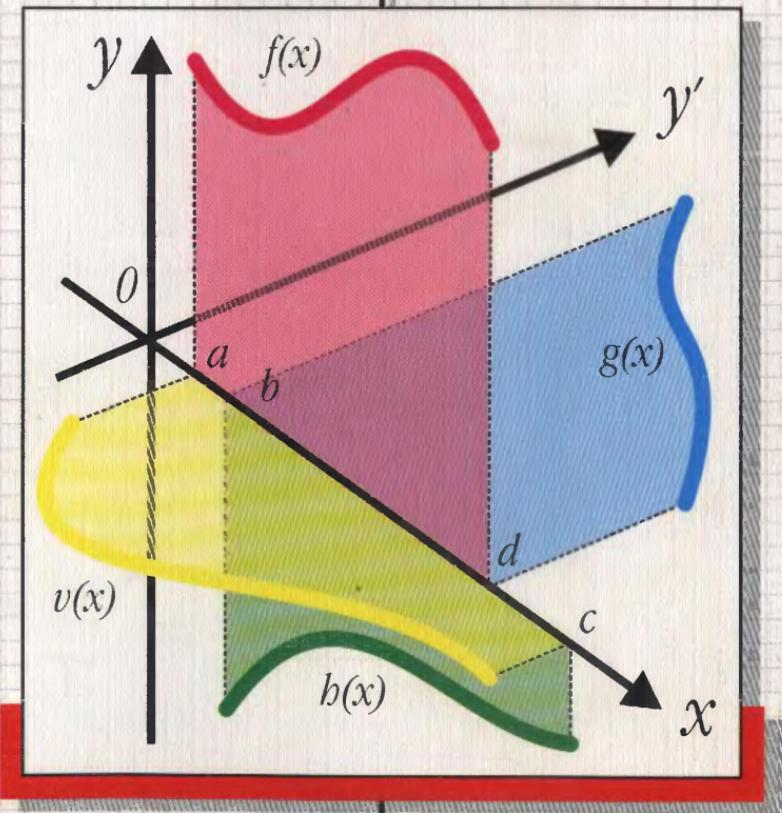


А Л Г Е Б Р А

В ТАБЛИЦАХ

7-11

КЛАССЫ



АЛГЕБРА

В ТАБЛИЦАХ

7 11

КЛАССЫ

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ

АВТОРЫ-СОСТАВИТЕЛИ:

Л.И.Звавич, А.Р.Рязановский

8-е издание, стереотипное



ДРОФД

Москва 2004

УДК 371.672.8:512(083.4)

ББК 22.14я2

A45

Алгебра в таблицах. 7—11 кл.: Справочное пособие/Авт.-сост. Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский. — 8-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2004. — 96 с.: ил.

ISBN 5—7107—8105—3

Пособие содержит таблицы по всем наиболее важным разделам школьного курса арифметики, алгебры, начал анализа. В таблицах кратко изложена теория по каждой теме, приведены основные формулы, графики и примеры решения типовых задач. В конце книги помещен предметный указатель.

Пособие будет полезно учащимся 7—11 классов, абитуриентам, студентам, учителям и родителям.

УДК 371.672.8:512(083.4)

ББК 22.14я2

Учебное издание

АЛГЕБРА В ТАБЛИЦАХ

7—11 классы

Справочное пособие

Авторы-составители:

Звавич Леонид Исаакович

Рязановский Андрей Рафаилович

Редактор М. Г. Циновская. Оформление А. В. Кузнецов

Компьютерная верстка О. А. Молочков, С. А. Белых

Технический редактор Н. И. Герасимова

Корректор Г. И. Мосякина

**Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.Д.006315.08.03 от 28.08.2003.**

Подписано к печати 05.02.04. Формат 84×108^{1/32}.

Бумага типографская. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.

Усл. печ. л. 5,04. Тираж 16 000 экз. Заказ № 1437.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

**По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа»
обращаться по адресу: 127018, Москва, Сущевский вал, 49.**

Тел.: (095) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (095) 795-05-52.

**Торговый дом «Школьник». 109172, Москва, ул. Малые Каменщики,
д. 6, стр. 1А. Тел.: (095) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.**

Магазин «Переплетные птицы»:

127018, Москва, ул. Октябрьская, д. 89, стр. 1. Тел.: (095) 912-45-76;

**140408, Московская обл., г. Коломна, Голутвин,
ул. Октябрьской революции, 366/2. Тел.: (095) 741-59-76.**

**Отпечатано с готовых диапозитивов
в полиграфической фирме «КРАСНЫЙ ПРОЛЕТАРИЙ».
127473, Москва, Краснопролетарская, 16**

ISBN 5—7107—8105—3

© ООО «Дрофа», 1997

От авторов

Тематические таблицы по всем наиболее важным разделам школьного курса арифметики, алгебры, начал анализа предназначены для школьников от седьмого до одиннадцатого классов. В каждой таблице кратко изложена теория конкретного вопроса (определения, теоремы, следствия, формулы); приводятся рисунки, графики, а также примеры решения наиболее принципиальных задач.

Таблицы помогут систематизировать знания, быстро и полно повторить основные моменты той или иной темы, с помощью предметного указателя найти нужные сведения. Таблицы можно разрезать и наклеить на плотную бумагу, оставив оборот чистым для пометок и добавлений (для такой операции надо иметь два экземпляра книги).

Ученик может:

- при подготовке к ответу или к контрольной работе прочитать и обдумать соответствующую таблицу, посмотреть предметный указатель;
- при решении задач по данной теме использовать соответствующую таблицу в качестве справочника;
- после уроков по данной теме самому внести в таблицу (на чистый оборот) добавления и изменения, отметить неизученные в классе вопросы;
- при итоговом повторении материала прежде всего просмотреть таблицы;
- устроить себе или своему товарищу зачет по таблице или предметному указателю;
- использовать таблицу как план ответа на устном экзамене или зачете.

Учитель может:

- использовать таблицы при подготовке к уроку;
- при объяснении нового материала подавать таблицы через кодексп (вывешивать на доске увеличенную таблицу), а еще лучше — положить книгу перед каждым учеником;
- проводить письменный или устный опрос по материалам таблиц или предметного указателя;
- использовать таблицы во время проведения самостоятельных работ;
- проводить по таблицам комплексное или тематическое повторение;
- избавить себя от утомительной процедуры «надиктовывания» аналогичных таблиц, план-конспектов, формул и т.п.

Абитуриент может: внимательно прочитав каждую таблицу «от корки до корки», уяснить, всем ли материалом он владеет в должной мере; при недостатке времени таблицы могут быть основным источником тематического повторения при подготовке к письменному экзамену. Если вас ждет и устный экзамен, то материал таблиц должен быть вашим лоцманом при чтении учебников.

Родители ученика могут использовать таблицу:

- для проверки знаний своего ребенка по той или иной теме;
- для проверки своих собственных знаний по школьной математике и для их расширения.

Таблицы могут быть использованы также будущими учителями, репетиторами, членами предметных комиссий институтов, студентами.

Авторы надеются, что таблицы принесут пользу всем, кто будет использовать их в своих занятиях по математике.

Авторы выражают благодарность Борису Петровичу Пигареву, внимательно прочитавшему таблицы и сделавшему ряд ценных замечаний.

Таблица 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

| Множество натуральных чисел | | |
|--|------------------------------|--|
| N | Натуральные числа 1; 2; 3... | |
| Множество целых чисел | | |
| Z | N | Целые числа состоят из натуральных, нуля и чисел, противоположных натуральным. |
| | 0 | |
| | N_- | $N \subset Z$ |
| Множество рациональных чисел | | |
| Q | Z | Рациональные числа представимы как $\frac{p}{q}$, где p — целое, а q — натуральное. |
| | Дробь | $N \subset Z \subset Q$ |
| Множество действительных чисел | | |
| R | Q | Действительные числа — это бесконечные десятичные дроби. $N \subset Z \subset Q \subset R$ |
| | Q | Рациональные числа — бесконечные периодические дроби. Период не может состоять из одних девяток. Если период состоит из одних нулей, дробь может считаться конечной десятичной дробью. |
| | Q | Множество иррациональных чисел. Иррациональные числа — бесконечные непериодические десятичные дроби. $Q \cup \bar{Q} = R$ |
| $3 \in N, 3 \in Z, -6 \in N, -6 \in Z, 0,25 \in N, 0,25 \in Z, 0,25 \in Q, 0,25 \in R.$ | | |
| Делимость целых неотрицательных чисел | | |
| Число a делится на число b , если существует c , такое, что $a = bc$. $a : b$; b — делитель a ; a — кратное b . | | |

Таблица 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

| Свойства делимости | |
|---|--|
| <p>Ноль делится на любое натуральное число. Любое число делится на единицу. Любое число делится само на себя.</p> | |
| Если $a > 0$ и $a \mid b$, то $a \geq b$. | Если $a \mid b$ и $b \mid a$, то $a = b$. |
| Если $a \mid b$ и $b \mid c$, то $a \mid c$. | Если $a \mid b$ и $k \neq 0$, то $ak \mid bk$. |
| Если $a \mid c$ и $b \mid c$, то $(a + b) \mid c$. | Если $a \mid c$ и $b \mid c$, то $(am + bn) \mid c$. |
| Если $a \mid (bc)$, то $a \mid b$, $a \mid c$ и $(a \mid b) \mid c$. | Если $a \mid c$ и $(a + b) \mid c$, то $b \mid c$. |
| Деление с остатком | |
| <p>Для любых двух натуральных чисел a и b найдутся такие целые неотрицательные q и r, что $a = b \cdot q + r$, $0 \leq r < b$.</p> | |
| Если $r = 0$, то $a \mid b$. Число r называется остатком от деления a на b . | |
| Признаки делимости | |
| Число делится на два, если его последняя цифра делится на два. | на 2 |
| Число делится на пять, если его последняя цифра делится на пять. | на 5 |
| Число делится на четыре, если число, составленное из двух его последних цифр, делится на четыре. | на 4 |
| Число делится на двадцать пять, если число, составленное из двух его последних цифр, делится на двадцать пять. | на 25 |
| Число делится на три, если сумма его цифр делится на три. | на 3 |
| Число делится на девять, если сумма его цифр делится на девять. | на 9 |
| Число делится на одиннадцать, если алгебраическая сумма его цифр $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^{n-1}a_{n-1}$ делится на одиннадцать. | на 11 |

Таблица 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Десятичная запись n -значного натурального числа:

$$\overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0} =$$

$$= a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0;$$

a_i — цифры числа, $a_{n-1} \neq 0$, $n \in N$.

| | |
|----------------|--|
| НОК ($a; b$) | <p>Наименьшее положительное из общих кратных чисел a и b называется <i>наименьшим общим кратным</i> этих чисел.</p> <p style="text-align: right;">НОК (15; 10) = 30</p> |
| НОД ($a; b$) | <p>Наибольший из общих делителей чисел a и b называется <i>наибольшим общим делителем</i> этих чисел.</p> <p style="text-align: right;">НОД (15; 10) = 5</p> |

$$\text{НОК} (a; b) \cdot \text{НОД} (a; b) = a \cdot b$$

Числа a и b называются *взаимно простыми*, если $\text{НОД} (a; b) = 1$.

Натуральное число p называется *простым*, если оно имеет ровно два различных делителя (единицу и само это число).

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23... — простые числа

Свойства простых чисел

Любое натуральное число либо делится на простое, либо взаимно просто с ним.

Произведение натуральных чисел делится на простое число тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них делится на это простое число.

Простых чисел бесконечно много (нет самого большого простого числа).

Если натуральное число не делится ни на одно простое, квадрат которого не превосходит это натуральное число, то оно само простое.

Любое простое число p ($p > 3$) представимо в виде $p = 6k \pm 1$, $k \in N$.

Каноническое разложение натурального числа n ($n > 1$):

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где p_i — простое, $p_i < p_{i+1}$ и $0 < \alpha_i \in N$.

$$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

Таблица 2. МОДУЛЬ

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

| Основные свойства модуля | Геометрическая интерпретация модуля |
|---|---|
| $ a \geq 0$ | $ -a = a $ |
| $ a - b = b - a $ | |
| $ a - b \leq a \pm b \leq a + b $ | Если точка A на числовой оси имеет координату a , то расстояние от A до 0 равно $ a $. |

Расстояние между точками A (a) и B (b) на прямой равно $|a - b|$.

Уравнения с модулем

| $ x = a$ | $ x - b = a$ | $ f(x) = g(x) $ | $ f(x) = g(x)$ |
|--|---|---|--|
| $a < 0$ решений нет | $a < 0$ решений нет | равносильно объединению уравнений | равносильно системе уравнений |
| $a = 0$ $x = 0$ | $a = 0$ $x = b$ | $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$ | $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ |
| $a > 0$ $\begin{cases} x = a \\ x = -a \end{cases}$ | $a > 0$ $\begin{cases} x = b - a \\ x = b + a \end{cases}$ | | |

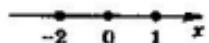
Неравенства с модулем

| $ x - b < a$ | $ x - b \geq a$ | $ f(x) < g(x) $ | $ f(x) > g(x)$ |
|--------------------------------|---|---|---|
| $a \leq 0$ решений нет | $a \leq 0$ $x \in R$ | равносильно системе: | равносильно объединению: |
| $a > 0$ $b - a < x < b + a$ | $a > 0$ $x \leq b - a$ или $x \geq b + a$ | $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$ | $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$ |

Неравенство $|f(x)| > |g(x)|$ равносильно неравенству $f^2(x) > g^2(x)$ или неравенству $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0$.

*Примеры***Раскрытие модулей «по промежуткам»**

$$y = |x+2| + 3|x| - 2|x-1|$$

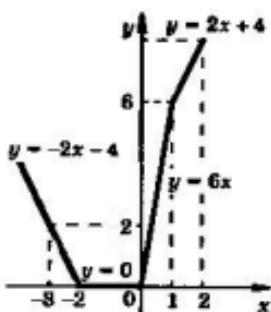


$$x \leq -2, y = -(x+2) - 3x + 2(x-1) = -2x - 4$$

$$-2 < x \leq 0, y = x+2 - 3x + 2(x-1) = 0$$

$$0 < x \leq 1, y = x+2 + 3x + 2(x-1) = 6x$$

$$x > 1, y = x+2 + 3x - 2(x-1) = 2x + 4$$



Решить уравнение $3x^2 - 5|x| - 8 = 0$.

Заметим, что $|x|^2 = x^2$; введем обозначение $|x| = t$.

$$3t^2 - 5t - 8 = 0.$$

$$t_1 = -1; t_2 = \frac{8}{3}.$$

$|x| = -1$, решений нет.

$$|x| = \frac{8}{3}; x_1 = -\frac{8}{3}, x_2 = \frac{8}{3}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -\frac{8}{3}, x_2 = \frac{8}{3}.$$

Построить график функции $y = \operatorname{tg} x \cdot |\cos x|$.

Данная функция периодическая, период $T = 2\pi$.

Построим график на каждом промежутке знакопостоянства косинуса.

При $\cos x > 0 \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), y = \sin x;$

при $\cos x < 0 \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right), y = -\sin x$.

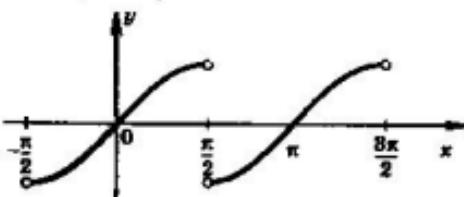


Таблица 3. ДЕЙСТВИЯ С МНОГОЧЛЕНАМИ

Сложение многочленов: $(a^2 + ab - b) + (3a^2 - 2ab + b) = 4a^2 - ab.$

Вычитание многочленов:

$$(2a - b) - (3a + b) = (2a - b) + (-3a - b) = -a - 2b.$$

Умножение многочленов:

$$(a + 3b)(a - b) = a^2 - ab + 3ab - 3b^2 = a^2 + 2ab - 3b^2.$$

Формулы сокращенного умножения

квадрат суммы $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

квадрат разности $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

куб суммы $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

куб разности $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

разность квадратов $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

разность кубов $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

сумма кубов $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Бином Ньютона: $(a + b)^n =$

$$= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

$$C_n^1 = n; \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}; \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! k!}; \quad C_n^k = C_n^{n-k};$$

$$n \in N, n > 1 \quad (0! = 1; 1! = 1; n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n).$$

Треугольник Паскаля

| | | | | | | | |
|---|---|----|----|----|----|----|----|
| 1 | | | | | | | |
| | 1 | | 1 | | | | |
| | | 1 | 2 | 1 | | | |
| | | | 1 | 3 | 3 | 1 | |
| | | | | 1 | 4 | 6 | 4 |
| | | | | | 1 | 5 | 10 |
| | | | | | | 10 | 5 |
| | | | | | | | 1 |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | |
| | | | | | | | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a - b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

Таблица 3. ДЕЙСТВИЯ С МНОГОЧЛЕНАМИ

Основные приемы разложения многочлена на множители

| | |
|---|--|
| Вынесение общего множителя за скобку | $2ab + 14a^2 + 2a = 2a(b + 7a + 1);$ $3a^2b^3 - 15a^3b = 3a^2b(b^2 - 5a).$ |
| Метод группировки | $ab + ac - b - c = a(b + c) - (b + c) = (b + c)(a - 1).$ |
| Использование формул сокращенного умножения | $a^2 + 4ab + 4b^2 = (a + 2b)^2;$ $a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 =$ $= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 =$ $= (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2).$ |
| Дополнительные формулы | $(a^n - 1) =$ $= (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1);$ $(a^{2m+1} + 1) =$ $= (a + 1)(a^{2m} - a^{2m-1} + \dots - a + 1).$ |

Многочлены от одной переменной

Общий вид: $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^1 + a_0,$

n — степень многочлена, a_i — коэффициенты, a_n — старший коэффициент, $a_n \neq 0$.

Если $a_n = 1$, то многочлен называется *приведенным*.

$3x^4 - x^3 + 2x^2 - 5$ — многочлен 4-й степени с коэффициентами: $a_4 = 3; a_3 = -1; a_2 = 2; a_1 = 0; a_0 = -5.$

Квадратный трехчлен — многочлен второй степени

$$ax^2 + bx + c (a \neq 0),$$

a — первый коэффициент, b — второй коэффициент, c — свободный член.

Деление многочленов

Теорема о делении с остатком

$$P(x) = M(x) \cdot Q(x) + R(x), \text{ где}$$

$P(x)$ — делимое; $M(x)$ — делитель,
 $Q(x)$ — частное, $R(x)$ — остаток. Если остаток не равен нулю, то его степень меньше степени делителя.

$$3x^3 - x^2 - 3x - 2 =$$

$$P(x)$$

$$= (x^2 + x - 1)(3x - 4) + (4x - 6)$$

$$M(x)$$

$$Q(x)$$

$$R(x)$$

Деление «уголком»

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 1 \\ \hline 3x^3 - x^2 - 3x - 2 \\ - 3x^3 + 3x^2 - 3x \\ \hline - 4x^2 - 2 \\ - 4x^2 - 4x + 4 \\ \hline 4x - 6 \end{array}$$

$$P(x) = 3x^3 - x^2 - 3x - 2$$

$$M(x) = x^2 + x - 1$$

$$Q(x) = 3x - 4$$

$$R(x) = 4x - 6$$

Таблица 3. ДЕЙСТВИЯ С МНОГОЧЛЕНАМИ

Деление многочлена $f(x)$ на двучлен $x - a$

Теорема Безу.

Остаток от деления многочлена на двучлен $x - a$ равен значению этого многочлена при $x = a$, т. е. $R = f(a)$.

$$f(x) = (x - a) \cdot Q(x) + f(a)$$

Схема Горнера.

Разделить многочлен
 $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3$ на $(x - 5)$
 $a = 5$

$$b_2 = a_3$$

$$b_1 = b_2 \cdot 5 + a_2$$

$$b_0 = b_1 \cdot 5 + a_1$$

$$R = b_0 \cdot 5 + a_0$$

$$R = f(5) = 247$$

| a_3 | a_2 | a_1 | a_0 |
|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 5 | 0 | -3 |
| 1 | 10 | 50 | 247 |

b_2 b_1 b_0 R

Корнем многочлена называется такое число x_0 , при котором значение многочлена равно нулю ($f(x_0) = 0$).

Целые корни многочлена с целыми коэффициентами являются делителями его свободного члена.

Пример.

$$x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0$$

Целые корни можно искать только среди чисел -1; 1; 2; -2; 4; -4; 8; -8.

Ответ: $x = 1$; $x = -2$; $x = -4$ — корни.

Таблица 4. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

| | | |
|--|---|--|
| <i>Определение арифметического корня</i> | $\sqrt{16} = 4$, т.к. $4 > 0$, $4^2 = 16$; | $\sqrt{0,36} = 0,6$; $\sqrt{4900} = 70$; |
| $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^2 = a \end{cases}$ | $\sqrt{25} \neq 7$, т.к. $7^2 \neq 25$; $\sqrt{25} \neq -5$, т.к. $-5 < 0$; $\sqrt{-8}$ не определен. | $\sqrt{0,0001} = 0,01$; $2 < \sqrt{8} < 3$; $0,8 < \sqrt{0,8} < 0,9$. |
| Тождества | | Основные свойства |
| $(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0$ | $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ | $\sqrt{ab} = \sqrt{ a } \cdot \sqrt{ b }$ |
| $\sqrt{a^2} = a , a \in \mathbb{R}$ | $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ | $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ a }}{\sqrt{ b }}$ |
| | $(\sqrt{a})^p = \sqrt{a^p}$ | $\sqrt{a^p} = (\sqrt{ a })^p$ |

Сравнения, связанные с квадратными корнями

Если $a > b \geq 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}.$$

Если $a > 1$, то $a > \sqrt{a}$ и $\sqrt{a} > 1$.

Если $0 < a < 1$, то $a < \sqrt{a}$ и $0 < \sqrt{a} < 1$.

| Вынесение из-под корня | Внесение под корень |
|---|---|
| $\sqrt{a^2} \cdot b = a \cdot \sqrt{b}, b \geq 0$ | $a \sqrt{b} = \begin{cases} -\sqrt{a^2}b, & \text{если } a < 0, \\ \sqrt{a^2}b, & \text{если } a \geq 0 \end{cases}$ |
| $\sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = 3\sqrt{7};$ $\sqrt{7a^2} = a \cdot \sqrt{7};$ $\sqrt{5b^2} + \sqrt{b} = b\sqrt{5} + \sqrt{b};$ $\sqrt{3c^2} + \sqrt{-c} = -c\sqrt{3} + \sqrt{-c}.$ | $5 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = \sqrt{75};$ $-2\sqrt{7} = -\sqrt{28};$ $(\sqrt{5} - 2) \cdot \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} =$ $= \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2 \cdot (9 + 4\sqrt{5})} = 1;$ $(\sqrt{3} - 2) \cdot \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} =$ $= \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2 \cdot (7 + 4\sqrt{3})} = -1.$ |

Таблица 4. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

Иррациональность в знаменателе

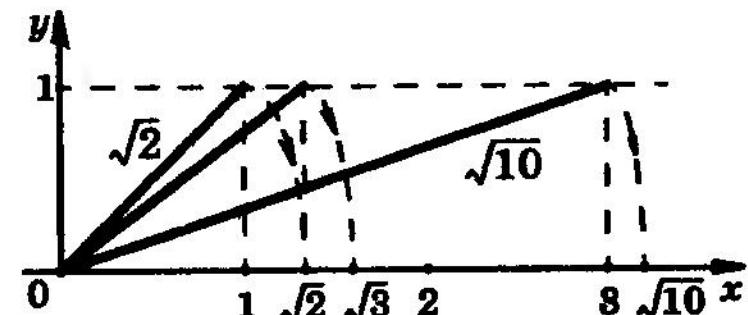
$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\frac{5}{\sqrt{3}-1} = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

Сравнение среднего геометрического (пропорционального) двух чисел и их среднего арифметического

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, a \geq 0; b \geq 0.$$

Построение \sqrt{n} ($n \in N$) на числовой прямой



$$(\sqrt{n+1})^2 = (\sqrt{n})^2 + 1^2$$

Примеры

Найти x^2 и упростить выражение $x = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

Заметим, что $x < 0$, т. к. $3 - 2\sqrt{2} < 3 + 2\sqrt{2}$.

$$x^2 = 3 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{9-8} + 3 + 2\sqrt{2} = 6 - 2 = 4.$$

Значит, $x = -2$.

$$\text{Ответ: } x^2 = 4; \quad \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = -2.$$

Сравнить числа $\sqrt{2} + 1$ и $\frac{\sqrt{33} - 1}{2}$.

| | | | |
|----------|-----------------|---|---------------------------|
| Запишем: | $\sqrt{2} + 1$ | ? | $\frac{\sqrt{33} - 1}{2}$ |
| | $2\sqrt{2} + 2$ | ? | $\sqrt{33} - 1$ |
| | $\sqrt{8} + 3$ | ? | $\sqrt{33}$ |

Так как сравниваемые числа положительны, то можно сравнить их квадраты:

| | | |
|------------------|---|--------------|
| $17 + 6\sqrt{8}$ | ? | 33 |
| $6\sqrt{8}$ | ? | 16 |
| $\sqrt{288}$ | > | $\sqrt{256}$ |

Следовательно, $\sqrt{2} + 1 > \frac{\sqrt{33} - 1}{2}$.

Таблица 5. КОРНИ НАТУРАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ

| | |
|--|---|
| <p>Определение арифметического корня натуральной степени из неотрицательного числа a</p> $\left. \begin{array}{l} \sqrt[n]{a} = b \\ n \in \mathbb{N}, \quad a \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} b \geq 0 \\ b^n = a \end{array}$ | $\sqrt[3]{27} = 3; \quad \sqrt[7]{0,0000001} = 0,1;$ $\sqrt[5]{1024} = 4; \quad 2 < \sqrt[3]{9} < 3;$ $\sqrt[1]{3} = 3; \quad 0,2 < \sqrt[5]{0,00036} < 0,3.$ $\sqrt[3]{0,008} = 0,2;$ |
| <p>Извлечение корня нечетной степени из отрицательного числа</p> | <p>Если $a < 0$, то $\sqrt[2n-1]{a} = -\sqrt[2n-1]{-a}$.</p> $\begin{aligned} \sqrt[3]{-8} &= -\sqrt[3]{8} = -2; \\ \sqrt[5]{-243} &= -\sqrt[5]{243} = -3; \\ \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 2)^3} &= -\sqrt[3]{(2 - \sqrt{3})^3} = \\ &= -(2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 2. \end{aligned}$ |
| <i>Корень четной степени из отрицательного числа не определен.</i> | |
| <p>Тождества</p> <p>Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$.</p> $\begin{aligned} \sqrt[2n]{a^{2n}} &= a , \quad a \in \mathbb{R} \\ \sqrt[2n-1]{a^{2n-1}} &= a, \quad a \in \mathbb{R} \end{aligned}$ | <p>Основные свойства</p> $\begin{aligned} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab}; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \\ (\sqrt[n]{a})^p &= \sqrt[n]{a^p}; \\ \sqrt[n]{m\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[nm]{a}; \quad \boxed{\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}}. \end{aligned}$ |
| <p>Сравнения, связанные с корнями</p> | <p>Если $a > b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.</p> $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \geq \sqrt[n]{a+b}.$ <p>Если $a > 1$, то $\sqrt[n]{a} > 1$ и $\sqrt[n]{a} < a$.</p> <p>Если $0 < a < 1$, то $0 < \sqrt[n]{a} < 1$ и $\sqrt[n]{a} > a$.</p> |
| <p>Вынесение из-под корня</p> | $\begin{aligned} \sqrt[3]{24} &= \sqrt[3]{3 \cdot 8} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}; \\ \sqrt[4]{(1 - \sqrt{2})^4 \cdot 5} &= (\sqrt{2} - 1) \cdot \sqrt[4]{5}; \\ \sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})^3 \cdot 6} &= (1 - \sqrt{2}) \cdot \sqrt[3]{6}. \end{aligned}$ |

Таблица 5. КОРНИ НАТУРАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ

| | |
|---|---|
| Внесение под корень $3 \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{162};$ $-2 \cdot \sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{2^6 \cdot 3} = -\sqrt[6]{192};$ $(1 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{(1 - \sqrt{3})^4 \cdot 2};$ $(1 - \sqrt{5}) \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{(1 - \sqrt{5})^8 \cdot 2}.$ | $\frac{3}{\sqrt[4]{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{2^3}}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{8}}{2};$ $\frac{2}{\sqrt[6]{3} + 1} = \frac{2 \cdot (\sqrt[6]{9} - \sqrt[6]{3} + 1)}{3 - 1} =$ $= \sqrt[6]{9} - \sqrt[6]{3} + 1.$ |
| Иррациональность в знаменателе $\sqrt[8]{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}} = \sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4}} \cdot \sqrt[12]{\frac{1}{3^3}} = \sqrt[12]{\frac{3}{16}};$ $\sqrt[8]{18} : \sqrt{6} = \sqrt[6]{18^2} : \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{\frac{3^4 \cdot 2^2}{2^3 \cdot 3^3}} =$ $= \sqrt[6]{\frac{3}{2}};$ | $\sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 2^2 \cdot 2} = \sqrt[6]{2^6} = 2.$ |
| Действия с корнями различных показателей Сравнить $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[8]{3}$. $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125},$ $\sqrt[8]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}.$ Так как $125 > 81$, то $\sqrt[12]{125} > \sqrt[12]{81}$ и $\sqrt[4]{5} > \sqrt[8]{3}.$ | |
| Среднее геометрическое и среднее арифметическое неотрицательных чисел $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ Равенство достигается при $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ | |

Таблица 6. СТЕПЕНИ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ.

ФУНКЦИЯ $y = \sqrt[n]{x}$

| | | |
|---|--|---|
| Степень с натуральным показателем | $a^1 = a$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$, $n \in N$, $a \in R$ | |
| Степень с целым показателем | $a^0 = 1$, $a \neq 0$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \in R$ $n \in N$ | $3^{-2} = \frac{1}{9}$; $(-1,2)^0 = 1$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$. |
| Степень с рациональным показателем для неотрицательного числа a | $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $m \in Z$, $n \in N$ Если $m < 0$, то $a > 0$. Если $m > 0$, то $a \geq 0$. | $8^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{8^2}$; $0^{\frac{5}{6}} = 0$; $25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3} = 125$; $(0,04)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,04} = 0,2$; $(-27)^{\frac{1}{3}}$ не определена. |
| Понятие о степени с иррациональным показателем | $3^{\pi} < 3^{\pi} < 3^4$ $3^{3,1} < 3^{\pi} < 3^{3,2}$ $3^{3,14} < 3^{\pi} < 3^{3,15}$ $(\pi = 3,1415\dots)$ | $(0,3)^2 < (0,3)^{\sqrt{2}} < (0,3)^4$ $(0,8)^{1,5} < (0,8)^{\sqrt{2}} < (0,8)^{1,4}$ $(0,8)^{1,42} < (0,8)^{\sqrt{2}} < (0,8)^{1,41}$ $(\sqrt{2} = 1,4142\dots)$ |
| Степень с действительным показателем | a^r , $r \in R$ | $\begin{cases} r < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} r > 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$ |
| Свойства степеней | $a^p \cdot a^r = a^{p+r}$ $a^p : a^r = a^{p-r}$ $a^r \cdot b^r = (ab)^r$ | $(a^p)^r = a^{pr}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(\frac{b}{a}\right)^{-r}$ $a^r : b^r = \left(\frac{a}{b}\right)^r$ |

Таблица 6. СТЕПЕНИ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

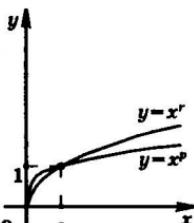
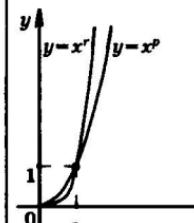
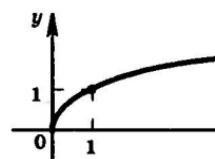
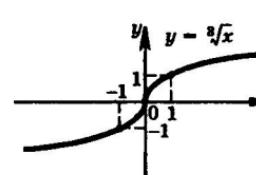
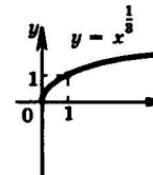
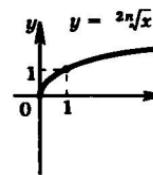
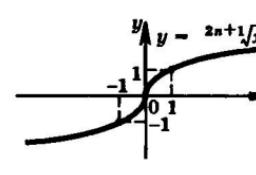
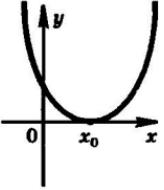
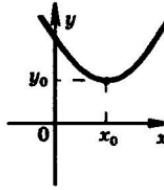
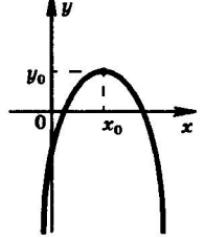
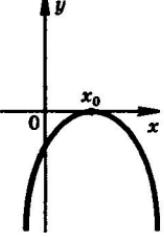
| | | |
|--|---|--|
| <p>Свойства степеней, связанные с неравенствами</p> $\left. \begin{array}{l} a > b \geq 0 \\ r > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a^r > b^r \quad \left. \begin{array}{l} p > r \\ a > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a^p > a^r$ $\left. \begin{array}{l} a > b > 0 \\ r < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a^r < b^r \quad \left. \begin{array}{l} p > r \\ 0 < a < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a^p < a^r$ | | |
| <p>Графики степенной функции</p> <p>$y = x^r$, $r \in \mathbb{R}$</p> <p>$0 < p < r < 1$ $D(y) = [0; +\infty)$; $E(y) = [0; +\infty)$; возрастает на $[0; +\infty)$.</p> |  <p>$y = x^r$</p> <p>$1 < p < r$ $D(y) = [0; +\infty)$; $E(y) = [0; +\infty)$; возрастает на $[0; +\infty)$.</p> |  <p>$y = x^r$</p> <p>$p < r < 0$ $D(y) = (0; +\infty)$; $E(y) = (0; +\infty)$; убывает на $(0; +\infty)$.</p> |
| <p>$y = \sqrt{x}$</p> <p>$y = x^{\frac{1}{2}}$</p> |  <p>$y = \sqrt{x}$</p> <p>$y = x^{\frac{1}{2}}$</p> | |
| <p>$y = \sqrt[8]{x}$</p> <p>$y = x^{\frac{1}{8}}$</p> |  <p>$y = \sqrt[8]{x}$</p> <p>$y = x^{\frac{1}{8}}$</p> |  <p>$y = \sqrt[8]{x}$</p> <p>$y = x^{\frac{1}{8}}$</p> |
| <p>$y = \sqrt[2n]{x}$</p> <p>$y = \sqrt[2n+1]{x}$ $n \in \mathbb{N}$</p> |  <p>$y = \sqrt[2n]{x}$</p> |  <p>$y = \sqrt[2n+1]{x}$</p> |

Таблица 7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА

| | |
|---|---|
| <p>Линейная функция $y = ax + b$</p> <p>$D(y) = R$.</p> <p>При $a = 0 E(y) = \{b\}$ (постоянная), все точки — точки экстремума. При $a \neq 0 E(y) = R$.</p> <p>При $a > 0$ возрастает на R. При $a < 0$ убывает на R. Экстремумов нет.</p> | <p>График — прямая</p> <p>$y = ax + b$ ($a > 0$)</p> <p>$y = b$ ($a = 0$)</p> <p>$y = ax + b$ ($a < 0$)</p> |
| <p>Функция $y = kx$ — прямая пропорциональность ($k > 0$). Нечетная функция.</p> | <p>$y = k_1x$</p> <p>$y = k_2x$</p> <p>$k_1 = \operatorname{tg} \alpha$ $k_2 = \operatorname{tg} \beta$</p> |
| <p>Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)</p> <p>$D(y) = R$.</p> <p>При $a > 0$ убывает на $(-\infty; x_0]$ и возрастает на $[x_0; +\infty)$, $x_0 = -\frac{b}{2a}$ точка минимума, $y_0 = y(x_0)$ минимум. $E(y) = [y_0; +\infty)$.</p> <p>При $a < 0$ возрастает на $(-\infty; x_0]$ и убывает на $[x_0; +\infty)$, $x_0 = -\frac{b}{2a}$ — точка максимума, $y_0 = y(x_0)$ — максимум. $E(y) = (-\infty; y_0]$.</p> | <p>Вид графика — парабола. Координаты вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a}; y_0 = y(x_0)$. Ось симметрии $x = x_0$. При $a < 0$ y_0 — наибольшее значение. При $a > 0$ y_0 — наименьшее значение.</p> <p>$y = ax^2$</p> |

Четная функция

Таблица 7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА

| $D = b^2 - 4ac > 0$ | $D = b^2 - 4ac = 0$ | $D = b^2 - 4ac < 0$ |
|---|---|---|
| Два корня x_1 и x_2 ; график пересекает ось Ox в двух точках. | Один корень x_0 ; график касается оси Ox . | Нет корней; график лежит по одну сторону от оси Ox . |
| $a > 0$ |  |  |
| $a < 0$ |  |  |
| | | |

Дробно-линейная функция $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($ad - bc \neq 0$)

Вид графика — гипербола $y = \frac{k}{x}$, где $k = (bc - ad)/c^2$.

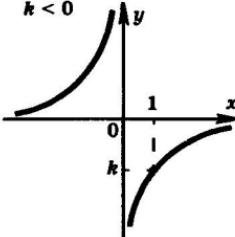
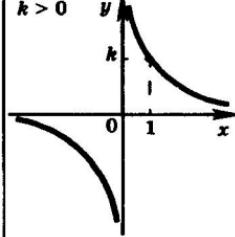
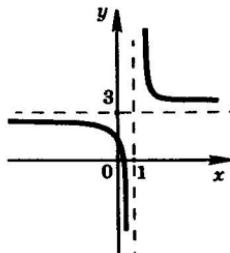
| | |
|--|--|
| <p>Функция $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$).</p> <p>$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.</p> <p>Два промежутка монотонности $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$; при $k < 0$ функция на каждом из них возрастает, при $k > 0$ на каждом убывает. Экстремумов нет. Нечетная функция.</p> | <p>Вертикальная асимптота $x = 0$, горизонтальная $y = 0$.</p> <p>$k < 0$</p>  <p>$k > 0$</p>  <p>обратная пропорциональность</p> |
|--|--|

Таблица 7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА

Примеры дробно-линейных функций

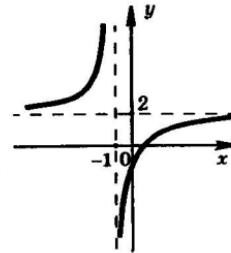
$$y = \frac{3x - 2}{x - 1} = 3 + \frac{1}{x - 1}$$

$$x \neq 1; y \neq 3; y = \frac{1}{x}$$



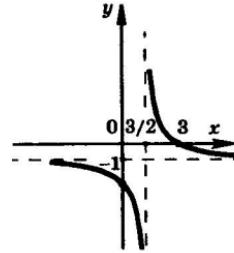
$$y = \frac{2x - 1}{x + 1} = 2 - \frac{3}{x + 1}$$

$$x \neq -1; y \neq 2; y = -\frac{3}{x}$$



$$y = \frac{6 - 2x}{2x - 3} = -1 + \frac{8}{2x - 3}$$

$$x \neq 3/2; y \neq -1; y = \frac{8}{x}$$



Функция $y = \sqrt{x}$

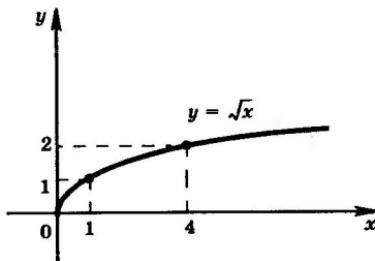
$$D(y) = [0; +\infty) = E(y).$$

Возрастает на $D(y)$.

Экстремумов нет.

Четностью и нечетностью не обладает.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$



Функция $y = \sqrt[3]{x}$

$$D(y) = (-\infty; +\infty) = E(y).$$

Возрастает на $D(y)$.

Экстремумов нет.

Нечетная функция.

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

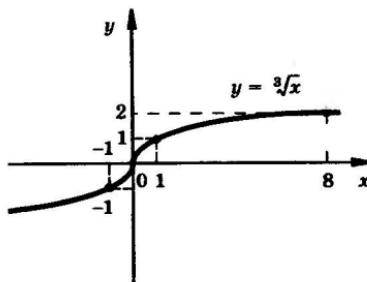


Таблица 7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА

| Степенная функция $y = x^n$ | | $y' = nx^{n-1}$ | |
|--|------------------------------|---|---|
| $n = 0; y = 1; D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty); E(y) = \{1\}.$ | | | |
| $n > 0$, натуральное | | $n < 0$, целое | |
| n — четное | n — нечетное | n — четное | n — нечетное |
| $D(y) = R$ | $D(y) = R$ | $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ | $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ |
| $E(y) = [0; +\infty)$ | $E(y) = R$ | $E(y) = (0; +\infty)$ | $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ |
| | | | |
| Четная функция | Нечетная функция | Четная функция | Нечетная функция |
| n — не целое число | | | |
| $n > 1$ | $0 < n < 1$ | $n < 0$ | |
| $D(y) = [0; +\infty) = E(y)$ | $D(y) = (0; +\infty) = E(y)$ | | |
| | | | |
| <i>Сравнение графиков степенных функций</i> | | | |
| $w < 0 < v < u < 1 < t < s$ | | | |
| | | | |

Таблица 7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА

| Показательная функция $y = a^x$ ($a > 0; a \neq 1$) $y' = a^x \cdot \ln a$ | Логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($a > 0; a \neq 1$) $y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ |
|---|---|
| $D(y) = R; E(y) = (0; +\infty);$ один промежуток монотонности; экстремумов нет. | $D(y) = (0; +\infty); E(y) = R;$ один промежуток монотонности; экстремумов нет. |
| $a > 1$ возрастает на R | $a > 1$ возрастает на $D(y)$ |
| | |
| $0 < a < 1$ убывает на R | $0 < a < 1$ убывает на $D(y)$ |
| | |
| $e = 2,718281828459045\dots \approx 2,7$ — основание натурального логарифма ($\log_e x = \ln x$). | |
| $(e^x)' = e^x$ | $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ |
| | |
| $d < c < 1 < a < b$ | $a < b < 1 < c < d$ |

Таблица 7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА

| Тригонометрические функции | | | |
|--|---|--|---|
| | $y = \sin x$ | $y = \cos x$ | $y = \operatorname{tg} x$ |
| $D(y)$ | R | R | $(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$ $k \in \mathbb{Z}$ |
| $E(y)$ | $[-1; 1]$ | $[-1; 1]$ | R |
| Беско- нечное множест- во проме- жутков монотон- ности | Убывает на $[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k];$ возрастает на $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k].$ | Убывает на $[2\pi k; \pi + 2\pi k];$ возрастает на $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k].$ | Возрастает на ка- ждом промежут- ке непрерывности $(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k).$ |
| Точки минимум- ма | $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ | $x = \pi + 2\pi k$ | нет |
| Точки максимум- ма | $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ | $x = 2\pi k$ | нет |
| Минимумы | -1 | -1 | нет |
| Макси- мумы | 1 | 1 | нет |
| Нули | $x = \pi k$ | $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ | $x = \pi k$ |
| Проме- жутки знакопос- тоянства ($y > 0$) | $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$ | $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ | $(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$ |
| Проме- жутки знакопос- тоянства ($y < 0$) | $(-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$ | $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$ | $(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k)$ |
| Период | 2π | 2π | π |
| Четность | Нечетная $\sin(-x) = -\sin x$ | Четная $\cos(-x) = \cos x$ | Нечетная $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ |
| Асимп- тоты | нет | нет | Вертикальные $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ |
| Произ- водная | $\cos x$ | $-\sin x$ | $1/\cos^2 x$ |

Таблица 7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА

| | $y = \sin x$ | $y = \cos x$ | $y = \operatorname{tg} x$ |
|---------|--------------|--------------|---------------------------|
| Графики | | | |

Обратные тригонометрические функции

| | $y = \arcsin x$ | $y = \arccos x$ | $y = \operatorname{arctg} x$ |
|--------------|--|---|-----------------------------------|
| $D(y)$ | $[-1; 1]$ | $[-1; 1]$ | R |
| $E(y)$ | $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ | $[0; \pi]$ | $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ |
| Монотонность | Возрастает на $D(y)$ | Убывает на $D(y)$ | Возрастает на $D(y)$ |
| Четность | Нечетная | — | Нечетная |
| Производная | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x \neq \pm 1)$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x \neq \pm 1)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| Графики | | | |

Таблица 8. ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ

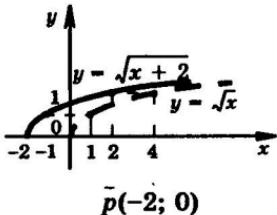
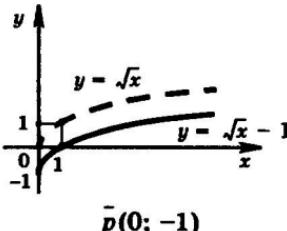
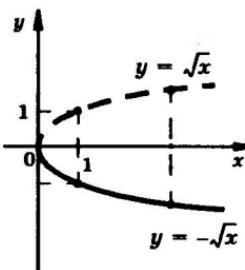
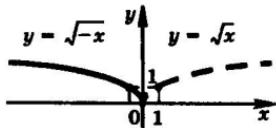
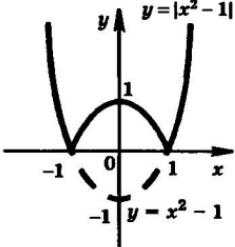
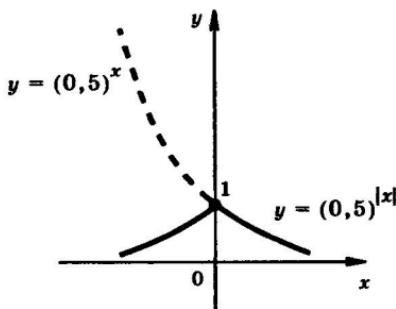
| | |
|--|---|
| $f(x + a)$ Перенос графика $y = f(x)$ на вектор $\bar{p}(-a; 0)$. |  |
| $f(x) + b$ Перенос графика $y = f(x)$ на вектор $\bar{p}(0; b)$. |  |
| $-f(x)$ Симметрия относительно оси абсцисс. |  |
| $f(-x)$ Симметрия относительно оси ординат. |  |
| $ f(x) $ Часть графика в верхней полуплоскости и на оси абсцисс без изменения, а вместо части графика в нижней полуплоскости строим симметричную ей относительно оси Ox . |  |

Таблица 8. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ

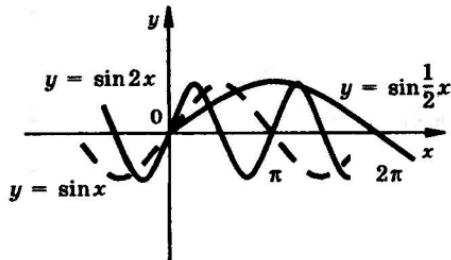
Часть графика в правой полуплоскости и на оси ординат без изменения, а вместо части в левой полуплоскости строим симметричную правой относительно оси Oy .

$f(|x|)$



При $k > 1$ сжатие к точке $(0; 0)$ вдоль оси абсцисс в k раз; при $0 < k < 1$ растяжение от точки $(0; 0)$ вдоль оси абсцисс в $1/k$ раз.

$f(kx)$
($k > 0$)



При $k > 1$ растяжение от точки $(0; 0)$ вдоль оси ординат в k раз; при $0 < k < 1$ сжатие к точке $(0; 0)$ вдоль оси ординат в $1/k$ раз.

$kf(x)$
($k > 0$)

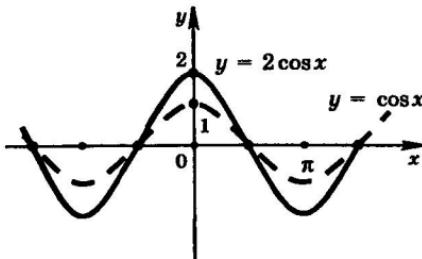


Таблица 9. ГРАФИК УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

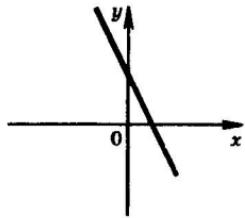
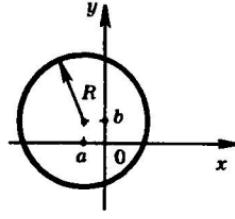
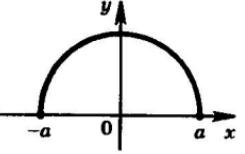
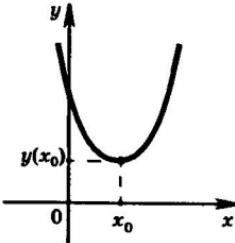
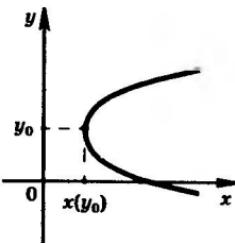
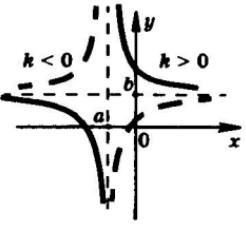
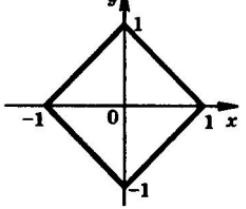
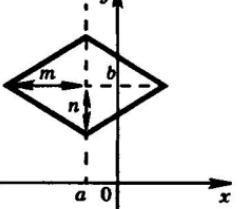
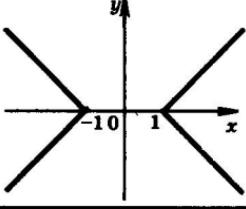
| | | |
|-------------------------------|--|---|
| $ax + by = c$ | Прямая линия. |  |
| $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ | Окружность с центром $(a; b)$ радиуса R . |  |
| $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ | Полукружность с центром $(0; 0)$ радиуса a . |  |
| $y = ax^2 + bx + c$ | Парабола вида $y = ax^2$; при $a > 0$ ветви вверх, при $a < 0$ ветви вниз; вершина $x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = y(x_0)$. |  |
| $x = ay^2 + by + c$ | Парабола вида $x = ay^2$; при $a > 0$ ветви вправо, при $a < 0$ ветви влево; вершина $y_0 = -\frac{b}{2a}, x_0 = x(y_0)$. |  |

Таблица 9. ГРАФИК УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

| | | |
|---|---|--|
| $(x - a)(y - b) = k$ $k \neq 0$ | Гипербола вида $y = \frac{k}{x}$; асимптоты $x = a$; $y = b$. |  |
| $ x + y = 1$ | Квадрат |  |
| $\frac{ x - a }{m} + \frac{ y - b }{n} = 1$ $m > 0, n > 0$ | Ромб |  |
| $ x - y = 1$ | «Перекресток» |  |

Если дан график зависимости $F(x; y) = 0$, то график зависимости $F(x - a; y - b) = 0$ можно получить переносом всех точек на вектор $\vec{p}(a; b)$;

график $F(|x|; y) = 0$ можно получить, оставив часть графика в правой полуплоскости и на оси ординат без изменения, а вместо части в левой полуплоскости построить линию, симметричную правой относительно оси Oy ;

график $F(x; |y|) = 0$ можно получить, оставив часть графика в верхней полуплоскости и на оси абсцисс без изменения, а вместо части в нижней полуплоскости построить линию, симметричную верхней части графика относительно оси Ox .

Таблица 10. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ — это многочлен второй степени; $a \neq 0$ — первый коэффициент; b — второй коэффициент; c — свободный член.

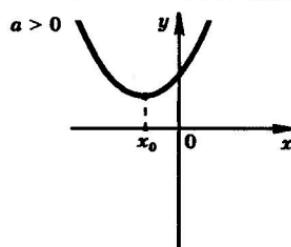
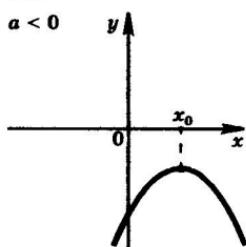
Выделение полного квадрата: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

График функции $F(x) = ax^2 + bx + c$ — парабола; координаты вершины $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = F(x_0) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{D}{4a}$.

$D = b^2 - 4ac$ — дискриминант квадратного трехчлена.

Корни квадратного трехчлена

$D < 0$ Квадратный трехчлен не имеет корней и сохраняет знак первого коэффициента при всех значениях x :
 $a \cdot F(x) > 0$.



$D = 0$ Квадратный трехчлен имеет один корень (два равных корня) $x = x_0 = -\frac{b}{2a}$.

У функции $F(x)$ два промежутка знакопостоянства, на каждом из которых она сохраняет знак первого коэффициента:
 $aF(x) > 0$ ($x \neq x_0$).

Парабола касается оси абсцисс в своей вершине.

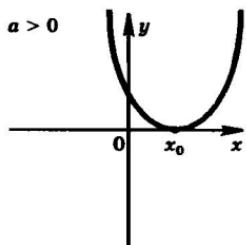
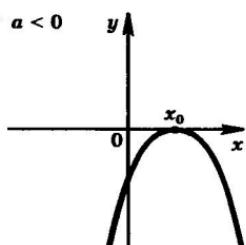
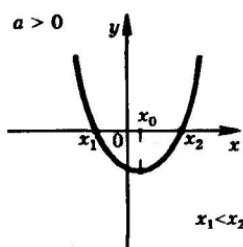
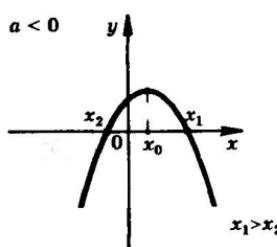


Таблица 10. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

 $D > 0$

Квадратный трехчлен имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

У функции $F(x)$ три промежутка знакопостоянства.

Теорема Виета

Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ (квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$) имеет корни x_1 и x_2 (т.е. $D \geq 0$), то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Для приведенного ($a = 1$) квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Обратная теорема: Если числа t_1 и t_2 таковы, что $t_1 + t_2 = -\frac{b}{a}$ и $t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a}$, то они являются корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ (квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$).

Пример. Квадратное уравнение $x^2 - (5 + \sqrt{7})x + 5\sqrt{7} = 0$ имеет корни $x = 5$; $x = \sqrt{7}$.

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители

 $D < 0$

Квадратный трехчлен на линейные множители не раскладывается.

 $D > 0$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

 $D = 0$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2$$

Таблица 10. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Составление квадратного трехчлена с корнями t_1 и t_2

Существует бесконечно много квадратных трехчленов с корнями t_1 и t_2 ; они имеют вид

$$a(x^2 - (t_1 + t_2)x + t_1 \cdot t_2),$$

среди них один приведенный:

$$x^2 - (t_1 + t_2)x + t_1 \cdot t_2.$$

Пример. Приведенный квадратный трехчлен с корнями 2 и 8.

$$x^2 - 10x + 16,$$

так как $2 + 8 = 10$, $2 \cdot 8 = 16$.

Корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$

положительны, если

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ D = b^2 - 4ac \geq 0 \end{cases}$$

отрицательны, если

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \\ D = b^2 - 4ac \geq 0 \end{cases}$$

одного знака, если

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ D = b^2 - 4ac \geq 0 \end{cases}$$

разных знаков, если

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$$

Таблица 11. ПРОГРЕССИИ

Последовательность — функция натурального аргумента.

| | |
|--|--|
| Задание последовательности формулой общего члена | $a_n = f(n), n \in N$ $a_n = n^2 + n + 41$ $a_1 = 43; a_2 = 47; a_3 = 53; \dots$ |
| Задание последовательности рекуррентным соотношением | Дано: $a_1; a_2; \dots; a_{n-1}$ $a_n = f(a_{n-1}; a_{n-2}; \dots; a_1)$ |
| Числа Фибоначчи: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; $(a_1 = a_2 = 1; a_{n+2} = a_n + a_{n+1})$ Формула общего члена: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$. Свойства: $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n+1} = a_{2n+2}$; $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$. | |

Арифметической прогрессией называется последовательность, заданная рекуррентным соотношением: $a_{n+1} = a_n + d, n \in N$ (a_1 — первый член прогрессии, d — разность прогрессии).

Геометрической прогрессией называется последовательность, заданная рекуррентным соотношением: $b_{n+1} = b_n \cdot q$ ($b_1 \neq 0$ — первый член прогрессии; $q \neq 0$ — знаменатель прогрессии).

| | Арифметическая (\div) | Геометрическая (\div) |
|---|---|--|
| Допустимые значения | a_1 и d любые | b_1 и q не равны нулю |
| Формула общего члена | $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ | $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ |
| Характеристическое свойство | $\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} = a_n$ | $b_{n+1} \cdot b_{n-1} = b_n^2$ $b_n \neq 0$ |
| Формула суммы n первых членов | $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n =$ $= \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ | $q \neq 1, S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} =$ $= b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ $q = 1, S_n = n \cdot b_1$ |

Таблица 11. ПРОГРЕССИИ

| | | |
|----------------|---|---|
| Другие формулы | $\frac{a_n - a_m}{n - m} = d, (n \neq m)$ | $b_n : b_m = q^{n-m}$ |
| | $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ | $b_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ |
| | $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_k + a_{n-k+1}$ | $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \dots = b_k \cdot b_{n-k+1}$ |
| | | |

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия ($0 < |q| < 1$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}.$$

Формула суммы: $S = \frac{b_1}{1-q}$

Примеры

$$0.(37) = 0,37 + 0,0037 + \dots = \frac{0,37}{1-0,01} = \frac{37}{99}$$

($b_1 = 0,37; q = 0,01$)

$$0,5(2) = 0,5 + 0,02 + 0,002 + \dots = \frac{1}{2} + \frac{0,02}{1-0,1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{90} = \frac{47}{90}$$

($b_1 = 0,02; q = 0,1$)

Суммирование

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Примеры

Если a_n арифметическая прогрессия, то

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_3 \cdot a_4} + \dots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}}.$$

Все натуральные числа, дающие при делении на 7 в остатке 5, имеют вид

$$a_n = 7(n-1) + 5 = 7n - 2, \quad n \in N.$$

Таблица 12. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ

Тригонометрической (единичной) окружностью называется окружность с центром в начале координат, радиуса 1. Точки единичной окружности можно поставить в соответствие действительным числам. Числу 0 ставится в соответствие точка $P_0(1; 0)$, а каждому числу t ставится в соответствие точка P_t , полученная поворотом точки $P_0(1; 0)$ на угол t вокруг начала координат (если $t > 0$, то поворот осуществляется против часовой стрелки, если $t < 0$ — по часовой стрелке).

Таким образом, *каждому действительному числу t соответствует единственная точка на единичной окружности P_t* , а каждой точке P_t — бесконечное множество действительных чисел вида $t + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

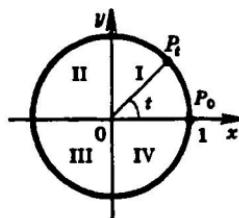
Длина дуги $P_0P_t = t$ ($0 < t \leq 2\pi$).

I четверть:

$$0 + 2\pi k < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

II четверть:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \pi + 2\pi k.$$



III четверть:

$$\pi + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k.$$

IV четверть:

$$\frac{3\pi}{2} + 2\pi k < t < 2\pi + 2\pi k.$$

Связь градусной и радианной мер:

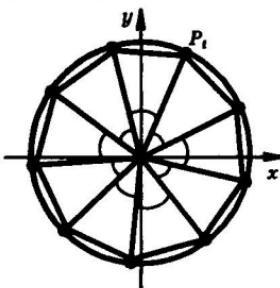
$$\alpha^\circ = \pi \cdot \left(\frac{\alpha}{180}\right) \text{ (радиан); } x \text{ (радиан)} = \left(\frac{x}{\pi} \cdot 180\right)^\circ.$$

Две точки, симметричные относительно

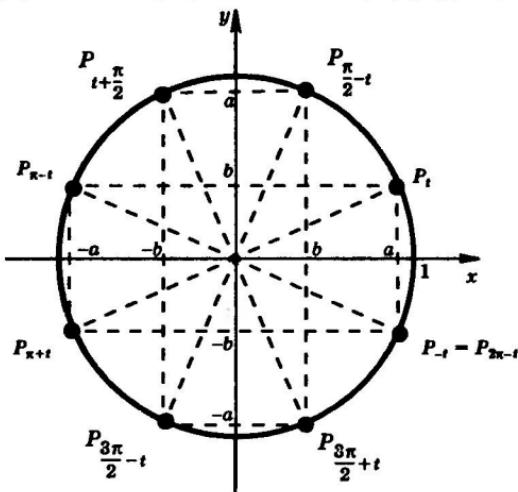
| оси абсцисс | оси ординат | начала координат |
|--|--|---|
| $\alpha = \pm t + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ | $\alpha = (-1)^n t + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ | $\alpha = t + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ |

Таблица 12. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ

Вершины правильного n -угольника, вписанного в единичную окружность (одна из вершин P_t).



$$\alpha = t + \frac{2\pi}{n} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$$



$$P_t(a; b)$$

$$P_{t+\frac{\pi}{2}}(-b; a)$$

$$P_{\pi+t}(-a; b)$$

$$P_{\frac{3\pi}{2}+t}(b; -a)$$

$$P_{\frac{\pi}{2}-t}(b; a)$$

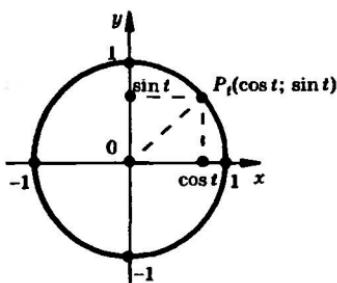
$$P_{\pi-t}(-a; b)$$

$$P_{\frac{3\pi}{2}-t}(-b; -a)$$

$$P_{-t}(a; -b)$$

Таблица 13. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Косинусом числа t называется абсцисса точки P_t единичной окружности, а **синусом** — ордината этой точки.



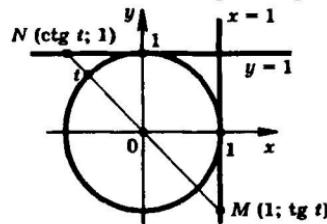
Тангенсом числа t называется отношение $\sin t$ к $\cos t$ ($\cos t \neq 0$).

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

Ось тангенсов — прямая $x = 1$. **Котангенсом** числа t называется отношение $\cos t$ к $\sin t$.

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} \quad (\sin t \neq 0)$$

Ось котангенсов — прямая $y = 1$.



Основные формулы

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1, t \in R.$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}, t \neq \pi l, l \in Z$$

Дополнительные формулы

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, t \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}, t \neq \pi k, k \in Z$$

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1, t \neq \frac{\pi l}{2}, l \in Z$$

Формулы приведения преобразуют тригонометрические функции чисел $\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha, \pi - \alpha, \pi + \alpha, \frac{3\pi}{2} - \alpha, \frac{3\pi}{2} + \alpha$ в тригонометрические функции числа $\alpha \in R$. (Удобно считать α углом первой четверти.)

| t | $\pi - \alpha$ | $\pi + \alpha$ | $\frac{\pi}{2} - \alpha$ | $\frac{\pi}{2} + \alpha$ | $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ | $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ |
|-----------------------|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| $\cos t$ | $-\cos \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $\sin \alpha$ | $-\sin \alpha$ | $-\sin \alpha$ | $\sin \alpha$ |
| $\sin t$ | $\sin \alpha$ | $-\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\cos \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $-\cos \alpha$ |
| $\operatorname{tg} t$ | $-\operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{ctg} \alpha$ | $-\operatorname{ctg} \alpha$ | $\operatorname{ctg} \alpha$ | $-\operatorname{ctg} \alpha$ |

Таблица 13. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

| Периодичность | | | | Четность | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
| $\cos(t + 2\pi) = \cos t$ $T_{\cos} = 2\pi$ | | $\operatorname{tg}(t + \pi) = \operatorname{tg} t$ $T_{\operatorname{tg}} = \pi$ | | $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ | | | |
| $\sin(t + 2\pi) = \sin t$ $T_{\sin} = 2\pi$ | | $\operatorname{ctg}(t + \pi) = \operatorname{ctg} t$ $T_{\operatorname{ctg}} = \pi$ | | $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ | | | |

Значения тригонометрических функций некоторых углов

| α , рад | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | π | $3\pi/2$ |
|-----------------------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|------------|-------------|-------------|
| α° | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 270° |
| $\sin \alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | -1 |
| