \perp ABC$ ($K_1 \in CD$). Очевидно, что $AK_1 \parallel FK$. Легко доказать, что в квадрате отрезки BE и AK_1 взаимно перпендикулярны. Тогда, используя теорему о трех перпендикулярах, можно доказать, что $B_1E \perp AK_1$, а так как $FK \parallel AK_1$, то и $B_1E \perp FK$.

2. $48^\circ 35'$. Вершина D проектируется в центр O правильного треугольника ABC . Опустим перпендикуляр AM на плоскость CDB . Необходимо доказать, что точка M лежит на высоте DF грани CDB , $\angle ACM$ — искомый. Для нахождения синуса этого угла достаточно найти высоту AM треугольника ADF .

Вар. 8. 2. $50^\circ 46'$. Обе задачи решаются аналогично задачам из варианта 7.

С—11

Вар. 1. 1. 90° . 2. 60° .

Вар. 2. 2. 45° .

Вар. 3. 1. 4,5 см. 2. 45° .

Вар. 4. 1. 62,5 см. 2. 45° .

Вар. 5. 1. 24 см. 2. $118^\circ 4'$.

Вар. 6. 1. 3. 2. $87^\circ 48'$.

Вар. 7. 1. Необходимо построить линейный угол, одна из сторон которого проходила бы через данную точку X . Стороны этого угла параллельны высотам, опущенным на общую сторону треугольников.

2. 120° . Необходимо из точки O пересечения диагоналей квадрата опустить перпендикуляр OK на ребро MD и точку K соединить отрезками с вершинами A и C . Тогда $\angle AKC$ — линейный угол искомого двугранного угла. Из треугольника BMD находим, что $OK = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$. Дальнейшее решение очевидно.

Вар. 8. 1. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7.

2. 120° . Ребром двугранного угла является прямая B_1D . Линейным углом двугранного угла является угол, образованный высотами A_1K и C_1K равных треугольников B_1A_1D и B_1C_1D , опущенными на общее основание B_1D . Очевидно, что этот угол равен 120° .

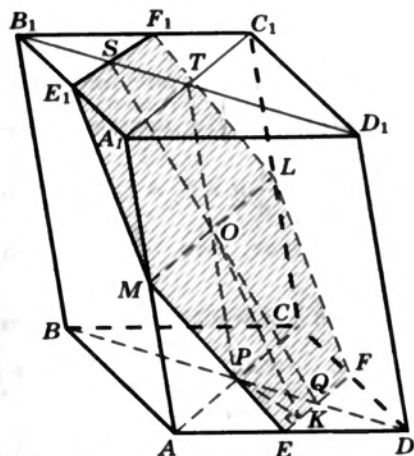


Рис. 102

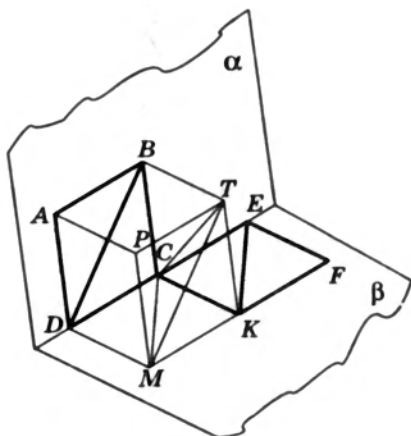


Рис. 103

Пусть $MP = h$,

$$S_{KML} = \frac{1}{2} AC \cdot QM \quad (KL = AC),$$

$$S_{EKL F} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot AC \cdot QP.$$

Из подобия треугольников MBP и QTP следует, что $MQ = \frac{2}{3}h$ и

$$QP = \frac{h}{3}. \text{ Тогда } S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \frac{2}{3}h + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} AC \cdot \frac{h}{3} = \frac{7 AC \cdot h}{12}.$$

Легко получить, что $BP = \frac{18}{5}$, $MB = \frac{3}{4}$, $BB_1 = \frac{21}{2}$. Это следует из подобия треугольников B_1BD и MBN . Тогда из треугольника MBP следует, что

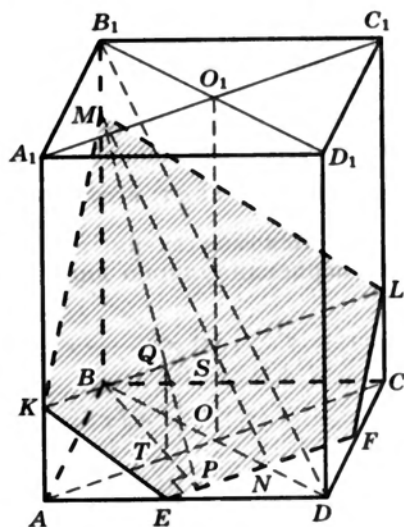


Рис. 104

$$MP = h = \sqrt{\frac{441}{4} + \frac{324}{25}} = \frac{111}{10}, S_{\text{сеч}} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 111}{12 \cdot 10} = \frac{259}{8}. \text{ Ответ: } \frac{259}{8}.$$

С—13

Вар. 1. 1. 60° . 2. $8\sqrt{2} \text{ см}^2$.

Вар. 2. 1. 45° . 2. $2\sqrt{3} \text{ см}^2$.

Вар. 3. 1. $3\sqrt{7} \text{ см}^2$. 2. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}, \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

Вар. 4. 1. $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$. 2. $\frac{m\sqrt{6}}{2}, m^2\sqrt{2}$.

Вар. 5. 1. Построение сечения показано на рисунке 105.
 $BE = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3$, $FB = 3\sqrt{3}$. Тогда $FB_1 = \sqrt{3}$. Из подобия треугольников FB_1K и FBE следует, что $\frac{KB_1}{EB} = \frac{1}{3}$ и $KB_1 = 1$. Из подобия треугольников PB_1T и $A_1B_1C_1$ следует, что $\frac{PT}{A_1C_1} = \frac{1}{3}$ и $PT = \frac{2\sqrt{3}}{2}$. Из треугольника KME ($\angle KME = 90^\circ$) имеем, что $KE = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 4$, $S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2}(PT + AC) \cdot KE = \frac{16\sqrt{3}}{3}$. Ответ: $\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

2. $2Q$.

Вар. 6. 1. $30\sqrt{2} \text{ см}^2$. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 5.

2. $Q\sqrt{3}$.

Вар. 7. 1. Необходимо достроить призму до прямого параллелепипеда $ADBCA_1D_1B_1C_1$, основанием которого будет ромб $ADBC$. В таком случае угол между AC_1 и B_1C равен величине угла D_1AC_1 . Этот угол можно найти, используя теорему косинусов, из треугольника D_1AC_1 , где $AD_1 = AC_1 = a\sqrt{2}$ и $D_1C_1 = a\sqrt{3}$ (ребро призмы принято за a). Ответ: $\arccos \frac{1}{4} \approx 75^\circ 31'$.

2. Искомое сечение изображено на рисунке 106. Сечение строим перпендикулярно диагонали F_1B . Следует отметить, что так

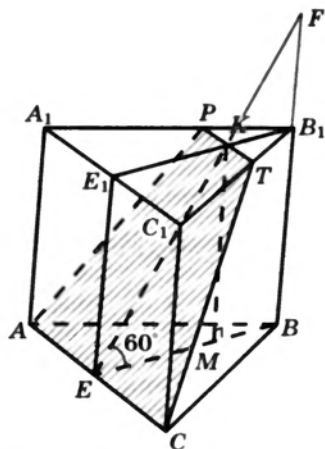


Рис. 105

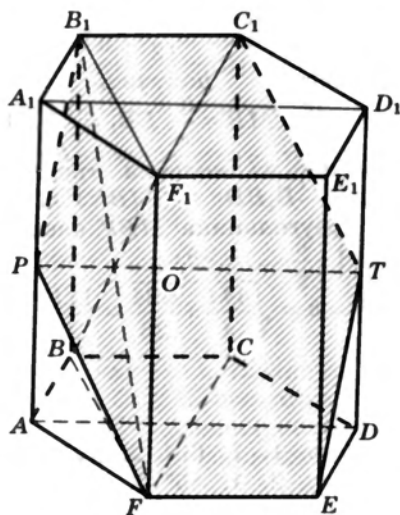


Рис. 106

как B_1F_1FB — квадрат, то меньшая диагональ F_1B перпендикулярна B_1F . Кроме того, легко доказать, что $F_1B \perp BC$, а так как $PT \parallel BC$, то $F_1B \perp PT$. Таким образом, диагональ F_1B перпендикулярна двум пересекающимся прямым PT и B_1F , которые и задают плоскость сечения. Плоскость сечения составляет с основанием угол 45° . Тогда

$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos 45^\circ} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3a^2 \sqrt{6}}{2}. \text{ Ответ: } \frac{3a^2 \sqrt{6}}{2}.$$

Вар. 8. 1. $\arccos \frac{2\sqrt{2}}{5} \approx 55^\circ 33'$. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7.

2. Искомое сечение изображено на рисунке 107. Следует отметить, что FF_1C_1C — квадрат, а потому $F_1C \perp C_1F$. Кроме того, $F_1C \perp AE$, а так как $PQ \parallel AE$, то $F_1C \perp PQ$. Таким образом, диагональ F_1C — перпендикуляр к двум пересекающимся прямым C_1F и PQ , которые задают плоскость сечения. При построении учитывалось, что плоскость сечения пересекает плоскость BB_1D_1 по прямой MT , параллельной PQ . Плоскость сечения составляет с плоскостью основания угол 45° :

$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos 45^\circ} = \frac{3a^2 \sqrt{6}}{2}. \text{ Ответ: } \frac{3a^2 \sqrt{6}}{2}.$$

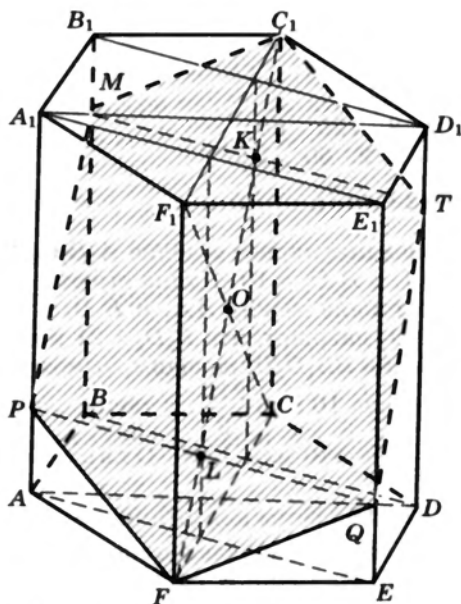


Рис. 107

С—14

Вар. 1. $12\sqrt{39}$.

Вар. 2. $50(\sqrt{2} + 1)$.

Вар. 3. $\frac{21}{13}(7\sqrt{3} + 1)$.

Вар. 4. $\frac{2310\sqrt{3}}{13}$.

Вар. 5. $36(7 + 6\sqrt{11})$.

Вар. 6. $30(3\sqrt{161} + 28)$.

Вар. 7. Пусть диагонали основания пересекаются в точке O . Тогда $AO = 3$, $\angle BB_1D = 60^\circ$. В плоскости BB_1D_1 опускаем из точки O перпендикуляр OK на B_1D . Можно доказать, что длина OK есть расстояние между AC и B_1D , которое равно 2. Дальнейшее решение очевидно. Ответ: $\frac{16}{3}(10\sqrt{3} + 9) \text{ см}^2$.

Вар. 8. Расстояние между AD и D_1C равно расстоянию между AD и плоскостью сечения BA_1D_1C . Из точки A опускаем перпендикуляр AM на прямую BC (M не принадлежит стороне BC) и точку M соединяем с точкой A_1 . В треугольнике A_1AM опускаем высоту AK на A_1M . Можно доказать, что длина AK и есть расстояние между AD и D_1C , которое равно $\frac{12}{5}$. Из треугольника A_1AM находим, что $AM = 3$. Дальнейшее решение очевидно. Ответ: $44\sqrt{3} \text{ см}^2$.

С—15

Вар. 1. 2. 350 см^2 .

Вар. 2. 2. 75 см^2 .

Вар. 3. 1. ab . 2. $120^\circ, 60^\circ$.

Вар. 4. 1. $ab\sqrt{2}$. 2. $60^\circ, 120^\circ$.

Вар. 5. 1. $\frac{Q}{2}(2 + \sqrt{13})$.

2. Строим перпендикулярное сечение $A_2B_2C_2D_2$ параллелепипеда. Тогда $A_2B_2 = 17$, а $B_2D_2 = 10$. Длина высоты A_2K треугольника $B_2A_2D_2$ и есть расстояние между AA_1 и B_1D , которое равно 8. Из треугольника $B_2A_2D_2$ находим, что $B_2D_2 = 21$ или 9. Зная площадь диагонального сечения BB_1D_1D , находим возможную длину бокового ребра, которая равна 10 или $\frac{210}{9}$. В таком случае площадь боковой поверхности равна 540 или 1260. Ответ: 540 или 1260.

Вар. 6. 1. $Q\sqrt{7}$.

2. $4(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$. Решается аналогично задаче 2 из варианта 5.

Вар. 7. 1. Высота A_1K параллелепипеда проектируется на диагональ основания AC . Из точки K опускаем перпендикуляр на AD и точки A_1 и M соединяем. Легко доказать, что A_1M — высота боковой грани AA_1D_1D . Из треугольника AA_1K находим, что $AK = 8$.

Используя подобие треугольников AKM и AOD (O — точка пересечения AC и BD), находим, что $KM = \frac{24}{5}$. Из треугольника A_1KM

находим, что $A_1M = \frac{26}{5}$. Тогда

$S_{\text{бок}} = 520$. Ответ: 520.

2. Применяя теорему о трех перпендикулярах, можно доказать, что $AC \perp B_1B$ (рис. 108). Перпендикулярным сечением призмы является прямоугольный $\triangle ACF$

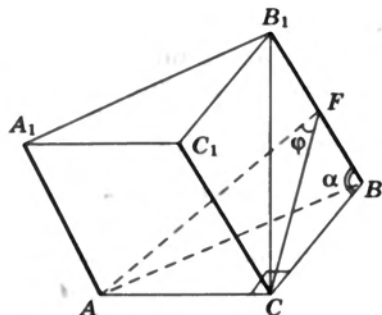


Рис. 108

$$(\angle ACF = 90^\circ), \quad CF = a \sin \alpha, \quad AC = a \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi, \quad AF = \frac{a \sin \alpha}{\cos \varphi}.$$

Периметр перпендикулярного сечения

$$P = a \sin \alpha \left(1 + \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{\cos \varphi} \right) = \frac{a \sin \alpha (1 + \cos \varphi + \sin \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Из треугольника B_1CB находим, что

$$BB_1 = \frac{a}{\cos \alpha} \cdot S_{\text{бок}} = \frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha (1 + \cos \varphi + \sin \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Ответ: $\frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha (1 + \cos \varphi + \sin \varphi)}{\cos \varphi}.$

Вар. 8. 1. Пусть A_1K — высота параллелепипеда, $K \in BD$. Так как $\angle A_1AD = \angle A_1AB$, то AK — биссектриса треугольника ABD . По теореме косинусов находим, что $AB = 13$, и, используя свойство биссектрисы треугольника, находим, что $KD = \frac{15}{4}$. Тогда

высота параллелепипеда $A_1K = \frac{15}{4}$ ($\angle A_1DK = 45^\circ$). Из точки K опускаем перпендикуляр KF на AD и точки A_1 и F соединяем, A_1F — высота боковой грани AA_1D_1D , $KF = KD \cdot \sin 60^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{8}$.

Из $\triangle A_1KF$ находим, что $A_1F = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{15\sqrt{7}}{8}$.

Легко доказать, что высота грани AA_1B_1B тоже равна $\frac{15\sqrt{7}}{8}$.

$$S_{\text{бок}} = 56 \cdot \frac{15\sqrt{7}}{8} = 105\sqrt{7}. \quad \text{Ответ: } 105\sqrt{7}.$$

2. $\frac{l^2 \sin 2\varphi (1 + \cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha}$. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 7.

Вар. 1. 1. 96 см^2 . 2. $\arctg 2\sqrt{3} \approx 73^\circ 54'$, $\arctg 4\sqrt{3} \approx 81^\circ 47'$.

Вар. 2. 1. $270\sqrt{3} \text{ см}^2$. 2. $\arctg 6 \approx 80^\circ 32'$, $\arctg 3\sqrt{2} \approx 76^\circ 44'$.

Вар. 3. 1. $24\sqrt{3}$. 2. 1) $2 \arctg \sqrt{2} \approx 109^\circ 28'$; 2) 60° .

Вар. 4. 1. 128.

2. 1) $2 \arctg \frac{2}{3} \approx 67^\circ 23'$; 2) $180^\circ - 2 \arctg \frac{\sqrt{13}}{4} \approx 51^\circ 19'$.

Вар. 5. 1. $a^2 \sqrt{2}$. 2. $2 \arctg \left(\cos \varphi \cdot \tg \frac{180^\circ}{n} \right)$; $\approx 27^\circ 57'$.

Вар. 6. 1. $\frac{3m^2 \sqrt{2}}{8}$. 2. $\arccos \left(\tg \frac{\alpha}{2} \cdot \ctg \frac{180^\circ}{n} \right)$; $\approx 56^\circ 28'$.

Вар. 7. 1. На рисунке 109 $AK \perp MF$. Можно доказать, что AK перпендикулярна плоскости CMB . Тогда $\angle ACK$ есть угол между AC и плоскостью CMB , $OF = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $MF = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{7a}{2\sqrt{3}}$,

$AK \cdot MF = MO \cdot AF$. Отсюда следует, что $AK = \frac{MO \cdot AF}{MF} = \frac{6a}{7}$,

$\sin \angle ACK = \frac{AK}{AC} = \frac{6}{7}$, $\angle ACK \approx 59^\circ$. Ответ: $\arcsin \frac{6}{7} \approx 59^\circ$.

2. Плоскости PBC и PAF пересекаются по прямой NP (рис. 110), $KM \perp PN$. Можно доказать, что $\angle BMA = \alpha$, $MK = \frac{a}{2} \ctg \frac{\alpha}{2}$. Из подобия треугольников NMK и NPO следует, что $\frac{PO}{MK} = \frac{NO}{MN}$. Отсюда $PO = \frac{NO \cdot MK}{MN}$. Из $\triangle NMK$ следует, что

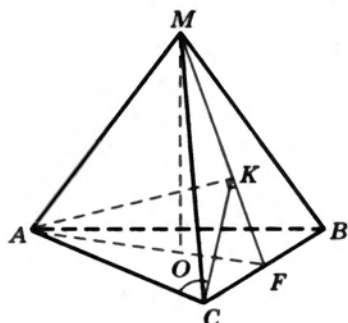


Рис. 109

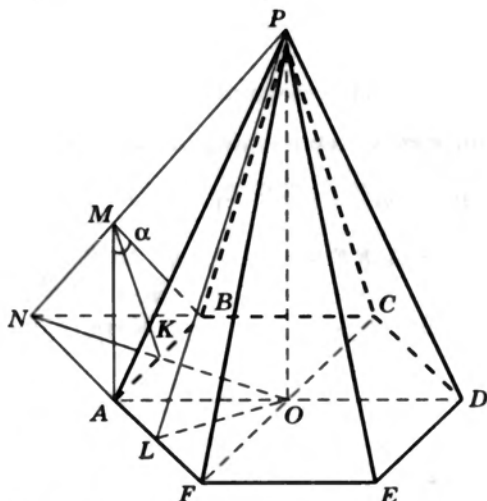


Рис. 110

$$MN = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

В таком случае $PO = \frac{a\sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}$. Из треугольника POL следует,

что апофема пирамиды

$$PL = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{3 + 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{3a}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}},$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{осн}} \cdot PL = \frac{9a^2}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

Ответ: $\frac{9a^2}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}.$

Вар. 8. 1. На рисунке 111 EK — перпендикуляр к плоскости CMD . Плоскость, определяемая прямыми AB и EK , пересекает плоскость CMD по прямой, параллельной AB ; $AP \parallel EK$, а так как EK — перпендикуляр к плоскости CMD , то и AP — перпендикуляр к той же плоскости. В таком случае $\angle AMP = \alpha$ — искомый;

$$MF = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}, \quad MO \cdot EF = EK \cdot MF.$$

Отсюда

$$EK = \frac{MO \cdot EF}{MF} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a \cdot 2}{3a} = \frac{2a\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{но } AP = EK = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

Из треугольника AMP

$$\sin \alpha = \frac{AP}{AM} = \frac{AM}{\sqrt{2a^2 + \frac{2a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{10}}{15}.$$

$$\text{Тогда } \sin \alpha = \frac{4\sqrt{5}}{15},$$

$$\alpha = \arcsin \frac{4\sqrt{5}}{15} \approx 36^\circ 36'.$$

$$\text{Ответ: } \arcsin \frac{4\sqrt{5}}{15} \approx 36^\circ 36'.$$

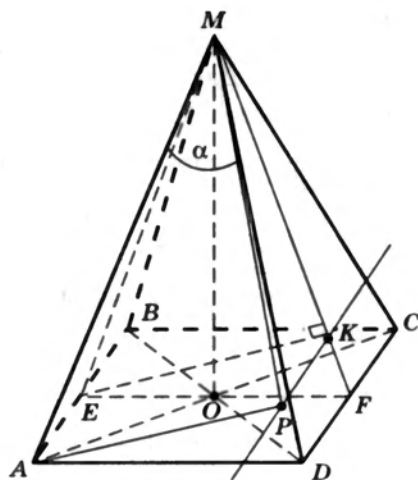


Рис. 111

$$2. \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}. \text{ Задача решается аналогично задаче 2}$$

из варианта 7.

C—17

Вар. 1. 1. $a\sqrt{3}$. 2. $12(5\sqrt{3} + 8)$.

Вар. 2. 1. a . 2. $100(3 + 2\sqrt{6})$.

Вар. 3. 1. 1) $2\sqrt{3}$ см; 2) 40 см^2 . 2. $\frac{a^2}{2}(3 + 2\sqrt{3})$.

Вар. 4. 1. $\frac{a\sqrt{3}}{4}, \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. 2. $\frac{a^2}{4}(3 + \sqrt{6} + \sqrt{3})$.

Вар. 5. 1. $\frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi, \frac{b^2 \operatorname{tg} \alpha}{4 \cos \varphi}$.

2. $480(5 + 2\sqrt{3})$. Необходимо учесть, что грани MAC и MAV наклонены к основанию под углом 60° .

Вар. 6. 1. $\frac{a \operatorname{tg} \varphi}{4 \cos \frac{\alpha}{2}}, \frac{a^2}{8 \sin \alpha \cdot \cos \varphi}$.

2. $3(1 + 2\sqrt{2}) \text{ см}^2$. Необходимо учесть, что грани MAV и MBC наклонены к основанию под углом 45° .

Вар. 7. 1. Так как площади боковых граней равны между собой и в основании пирамиды лежит правильный треугольник, то высоты боковых граней, опущенные из вершины пирамиды, равны между собой. Это значит, что вершина пирамиды одинаково удалена от сторон основания или от прямых, на которых лежат эти стороны. В таком случае вершина пирамиды проектируется либо в центр вписанной в основание окружности, либо в один из центров невписанных окружностей. Для данного случая возможны только два различных варианта (рис. 112, а, б). В случае а радиус вписанной окружности

равен $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ и высота боковой грани равна $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$. Тогда

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{осн}} \cdot h_{\text{бок. грани}} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} = \frac{a^2 \sqrt{39}}{4}.$$

В случае б радиус невписанной окружности определяется по формуле $r_a = \frac{S}{p-a}$, где r_a — радиус невписанной окружности, кото-

рая касается стороны a ; S — площадь треугольника; p — его полупериметр. Радиус невписанной окружности $r = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4\left(\frac{3a}{2} - a\right)} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

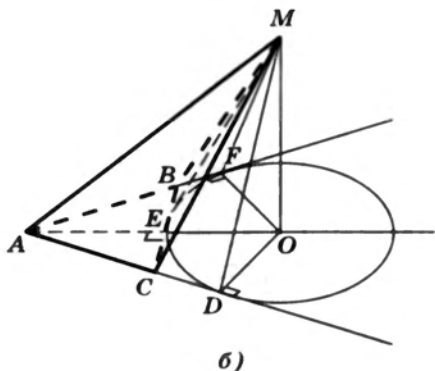
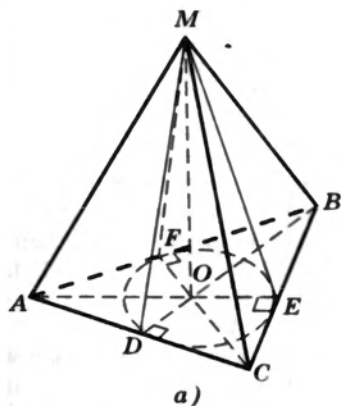


Рис. 112

Тогда высоты боковых граней равны: $\sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$, $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot h_{\text{бок. грани}} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{4}$. Ответ: $\frac{a^2\sqrt{39}}{4}$ или $\frac{3a^2\sqrt{7}}{4}$.

2. Пусть высоты AD , BE и CK треугольника ABC , лежащего в основании пирамиды $MABC$, пересекаются в точке O . По условию MO — высота пирамиды. По теореме о трех перпендикулярах $ME \perp AC$. Тогда из треугольников MEA и MEC следует, что $ME^2 = MA^2 - AE^2$, $ME^2 = MC^2 - EC^2$. Отсюда

$$MA^2 - MC^2 = AE^2 - EC^2. \quad (1)$$

Из треугольников BEA и BEC следует, что $AE^2 = AB^2 - BE^2$, $EC^2 = BC^2 - BE^2$. Отсюда

$$AE^2 - EC^2 = AB^2 - BC^2. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) имеем $MA^2 - MC^2 = AB^2 - BC^2$, т. е. $MA^2 + BC^2 = MC^2 + AB^2$ (MA и BC , MC и AB — скрещивающиеся ребра пирамиды). Аналогично можно получить, что

$$MA^2 + BC^2 = MB^2 + AC^2.$$

Вар. 8. 1. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7. Следует только учесть, что так как $\angle MAB \neq \angle MAC$, то вершина пирамиды может проектироваться только в центры вневписанных окружностей, которые касаются равных сторон основания; $S_{ABC} = 60$, $p = 25$. Радиус вневписанной окружности

$$r = \frac{60}{25 - 13} = 5.$$

Тогда высота боковых граней равна 13 и

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot h_{\text{бок. грани}} = 25 \cdot 13 = 325.$$

Ответ: 325.

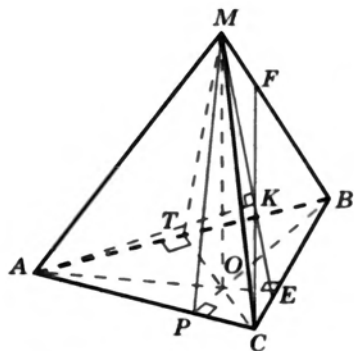


Рис. 113

плоскости, CK — ее проекция на эту плоскость, MB лежит в этой плоскости и $MB \perp AC$ (доказывается элементарно). Тогда на основании теоремы о трех перпендикулярах $CK \perp MB$, т. е. и $CF \perp MB$. Это значит, что точка K — точка пересечения высот грани MBC . Для остальных высот пирамиды доказательство аналогично.

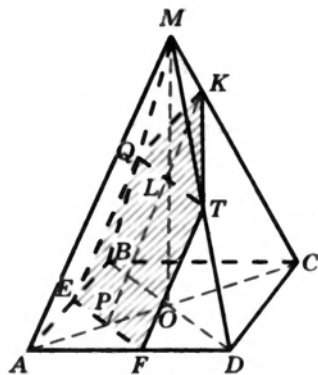


Рис. 114

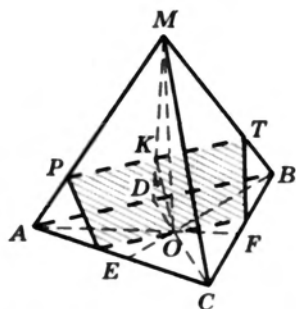


Рис. 115

2. Пусть высоты AE , BP и CT треугольника ABC , лежащего в основании пирамиды $MABC$, пересекаются в точке O и пусть MO — перпендикуляр к плоскости ABC . Докажем, что высота AK пирамиды, опущенная из вершины A , проектируется в точку K — точку пересечения высот грани MBC . По теореме о трех перпендикулярах $ME \perp BC$ (рис. 113). По построению $AK \perp ME$. Тогда легко доказать, что AK — перпендикуляр к плоскости MBC . Теперь имеем $AK \perp MBC$, AC — наклонная к этой

С—18

Вар. 1. 1. $\frac{a^2 \sqrt{3}}{24}$. 2. $28\sqrt{2} \text{ см}^2$.

Вар. 2. 1. $\frac{a^2}{2}$. 2. $14\sqrt{3} \text{ см}^2$.

Вар. 3. 1. $\frac{3a^2}{8}$. 2. 96 см^2 .

Вар. 4. 1. $\frac{3a^2 \sqrt{3}}{8}$. 2. $42\sqrt{3} \text{ см}^2$.

Вар. 5. 1. $\frac{5ab\sqrt{2}}{16}$. Сечение показ-

но на рисунке 114. Необходимо учесть, что EQT — прямоугольник.

2. $105\sqrt{3}, 8\sqrt{6}$.

Вар. 6. 1. $\frac{17a^2}{96}$. Сечение показ-

но на рисунке 115; OK — перпендикуляр к плоскости AMB , $PT \parallel AB$ и находится из подобия треугольников PMT и AMB .

2. $24\sqrt{3}, 2\sqrt{6}$. Необходимо доказать, что сечением служит прямоугольник. Тогда длина бокового ребра равна 4. Дальнейшее решение очевидно.

Вар. 7. 1. Сечение показано на рисунке 116; $AP \perp MC$ и $EF \parallel BD$, причем $KE = KF$ и $EF \perp AP$,

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} AP \cdot EF,$$

$$AP = a\sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Точка K — центр правильного треугольника BMD , а потому

$$EF = \frac{2}{3} BD = \frac{2}{3} a\sqrt{2},$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{2}{3} a\sqrt{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{a^2 \sqrt{3}}{3}$.

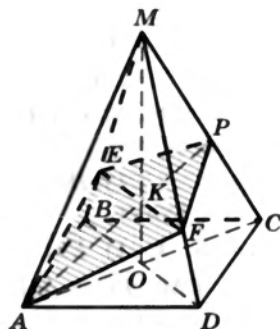


Рис. 116

2. Необходимо сначала найти площадь боковой поверхности полной пирамиды, которая равна $\frac{380\sqrt{3}}{3}$. Площади боковых поверхностей отсеченной треугольной пирамиды и полной пирамиды относятся как 4 : 25. Тогда

$$S_{\text{усеч. пирамиды}} = \frac{21}{25} \cdot S_{\text{бок. полной пирамиды}} = \frac{21}{25} \cdot \frac{380\sqrt{3}}{3} = \frac{532\sqrt{3}}{5}.$$

Ответ: $\frac{532\sqrt{3}}{5}$.

Вар. 8. 1. 120 см^2 . Сечение показано на рисунке 117. Необходимо учесть, что $AK = \frac{1}{2} MC$ и точка P — точка пересечения медиан

треугольника BMD . В остальном задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7.

2. $\frac{15}{4} (77 + 3\sqrt{281}) \text{ см}^2$. Прин-

цип решения задачи аналогичен задаче 2 из варианта 7.

$$S_{\text{бок. усеч. пирамиды}} = \frac{15}{16} \cdot S_{\text{бок. полной пирамиды}}.$$

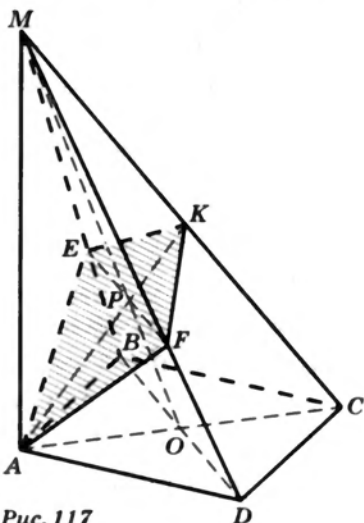


Рис. 117

С—19

Вар. 1. 1. 1) $\overrightarrow{B_1D_1}, \overrightarrow{BD}$;
2) $\overrightarrow{B_1A}, \overrightarrow{C_1D}$; 3) $\overrightarrow{C_1A_1}, \overrightarrow{B_1D_1}, \overrightarrow{D_1B_1}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}$.

2. Если $a \parallel \alpha$.

Вар. 2. 1. 1) $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{C_1B}$; 2) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$; 3) $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{B_1A}$, $\overrightarrow{D_1C}$, $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{C_1D}$. 2. Да, могут. Например, если $\alpha \parallel \beta$.

Вар. 3. 1. 1) $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{C_1B_1}$; 2) $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{AA_1}$; 3) $\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{BC_1}$.

2. Да, будут.

Вар. 4. 1. 1) $\overrightarrow{B_1D_1}$, $\overrightarrow{BD}$; 2) $\overrightarrow{C_1D}$, $\overrightarrow{B_1A}$; 3) $\overrightarrow{DB_1}$, $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{D_1B}$.

2. Да, будут.

Вар. 5. 1. 1) $\overrightarrow{EM}$ и $\overrightarrow{TK}$, $\overrightarrow{KT}$ и $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{TM}$ и $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{MT}$ и $\overrightarrow{KE}$;

2) $\overrightarrow{KT}$ и $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{TK}$ и $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{EK}$ и $\overrightarrow{MT}$, $\overrightarrow{KE}$ и $\overrightarrow{TM}$;

3) $\overrightarrow{KT}$, $\overrightarrow{TK}$, $\overrightarrow{EM}$ и $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{MT}$ и $\overrightarrow{TM}$, $\overrightarrow{ET}$, $\overrightarrow{TE}$, $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{MK}$.

2. $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{OE}$.

Вар. 6. 1. 1) $\overrightarrow{MT}$ и $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{TM}$ и $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{TE}$, $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{ET}$;

2) $\overrightarrow{MT}$ и $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{TM}$ и $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{TE}$, $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{ET}$;

3) $\overrightarrow{MT}$, $\overrightarrow{TM}$, $\overrightarrow{KE}$ и $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{TE}$ и $\overrightarrow{ET}$, $\overrightarrow{KT}$, $\overrightarrow{TK}$, $\overrightarrow{ME}$ и $\overrightarrow{EM}$.

2. $\overrightarrow{EB_1}$ и $\overrightarrow{FC}$.

Вар. 7. 1. 1) $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{E_1D_1}$, $\overrightarrow{F_1C_1}$;

2) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{F_1D_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$.

2. Необходимо через точку M провести плоскость, параллельную плоскости основания. Пусть эта плоскость пересечет ребра BB_1 и CC_1 в точках K и P . Тогда $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{OC}$.

1) Точки F и E лежат на медианах AP и CP треугольников ADB и CDB . Так как $\frac{EP}{AP} = \frac{EP}{CP} = \frac{1}{3}$, то $FE \parallel AC$. Из второго условия следует, что $MN \parallel AC$. Тогда $FE \parallel MN$ и векторы $\overrightarrow{FE}$ и $\overrightarrow{MN}$ коллинеарны. 2) $|\overrightarrow{FE}| = 6$ см.

Вар. 8. 1. 1) а) $\overrightarrow{F_1C_1}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{E_1D_1}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ED}$;

б) $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{C_1F_1}$, $\overrightarrow{F_1C_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{B_1E_1}$, $\overrightarrow{E_1B_1}$;

2) $\overrightarrow{A_1E}$ и $\overrightarrow{A_1F_1}$.

2. 1) Задача решается аналогично задаче 2, пункт 1 из варианта 7. 2) $|\overrightarrow{FE}| = 9$ см.

С—20

Вар. 1. 1. $\overrightarrow{AD_1}$.

Вар. 2. 1. $\vec{0}$.

Вар. 3. 1. $\overrightarrow{AC_1}$. 2. 17 см.

Вар. 4. 1. $\overrightarrow{DC}$. 2. 3 см.

Вар. 5. 1. $a\sqrt{2}$. Необходимо учесть, что $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CE}$. Тогда $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FE}$, $|\overrightarrow{FE}| = a\sqrt{2}$.

2. Составим разность: $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1} - \overrightarrow{CA_1} =$
 $= (\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB_1}) + (\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BC_1}) + (\overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{CA_1}) = \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{A_1C_1} =$
 $= \overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{AA_1} = \vec{0}$, откуда и следует доказываемое.

Вар. 6. 1. $|\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CT} + \overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CT} + \overrightarrow{TA}| = |\overrightarrow{KA}|$.
 $\triangle APC$ — прямоугольный ($\angle APC = 90^\circ$). Тогда $KA = \sqrt{AP^2 + PK^2} =$
 $= \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Ответ: $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

2. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 5.

Вар. 7. 1. $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{DA_1} - (\overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DC_1}) =$
 $= \overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{DC_1}$.

2. M — точка пересечения диагоналей параллелепипеда.

Вар. 8. 1. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DA_1} + \overrightarrow{DB_1} -$
 $- \overrightarrow{DC_1} = 2\overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{DC_1}$.

2. K — центр симметрии октаэдра.

С—21

Вар. 1. 2. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Вар. 2. 2. $2(\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MF})$.

Вар. 3. 1. $\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. 2. $-\frac{1}{2}$.

Вар. 4. 1. $\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BM}$. 2. -2 .

Вар. 5. 1. $\overrightarrow{MB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

2. Из данного равенства следует, что $(3 - m)\vec{a} = (2n - 4)\vec{b}$.
 Отсюда $m = 3$ и $n = 2$.

Вар. 6. 1. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{C_1P} = \overrightarrow{AC_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{AC_1} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CC_1}) =$
 $= \overrightarrow{AC_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$. Необходимо учесть, что P — точка пересече-
 ния медиан треугольника CB_1B .

2. $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$. Решается аналогично задаче 2 из варианта 5.

Вар. 7. 1. Основание высоты DM — точка M лежит на сто-
 роне BC , причем AM — биссектриса $\triangle ABC$. В таком случае
 $\frac{CM}{MB} = \frac{a}{b}$, $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{AB} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AC}$. Отсюда
 $\overrightarrow{DM} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{AB} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = be_2$, $\overrightarrow{AC} = ae_1$, $\overrightarrow{AD} = ce_3$.

Тогда $\overrightarrow{DM} = \frac{ab}{a+b}\vec{e}_1 + \frac{ab}{a+b}\vec{e}_2 - c\vec{e}_3$. Ответ: $\frac{ab}{a+b}\vec{e}_1 + \frac{ab}{a+b}\vec{e}_2 - c\vec{e}_3$.

$$2. \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{OA} + k\vec{BC} = \vec{OA} + k(\vec{OC} - \vec{OB}) = \vec{a} + k\vec{c} - k\vec{b}.$$

Ответ: $\vec{a} + k\vec{c} - k\vec{b}$.

Вар. 8. 1. Исходя из условия следует, что вершина A_1 проектируется на биссектрису AP угла BAD ($P \in BC$). В таком случае $AB = BP = b$, $\vec{A_1P} = \vec{AP} - \vec{AA_1}$, $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP} = \vec{AB} + \frac{b}{a}\vec{AD}$. Тогда

$$\vec{A_1P} = \vec{AB} + \frac{b}{a}\vec{AD} - \vec{AA_1} = b\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3. \quad \text{Ответ: } b\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3.$$

2. Из подобия треугольников EPF и ABC следует, что $\frac{EF}{AC} = \frac{2}{5}$,

$$\vec{OF} = \vec{OE} + \vec{EF} = \vec{OE} + \frac{2}{5}\vec{AC} = \vec{OE} + \frac{2}{5}(\vec{OC} - \vec{OA}) = \vec{m} + \frac{2}{5}\vec{k} - \frac{2}{5}\vec{p}.$$

Ответ: $\vec{m} + \frac{2}{5}\vec{k} - \frac{2}{5}\vec{p}$.

C—22

$$\text{Вар. 1. 1. } \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c} - \vec{b}. \quad 2. \vec{DA} + \frac{2}{3}\vec{DC} + \frac{1}{3}\vec{DD_1}.$$

$$\text{Вар. 2. 1. } \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}. \quad 2. \frac{1}{3}\vec{CA} + \frac{1}{3}\vec{CB} - \vec{CD}.$$

$$\text{Вар. 3. 1. } \frac{3}{4}\vec{AD} + \frac{2}{7}\vec{AB} + \frac{2}{7}\vec{AA}.$$

2. Рассмотрим тетраэдр $DABC$. Пусть E — середина ребра AC , а F — середина ребра DB и пусть O — середина отрезка EF . Тогда $\vec{CO} = \frac{1}{2}(\vec{CE} + \vec{CF}) = \frac{1}{4}\vec{CA} + \frac{1}{4}\vec{CB} + \frac{1}{4}\vec{CD}$.

Пусть теперь P — середина AD , F — середина BC и O_1 — середина PF . Тогда $\vec{CO_1} = \frac{1}{4}\vec{CA} + \frac{1}{4}\vec{CB} + \frac{1}{4}\vec{CD}$.

Если теперь рассмотрим точку O_2 — середину отрезка, соединяющего середины ребер AB и DC , то и в этом случае получим, что

$$\vec{CO_2} = \frac{1}{4}\vec{CA} + \frac{1}{4}\vec{CB} + \frac{1}{4}\vec{CD}.$$

Отсюда вытекает, что $\vec{CO} = \vec{CO_1} = \vec{CO_2}$, т. е. точки O , O_1 и O_2 совпадают. Этим и доказывается данное утверждение.

$$\text{Вар. 4. 1. } \frac{1}{12}\vec{CA} - \frac{1}{3}\vec{CB} + \frac{3}{4}\vec{CD}.$$

2. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 3.

$$\text{Вар. 5. 1. } \vec{AD_1} = \vec{AF} + \vec{FE} + \vec{ED} + \vec{DD_1} = \vec{AF} + \vec{AB} + \vec{AF} + \vec{AB} + \vec{DD_1} = 2\vec{AF} + 2\vec{AB} + \vec{DD_1} = 2a\vec{e}_1 + 2a\vec{e}_2 + a \operatorname{tg} \varphi \vec{e}_3.$$

Ответ: $2a\vec{e}_1 + 2a\vec{e}_2 + a \operatorname{tg} \varphi \vec{e}_3$.

2. Рассмотрим призму $ABCA_1B_1C_1$. Пусть $A_2B_2C_2$ — сечение призмы плоскостью, параллельной основаниям, M_1 и M — точки пересечения медиан соответственно верхнего и нижнего оснований,

а M_2 — точка пересечения медиан сечения. Выберем в пространстве произвольную точку O . Тогда получим $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OC_1}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2})$.

Аналогично $\overrightarrow{M_1M} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{C_1C})$. Отметим, что $\frac{A_1A_2}{A_1A} = = \frac{B_1B_2}{B_1B} = \frac{C_1C_2}{C_1C} = k$. Тогда

$$\overrightarrow{M_1M_2} = k \cdot \frac{1}{3} (\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{C_1C}) = k \cdot \overrightarrow{M_1M}.$$

Это и значит, что точки M_1 , M_2 и M лежат на одной прямой.

Вар. 6. 1. $\frac{4}{5}a\vec{e}_1 + \frac{4}{5}a\vec{e}_2 + \frac{3a}{5\cos\varphi}\vec{e}_3$. Задача решается анало-

гично задаче 1 из варианта 5.

2. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 5.

Вар. 7. 1. Пусть $\frac{BM}{MD} = \frac{x}{y}$, $\frac{PN}{NC} = \frac{m}{n}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = = \frac{y}{x+y} \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \frac{n}{m+n} \overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AP}$.

Тогда $\overrightarrow{MN} = \frac{y}{x+y} (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} + \frac{n}{m+n} (-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AP}) = = \left(\frac{y}{x+y} - \frac{n}{m+n} \right) \overrightarrow{AD} + \left(1 - \frac{y}{x+y} - \frac{n}{m+n} \right) \overrightarrow{AB} + \frac{n}{m+n} \overrightarrow{AP}$, (1)

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AP}$. Так как $MN \parallel AF$, то

$$\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{AF} = \frac{k}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{2} \overrightarrow{AP}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$\begin{cases} \frac{y}{x+y} - \frac{n}{m+n} = 0, \\ 1 - \frac{y}{x+y} - \frac{n}{m+n} = \frac{k}{2}, \\ \frac{n}{m+n} = \frac{k}{2}. \end{cases}$$

Отсюда можно получить, что $k = \frac{2}{3}$. Так как $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{AF}$, то

$$|\overrightarrow{MN}| = |k| \cdot |\overrightarrow{AF}|, \quad \frac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{AF}|} = |k|. \quad \text{т. е.} \quad \frac{MN}{AF} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} 2. \quad z &= 1 - x - y, \quad \vec{OD} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB} + (1 - x - y) \cdot \vec{OC}, \\ \vec{CD} &= \vec{OD} - \vec{OC} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB} + \vec{OC} - x \cdot \vec{OC} - y \cdot \vec{OC} - \vec{OC} = \\ &= x(\vec{OA} - \vec{OC}) + y(\vec{OB} - \vec{OC}) = x \cdot \vec{CA} + y \cdot \vec{CB}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что векторы $\vec{CD}$, $\vec{CA}$ и $\vec{CB}$ компланарны, т. е. точки A , B , C и D лежат в одной плоскости.

Вар. 8. 1. Пусть $\frac{BM}{MD} = \frac{m}{n}$, $\frac{B_1N}{NC} = \frac{x}{y}$,

$$\begin{aligned} \vec{MN} &= \vec{MD} + \vec{DC} + \vec{CN} = \frac{n}{m+n} \vec{BD} + \vec{DC} + \frac{y}{x+y} \vec{CB}_1 = \\ &= \frac{n}{m+n} (\vec{AD} - \vec{AB}) + \vec{AB} + \frac{y}{x+y} (\vec{AA}_1 - \vec{AD}) = \\ &= \left(\frac{n}{m+n} - \frac{y}{x+y} \right) \vec{AD} + \left(1 - \frac{n}{m+n} \right) \vec{AB} + \frac{y}{x+y} \vec{AA}_1, \end{aligned} \quad (1)$$

$\vec{AC}_1 = \vec{AD} + \vec{AB} + \vec{AA}_1$. Так как $\vec{MN} \parallel \vec{AC}$, то

$$\vec{MN} = k \vec{AC}_1 = k \vec{AD} + k \vec{AB} + k \vec{AA}_1. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$\begin{cases} \frac{n}{m+n} - \frac{y}{x+y} = k, \\ 1 - \frac{n}{m+n} = k, \\ \frac{y}{x+y} = k. \end{cases}$$

Отсюда $k = \frac{1}{3}$, $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, $\frac{x}{y} = \frac{2}{1}$. Следовательно, $\frac{BM}{MD} = \frac{1}{2}$, $\frac{B_1N}{NC} = \frac{2}{1}$.

Ответ: $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}$.

2. Если точки A , B , C и D принадлежат одной плоскости, то $\vec{CD} = x \cdot \vec{CA} + y \cdot \vec{CB}$. Пусть O — произвольная точка пространства, тогда $\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC}$, $\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC}$, $\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC}$. Тогда $\vec{OD} - \vec{OC} = x \cdot \vec{OA} - x \cdot \vec{OC} + y \cdot \vec{OB} - y \cdot \vec{OC}$, $\vec{OD} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB} + (1 - x - y) \cdot \vec{OC} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB} + z \cdot \vec{OC}$, где $x + y + z = 1$.

С—23

Вар. 1. 1) $(6 + 2\sqrt{3}) \text{ см}^2$; 2) 2 см^2 ; 3) $\arctg \frac{1}{2}$; 4) 30° ; 5) 2 см .

Вар. 2. 1) $4(\sqrt{7} + 1) \text{ см}^2$; 2) $2\sqrt{3} \text{ см}^2$; 3) 60° ; 4) $\arccos \frac{1}{\sqrt{7}}$;

5) $2\sqrt{2} \text{ см}$.

- Вар. 3. 1) $4(4\sqrt{3} + 3) \text{ см}^2$; 2) $4\sqrt{3} \text{ см}^2$; 3) 60° ; 4) 30° ;
 5) $\vec{A_1M} = \frac{1}{3} \vec{A_1A} + \frac{1}{3} \vec{A_1B} + \frac{1}{3} \vec{A_1C}$; 6) 90° .
 Вар. 4. 1) $(12\sqrt{3} + \sqrt{156}) \text{ см}^2$; 2) $4\sqrt{3} \text{ см}^2$; 3) 60° ;
 4) $\arctg 2\sqrt{3} - 60^\circ$; 5) $\vec{DO} = \frac{1}{3} \vec{DA} + \frac{1}{3} \vec{DB} + \frac{1}{3} \vec{DC}$; 6) 90° .

Вар. 5. По данным задачи легко найти площадь треугольника ABC : $S_{ABC} = 84$. Площадь поверхности $S = P_{ABC} \cdot AA_1 + 2S_{ABC} = 588$ (рис. 118); MHC — сечение, площадь которого надо найти. Плоскости MHC и ABC пересекаются по прямой PQ , причем $PQ \parallel AB$. Из точки A опускаем перпендикуляр AP на прямую PQ и точки M и P соединяем; MP — высота треугольника MHC ;
 $AP = \frac{2S_{ABC}}{AB} = \frac{2 \cdot 84}{14} = 12$. Из треугольника MAP следует, что $MP = 13$; $S_{MHC} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 13 = 91$; $\angle MPA$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями MHC и ABC ;
 $\cos MPA = \frac{AP}{MP} = \frac{12}{13}$, отсюда $\angle MPA = \arccos \frac{12}{13}$; $\angle AMP$ — угол между прямой AA_1 и плоскостью MHC ; $\angle AMP = \arccos \frac{5}{13}$;

$$\vec{MK} = \frac{1}{2} \vec{MC} + \frac{1}{2} \vec{MH} = \frac{1}{2} \vec{MA} + \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{AB} = -\frac{1}{4} \vec{AA_1} + \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{AB}.$$

Ответ: 1) 588 см^2 ; 2) 91 см^2 ; 3) $\arccos \frac{12}{13}$; 4) $\arccos \frac{5}{13}$;
 5) $-\frac{1}{4} \vec{AA_1} + \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{AB}$; 6) см. рисунок 118.

Вар. 6. Так как $DA = DB = DC$, то вершина D проектируется в центр описанной около основания окружности, в данном случае на середину гипотенузы AC (рис. 119). Из точки O опускаем

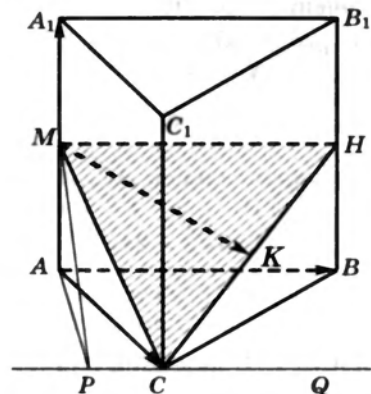


Рис. 118

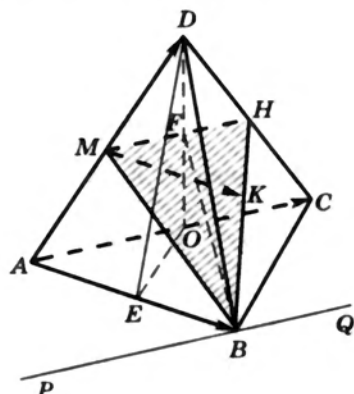


Рис. 119

перпендикуляр OE на AB и точки D и E соединяем; DE — высота боковой грани ADB , $DO = \sqrt{3}$, $OE = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Из треугольника DOE следует, что $DE = \sqrt{3 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$; $S_{бок} = \frac{1}{2} AC \cdot DO + 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot DE = \sqrt{7} + \sqrt{3}$; FB — высота сечения BMH . Из треугольника FOB следует, что $FB = \sqrt{\frac{3}{4} + 1} = \frac{\sqrt{7}}{2}$; $S_{сеч} = \frac{1}{2} MH \cdot FB = \frac{1}{4} AC \cdot FB = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$; $\angle FBO$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями BMH и ABC ; $\operatorname{tg} \angle FBO = \frac{FO}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Отсюда $\angle FBO = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle DBF$ — угол между прямой BD и плоскостью BMH , $\operatorname{tg} \angle DBO = \frac{DO}{OB} = \sqrt{3}$. Отсюда $\angle DBO = 60^\circ$. Тогда

$$\angle DBF = 60^\circ - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MK} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{MH} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} = \\ &= -\frac{1}{4} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Ответ: 1) $(\sqrt{7} + \sqrt{3}) \text{ см}^2$; 2) $\frac{\sqrt{7}}{4} \text{ см}^2$; 3) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $60^\circ - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $-\frac{1}{4} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$; 6) см. рисунок 119.

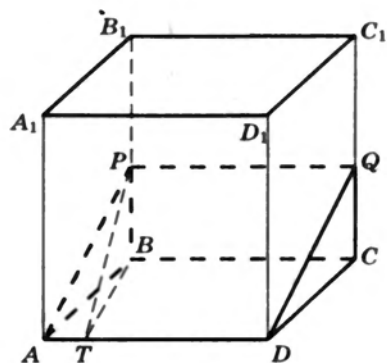
Вар. 7. 1. Сечение, проведенное через AD и точку P , показано на рисунке 120, а; $PQ \parallel AD$. Из точки B опускаем перпендикуляр BT на сторону AD и точки P и T соединяем. Очевидно, что $PT \perp AD$; PBT — перпендикулярное сечение призмы $APBDQC$.

$$S_{бок} = P_{PBT} \cdot AD \cdot AD = 5, BT = \frac{24}{5}, PT = \sqrt{\frac{576}{25} + 4} = \frac{26}{5},$$

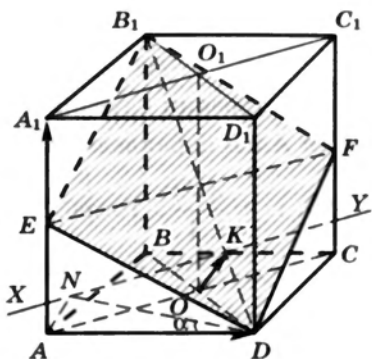
$$P_{перп. сеч} = \frac{24}{5} + \frac{26}{5} + 2 = 12, S_{бок} = 12 \cdot 5 = 60.$$

2. Сечение, проходящее через B_1D и параллельное AC , показано на рисунке 120, б, причем $EF \parallel AC$ и $EF \perp B_1D$; $S_{сеч} = \frac{1}{2} EF \cdot B_1D$, но $EF = AC$. Тогда $S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$.

В плоскости BB_1D_1 опускаем перпендикуляр OK из точки O на B_1D . Можно доказать, что OK — перпендикуляр к плоскости сечения; $OK = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Расстояние между AA_1 и B_1D является длиной отрезка AO ; $AO = 4$. Очевидно, что $B_1K : KD = 3 : 1$. Тогда имеем



а)



б)

Рис. 120

$$\begin{aligned}\vec{OK} &= \frac{1}{4} \vec{OB_1} + \frac{3}{4} \vec{OD} = \frac{1}{4} (\vec{OB} + \vec{BB_1}) + \frac{3}{8} \vec{BD} = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \vec{BD} + \vec{AA_1} \right) + \frac{3}{8} \vec{BD} = \frac{1}{4} \vec{BD} + \frac{1}{4} \vec{AA_1} = \\ &= \frac{1}{4} (\vec{AD} - \vec{AB}) + \frac{1}{4} \vec{AA_1} = -\frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AD} + \frac{1}{4} \vec{AA_1}.\end{aligned}$$

Плоскость, заданная пересекающимися прямыми AC и OK , пересекает плоскость сечения по прямой XY , которая параллельна AC . В этой плоскости проводим $AN \parallel OK$. Очевидно, что AN — перпендикуляр к плоскости сечения и $\angle ADN = \alpha$ есть угол между AD и плоскостью сечения; $\sin \alpha = \frac{AN}{AD} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$; $\alpha = \arcsin \frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Ответ: 1. 60 см^2 . 2. 1) $24\sqrt{2} \text{ см}^2$; 2) $\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ см}$; 3) 4 см ;

4) $-\frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AD} + \frac{1}{4} \vec{AA_1}$; 5) $\arcsin \frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Вар. 8. 1) Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей боковых граней, причем треугольники MAD и MBC — равные равнобедренные прямоугольные треугольники. Высота пирамиды $MO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (рис. 121). На рисунке $OE \perp CD$, тогда и $ME \perp CD$. Высота треугольника DMC $ME = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. Следовательно,

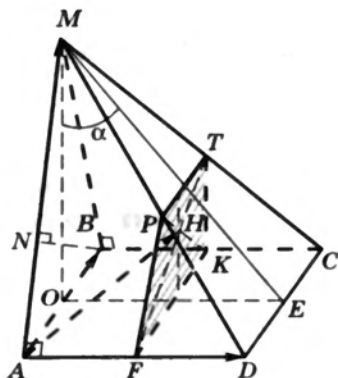


Рис. 121

$$S_{\text{бок}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a \cdot \frac{a \sqrt{7}}{2} = \frac{a^2}{4} (\sqrt{3} + \sqrt{7} + 4).$$

При построении сечения учитывалось, что плоскости сечения и грани AMB параллельны; $PT = \frac{a}{2}$, $FK = a$, а высота сечения равна

$\frac{1}{2} MO$, т. е. $\frac{a \sqrt{3}}{4}$. Тогда

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{a \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{16}.$$

Легко доказать, что линейным углом двугранного угла, образованного гранями DMC и AMB , является $\angle OME = \alpha$,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OE}{OM} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Так как AD — перпендикуляр к плоскости AMB , то $\angle AMD$ есть угол между AD и плоскостью AMB , но плоскость сечения параллельна плоскости AMB , а потому искомый угол равен величине угла AMD , т. е. 45° . Из подобия треугольников PHT и FHK следует, что $HT : HF = 1 : 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \vec{AH} &= \frac{2}{3} \vec{AT} + \frac{1}{3} \vec{AF} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (\vec{AM} + \vec{AC}) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \vec{AD} = \\ &= \frac{1}{3} \vec{AM} + \frac{1}{3} \vec{AC} + \frac{1}{6} \vec{AD} = \frac{1}{3} \vec{AM} + \frac{1}{3} (\vec{AD} + \vec{AB}) + \frac{1}{6} \vec{AD} = \\ &= \frac{1}{3} \vec{AM} + \frac{1}{2} \vec{AD} + \frac{1}{3} \vec{AB}. \end{aligned}$$

Расстояние между BC и MD равно расстоянию между BC и плоскостью AMD , которая параллельна BC . Это расстояние равно длине высоты BN треугольника AMB , т. е. $\frac{a \sqrt{3}}{2}$.

Ответ: 1) $\frac{a^2}{4} (\sqrt{3} + \sqrt{7} + 4)$; 2) $\frac{3a^2 \sqrt{3}}{16}$; 3) $\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3}$; 4) 45° ;
5) $\frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AD} + \frac{1}{3} \vec{AM}$; 6) $\frac{a \sqrt{3}}{2}$.

Самостоятельные работы на повторение планиметрии

СП—1

Вар. 1. 1. 1) 20; 2) $-0,6$. 2. 1) 130; 2) $\sqrt{505}$. 3. 49.

Вар. 2. 1. 1) 500; 2) $-0,6$. 2. 1) 8; 2) $\frac{1}{2} \sqrt{106}$. 3. 49.

Bap. 3. 1. 1) 198; 2) 1. 2. 24. 3. 50.

Bap. 4. 1. 1) 285; 2) 5. 2. 60. 3. 50.

Bap. 5. 1. 150. 2. 100. 3. 1) 39; 2) 26.

Bap. 6. 1. 1050. 2. 4. 3. 1) 26; 2) $17\frac{1}{3}$.

Bap. 7. 1. 60. 2. 235. 2. 3. 1) 64; 2) 27.

Bap. 8. 1. 48. 2. $8\frac{1}{4}$, 11. 3. 1) 64; 2) 27.

СII—2

Bap. 1. 1. 1) $\sqrt{33}$; 2) $12\sqrt{2}$; 3) $1,5\sqrt{17}$.
2. 1) $6\sqrt{5}$; 2) $4\sqrt{10}$. 3. 9.

Bap. 2. 1. 1) $4\sqrt{15}$; 2) $8\sqrt{15}$; 3) $4\sqrt{6}$.
2. 1) $14\sqrt{5}$; 2) $\frac{14}{3}\sqrt{5}$. 3. 25.

Bap. 3. 1. 1) $\sqrt{183}$; 2) 16,5; 3) $\frac{11}{13}$.
2. 1) $10\sqrt{6}$; 2) 5; 3) 20. 3. 1) 12; 2) 18.

Bap. 4. 1. 1) $0,5\sqrt{82}$; 2) 16,5; 3) $\frac{13}{11}$.
2. 1) $\frac{10}{3}\sqrt{61}$; 2) 30; 3) $3\frac{1}{3}$. 3. 1) 12; 2) 36.

Bap. 5. 1. 60. 2. $\frac{a^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2 \cos 2\alpha}$. 3. 1) 16; 2) $8\pi - 16$.

Bap. 6. 1. $8\sqrt{7}$. 2. $\frac{1}{2}a^2(3 + 2 \cos 2\alpha) \sin 2\alpha$.
3. 1) 4; 2) $\frac{\pi - 2}{2}$.

Bap. 7. 1. 1) $\frac{a}{4 \cos \alpha \cdot \sin 1,5\alpha}$; 2) $\frac{1}{4}a^2 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin 1,5\alpha}$;
3) $\frac{a}{2\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha\right)}$; 4) $\frac{a}{1 + \cos \alpha}$.

2. 1) 27; 2) $\frac{3}{4}\pi\sqrt{3}$.

Bap. 8. 2. 1) 27; 2) $4\pi\sqrt{3} - 9$.

Дополнительные самостоятельные работы

ДС—1

Вар. 1. 1. Одна, две или три точки.

Вар. 2. 1. Две параллельные прямые, одна прямая или две точки.

Вар. 3. 1. Сохраняются все свойства прямоугольника как параллелограмма.

2. См. рисунок 122. Биссектриса l параллельна O_1M_1 .

3. Изображением служит произвольный треугольник $A_1B_1C_1$.

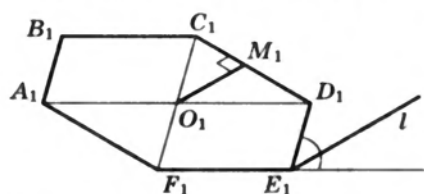


Рис. 122

Так как катеты треугольника относятся как 2 : 3, то их проекции на гипотенузу относятся как 4 : 9. Поэтому на изображении гипотенузы нужно построить такую точку K_1 , чтобы $A_1K_1 : K_1B_1 = 4 : 9$. Тогда C_1K_1 — изображение высоты треугольника.

Вар. 4. 1. Сохраняются все свойства ромба как параллелограмма.

2. Пусть $ABCD$ — ромб с углом BAD , равным 60° . Тогда треугольник ABD правильный и высота BE , опущенная на сторону AD , делит ее пополам. Перпендикуляр OF , опущенный из точки пересечения диагоналей O на AD , параллелен BE . Изображением ромба служит произвольный параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$. Строим медиану B_1E_1 треугольника $A_1B_1D_1$ и проводим $O_1F_1 \parallel B_1E_1$; O_1F_1 — искомый перпендикуляр.

3. Центр вписанной в треугольник окружности есть точка пересечения его биссектрис. Пусть произвольный треугольник $A_1B_1C_1$ есть изображение данного треугольника. Медиана B_1E_1 есть изображение одной из биссектрис этого треугольника. Чтобы построить изображение другой биссектрисы, необходимо на стороне B_1C_1 построить такую точку K_1 , что $B_1K_1 : K_1C_1 = 4 : 5$. Тогда A_1K_1 — изображение второй биссектрисы. Точка их пересечения и есть изображение центра вписанной в треугольник окружности.

Вар. 5. 1. Две пересекающиеся прямые, две параллельные прямые, прямая и точка.

2. Пусть параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ есть изображение данного квадрата и точка E_1 — середина A_1D_1 . В оригинале катеты треугольника BAE относятся как 2 : 1. Строим изображение A_1M — высоты этого треугольника (см. указание к задаче 3 из варианта 3). Теперь на изображении строим $C_1P_1 \parallel A_1M_1$. Это и будет изображением перпендикуляра, опущенного из точки C на BE .

3. Центр описанной окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров. Один из этих перпендикуляров есть

3. Рассмотрим трехгранный угол $OABC$, у которого

$$\angle AOB = \angle AOC = 60^\circ, \angle BOC = 90^\circ.$$

Плоскость BAC перпендикулярна плоскости BOC и $AB = AC$. Тогда перпендикуляр AM , опущенный из точки A на плоскость BOC , попадет в точку M — середину BC , т. е. в центр описанной около прямоугольного треугольника BOC окружности. Отсюда следует, что $AB = AC = AO$. Так как $\angle AOC = \angle AOB = 60^\circ$, то $AO = OB = OC$, что и требовалось доказать.

Вар. 4. 1. $54^\circ < x < 90^\circ$. Необходимо учесть, что сумма плоских углов при вершине пирамиды должна быть меньше 360° .

2. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 3. По теореме косинусов находим, что $\cos \angle BDC = \frac{5}{8}$. Тогда

$$\sin \angle BDC = \frac{\sqrt{39}}{8}, R = \frac{BC}{2 \sin \angle BDC} = \frac{\sqrt{39} \cdot 8}{2\sqrt{39}} = 4.$$

Ответ: 4.

3. Рассмотрим трехгранный угол $OABC$, у которого

$$\angle AOB = \angle AOC = 60^\circ, \angle BOC = 90^\circ.$$

Пусть $OA = OB = OC$. Легко доказать, что тогда $AO = AB = AC$ и точка A проектируется в центр описанной около прямоугольного треугольника окружности, т. е. на середину BC . В таком случае плоскость BAC перпендикулярна плоскости прямого угла.

Вар. 5. 2. Построим перпендикулярное сечение призмы $A_2B_2C_2$; $A_2C_2 = AC \sin 45^\circ = \sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, $A_2B_2 = AB \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$. Угол $B_2A_2C_2$ находим, используя теорему косинусов для трехгранного угла. Имеем

$$\cos 90^\circ = \cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos \angle B_2A_2C_2, \\ \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \cos \angle B_2A_2C_2 = 0, \cos \angle B_2A_2C_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Сторону B_2C_2 находим по теореме косинусов:

$$B_2C_2 = \sqrt{9 + 3 - 2 \cdot 3\sqrt{3} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = 3\sqrt{2}. \\ P_{A_2B_2C_2} = 3 + \sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{2} = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{6}), \\ S_{\text{бок}} = 5\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{6}).$$

Ответ: $5\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{6})$.

3. Необходимо рассмотреть трехгранный угол $DAMC$, у которого $\angle MDA = 45^\circ$, $\angle ADC = 90^\circ$ и $\cos \angle MDC = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Пусть исконый двугранный угол равен α . Тогда

$$\cos 90^\circ = \cos 45^\circ \frac{1}{2\sqrt{2}} + \sin 45^\circ \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \cos \alpha.$$

Отсюда $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{7}}$, $\alpha = \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{7}} \right) \approx 112^\circ 12'$.

Ответ: $\arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{7}} \right) \approx 112^\circ 12'$.

Вар. 6. 2. Рассмотрим правильную пирамиду $MABCD$. В трехгранном угле $CMBD$ один плоский угол BCD — прямой, а два других — MCD и MCB обозначим через α . Двугранный угол при ребре MC равен 120° . Тогда по теореме косинусов для трехгранного угла имеем $\cos 90^\circ = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos 120^\circ$.

Отсюда $\operatorname{tg}^2 \alpha = 2$. Пусть MK — высота боковой грани DMC . Тогда $KC = m \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{m}{\sqrt{2}}$.

В таком случае сторона основания равна $m\sqrt{2}$,

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot MK = 2m\sqrt{2} \cdot m = 2m^2 \sqrt{2}.$$

Ответ: $2m^2 \sqrt{2}$.

3. Необходимо рассмотреть трехгранный угол $DAMC$, у которого $\cos \angle MDA = \cos \angle MDC = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\angle ADC = 90^\circ$. Пусть α — величина

искомого двугранного угла. Тогда $\cos 90^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos \alpha$.

Отсюда $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha = 120^\circ$. Ответ: 120° .

Контрольные работы

К—1

Вар. 1. 2. 2) Прямые — скрещивающиеся, 60° . **3.** Любое.

Вар. 2. 2. 1) Линия пересечения проходит через вершину C и параллельна прямым AB и DE ; **2)** прямые — скрещивающиеся, 20° .

3. Пересекаются или параллельны.

4. Прямые EF и MK являются скрещивающимися. Они могут быть параллельными, если AB пересекает CD или $AB \parallel CD$.

Вар. 3. 2. 2) Прямые — скрещивающиеся, 70° .

3. Прямые могут быть в любых взаимных положениях.

Вар. 4. 2. 2) Прямые — скрещивающиеся, 30° .

3. Нет, нельзя.

4. Прямые AC и BD являются скрещивающимися. Они могут пересекаться, если AB пересекает CD или $AB \parallel CD$.

К—2

Вар. 1. 3. 12.

Вар. 2. 2. Прямые — скрещивающиеся. 3. $2a + a\sqrt{2}$.

Вар. 3. 3. 6.

Вар. 4. 2. Прямые — скрещивающиеся. 3. 18.

К—3

Вар. 1. 1. 15 см. 2. 2) 60° ; 3) $\arctg \frac{\sqrt{6}}{2}$.

3*. $\sqrt{3}$ см. Необходимо учесть, что $EO \parallel BC$, где O — основание перпендикуляра MO , опущенного из точки M на плоскость ABC ; O — середина гипотенузы. Расстояние от точки E до плоскости BMC равно расстоянию от точки O до этой плоскости.

Вар. 2. 1. 45° . 2. 2) 45° .

3*. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ см. Необходимо учесть, что $AB \parallel CD$.

Вар. 3. 1. 4 см. 2. 2) 60° ; 3) $\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3*. 1 см. Необходимо учесть, что $EO \parallel BC$, где O — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC .

Вар. 4. 1. 60° . 2. 2) 30° . 3*. $\frac{3\sqrt{10}}{8}$ см. Необходимо учесть,

что $OE \parallel BC$, где O — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC .

К—4

Вар. 1. 1. $a^2(6 + \sqrt{3})$. 2. $25(4 + \sqrt{6})$.

3*. Необходимо достроить пирамиду до пирамиды, основанием которой будет прямоугольник $ACBF$. Для решения задачи следует найти величину угла DBF . В треугольнике DFB $DB = DF = 5\sqrt{5}$,

$FB = 10\sqrt{3}$. Тогда $\cos \angle DBF = \frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$. Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Вар. 2. 1. $3(48 + 5\sqrt{3}) \text{ см}^2$. 2. 50.

3*. Необходимо из основания высоты точки O опустить перпендикуляр OE на ребро MC . Тогда угол BED — искомый. Из $\triangle MOC$ $OE = \frac{MO \cdot OC}{MC} = \frac{1 \cdot 4}{\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$. Отсюда $\tg \angle OED = \frac{3\sqrt{17}}{4}$.

В таком случае $\angle OED = \arctg \frac{3\sqrt{17}}{4}$, $\angle BED = 2 \arctg \frac{3\sqrt{17}}{4}$.

Ответ: $2 \arctg \frac{3\sqrt{17}}{4}$.

Вар. 3. 1. $62,4 \text{ см}^2$. 2. 360.

3*. Расстоянием будет являться длина высоты треугольника MBA , опущенной из вершины B . Ответ: $\frac{60}{13}$.

Вар. 4. 1. $8\sqrt{7}(1+\sqrt{3})$. 2. 108 см^2 .

3*. Необходимо в плоскости верхнего основания из вершины A_1 опустить перпендикуляр A_1K на C_1D_1 . Так как $\angle A_1D_1C_1 = 150^\circ$, то точка K не принадлежит стороне D_1C_1 ; $A_1K = \frac{1}{2} A_1D_1 = 1$, $A_1C = 2\sqrt{14}$. Для решения задачи следует най-

ти величину угла A_1CK . $\sin \angle A_1CK = \frac{A_1K}{A_1C} = \frac{1}{2\sqrt{14}}$.

Ответ: $\arcsin \frac{1}{2\sqrt{14}}$.

К—5

Вар. 1. 1. 1) $\overrightarrow{AA_1}$; 2) $\overrightarrow{CA}$. 2. $\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{6} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$.

3. Векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ будут коллинеарными, если $\vec{m} = k\vec{n}$ ($k \neq 0$).

Тогда $p\vec{a} + q\vec{b} + 8\vec{c} = k\vec{a} + kp\vec{b} + kq\vec{c}$. Отсюда $\begin{cases} p = k, \\ q = kp, \\ 8 = kq. \end{cases}$

Решая систему, получаем, что $k = 2$, $p = 2$ и $q = 4$.

Ответ: $p = 2$, $q = 4$.

4*. Необходимо доказать, что векторы $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ компланарны:

$$\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DH} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DA} - \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{DB}, \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что $\overrightarrow{HM} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{DC}$, т. е.

векторы $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ компланарны, а потому прямые HM , AB и DC параллельны одной плоскости.

Вар. 2. 1. 1) $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{A_1C}$. 2. $-\frac{1}{6} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$.

3. $2\vec{m} = 2\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}$, $3\vec{n} = 6\vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c}$. Отсюда

$$2\vec{m} + 3\vec{n} = 8\vec{a} - \vec{b} + \vec{c},$$

т. е. $\vec{r} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$. Это и значит, что указанные векторы компланарны.

4*. Пусть P_1, P_2, P_3 и P_4 — середины соответственно отрезков NA, MD, NB и MC . Выберем в пространстве произвольную точку O . Тогда

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ND}), \quad (1)$$

$$\overrightarrow{P_4P_3} = \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_4} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CN}), \quad (2)$$

но $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{ND} = \overrightarrow{CN}$. Тогда из уравнений (1) и (2) вытекает, что $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}$, т. е. $P_1P_2P_3P_4$ — параллелограмм. (Предварительно нужно доказать, что точки P_1, P_2, P_3 и P_4 не лежат на одной прямой.)

Вар. 3. 1. 1) $\overrightarrow{B_1A}$; 2) $\overrightarrow{CC_1}$. 2. $\frac{1}{3} \overrightarrow{DA} - \frac{1}{6} \overrightarrow{DB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{DC}$.

3. $k = 2$. Задача решается аналогично задаче 3 из варианта 1.

4*. Задача решается аналогично задаче 4* из варианта 1.

Вар. 4. 1. 1) $\overrightarrow{D_1A}$; 2) $\overrightarrow{C_1B}$. 2. $\frac{1}{3} \overrightarrow{BD} - \frac{1}{6} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$.

3. Необходимо доказать, что $\vec{p} = 2\vec{n} - \vec{m}$.

4*. Пусть M_1, M_2, M_3 и M_4 — точки пересечения медиан соответственно треугольников $A_1BB_1, B_1CC_1, C_1DD_1$ и A_1AD_1 . В пространстве выбираем произвольную точку O . Тогда

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC}) - \\ &- \frac{1}{3} (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{BC}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_4M_3} &= \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_4} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1}) - \\ &- \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD_1}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{AD}). \end{aligned} \quad (2)$$

Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Тогда из уравнений (1) и (2) следует, что $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3}$, т. е. $M_1M_2M_3M_4$ — параллелограмм. (Предварительно нужно доказать, что точки M_1, M_2, M_3 и M_4 не лежат на одной прямой.)

К—6

Вар. 1. 1) 11,2; 2) $\frac{3}{5}$; 3) $\frac{12}{13}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $8\frac{1}{8}$; 6) 4; 7) $\frac{1}{2}\sqrt{673}$; 8) $3\sqrt{65}$.

Вар. 4. 1) 5; 2) 1; 3) 4; 4) $\frac{4}{17}\sqrt{17}$; 5) $0,25\sqrt{17}$; 6) 2; 7) 1,25; 8) $1\frac{43}{80}$; 9) 2; 10) $\sqrt{8,5}$.

Основные геометрические соотношения

1. Дано:

$\triangle ABC$,
 $AB \perp BC$,
 $BD \perp AC$.

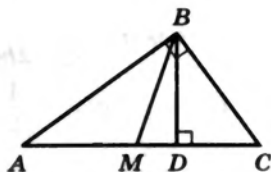
$$1. AB^2 + BC^2 = AC^2.$$

$$2. AB^2 = AC \cdot AD.$$

$$3. BC^2 = AC \cdot DC.$$

$$4. BD^2 = AD \cdot DC.$$

$$5. m_{AC} = BM = \frac{1}{2} AC.$$



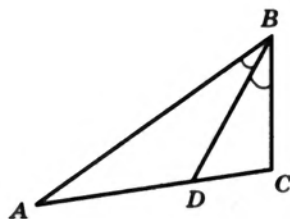
2. Дано:

$\triangle ABC$,
 $\angle ABD = \angle CBD$,
т. е. $BD = l_{AC}$.

$$1. \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}.$$

$$2. BD^2 = AB \cdot AC - AD \cdot DC.$$

$$3. l_{BC} = \frac{2}{b+c} \sqrt{b \cdot c \cdot (p-a) \cdot p}.$$



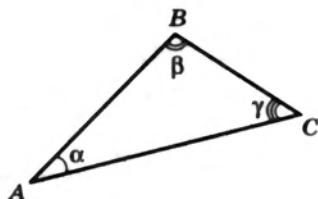
$$3. 1. S_{\triangle} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha.$$

$$2. S_{\triangle} = p \cdot r_n.$$

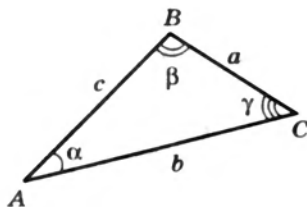
$$3. S_{\triangle} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R_o}.$$

$$4. S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

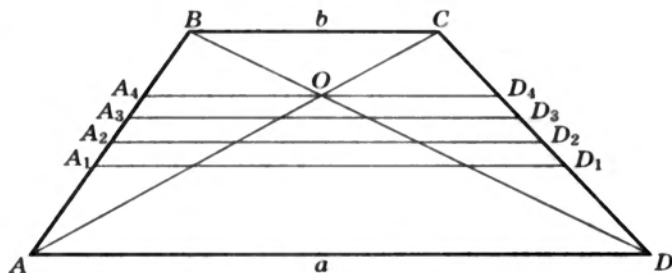
$$5. S_{\triangle} = \frac{a^2 \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin (\beta + \gamma)}.$$



4. 1. $r_n = \frac{a \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$
 2. $R_o = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}.$
 3. $r_n = (p - a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$
 4. $R_o \cdot r_n = \frac{a \cdot b \cdot c}{4p}.$
 5. $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$
 6. $m_a = m_{BC} = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$



5. Дано:
 $BC \parallel AD,$
 $BC = b,$
 $AD = a.$

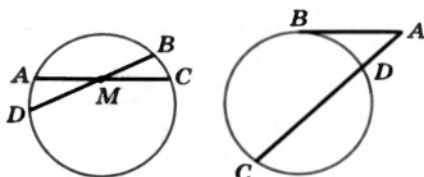


1. $S_{AA_1D_1D} = S_{A_1BCD_1},$
 $A_1D_1 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} — \text{среднее квадратичное отрезков } a \text{ и } b.$
 2. $A_2D_2 = \frac{AD+BC}{2} — \text{среднее арифметическое отрезков } a \text{ и } b.$
 3. $AA_3D_3D \sim A_3BCD_3,$
 $A_3D_3 = \sqrt{ab} — \text{среднее геометрическое отрезков } a \text{ и } b.$
 4. $A_4D_4 \parallel AD, O \in A_4D_4,$
 $A_4D_4 = \frac{2ab}{a+b} — \text{среднее гармоническое отрезков } a \text{ и } b.$
 $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}.$

6. Дано:
 AC и BD — хорды
 окружности.

1. $MA \cdot MC = MB \cdot MD$.

2. AB — касательная,
 $AB^2 = AC \cdot AD$.

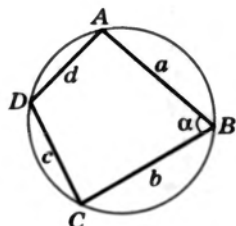


7. Дано:
 четырехугольник $ABCD$
 вписан в окружность.

1. $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$.

2. $S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

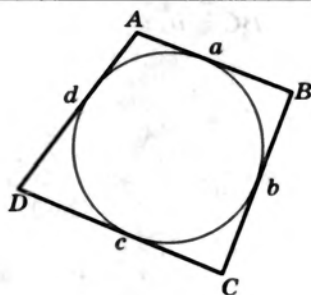
3. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(ab+cd) \sin \alpha$.



8. Дано:
 четырехугольник $ABCD$
 описан около окружности.

1. $a + c = b + d$.

2. Если $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$,
 то $S_{ABCD} = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$.



Условные обозначения:

a, b, c — стороны треугольника ABC ;

$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр треугольника ABC ;

h_{AB} — высота, проведенная к стороне AB ;

m_{BC} — медиана, проведенная к стороне BC ;

l_{AC} — биссектриса, проведенная к стороне AC ;

R_o — радиус описанной окружности;

r_v — радиус вписанной окружности.

Учебное издание
Зив Борис Германович
ГЕОМЕТРИЯ
ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ
10 КЛАСС

Зав. редакцией Т. А. Бурмистрова
Редактор Л. В. Кузнецова
Младший редактор С. В. Дубова
Художники О. В. Корытов, О. П. Богомолова
Художественный редактор О. П. Богомолова
Технический редактор Н. В. Лукина
Корректор А. К. Райхчин

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с диапозитивов 17.03.09. Формат 60 × 90¹/₁₆. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 6,18. Тираж 15 000 экз. Заказ № 28060.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpgk.ru



БАЗОВЫЙ • ПРОФИЛЬНЫЙ
У Р О В Н И

Учебно-методический
комплект включает:

Л.С. Атанасян,
В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев,
Л.С. Киселева, Э.Г. Позняк

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 10 – 11 классов

Б.Г. Зив

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

по геометрии для 10 и 11 классов

В.Ф. Бутузов, Ю.А. Глазков, И.И. Юдина

РАБОЧИЕ ТЕТРАДИ

по геометрии для 10 и 11 классов

Б.Г. Зив, В.М. Мейлер, А.Г. Баханский

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

для 7 – 11 классов

С.М. Саакян, В.Ф. Бутузов

ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ

в 10 – 11 классах

Методические рекомендации
к учебнику

ISBN 978-5-09-021737-8



9 785090 217378



ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО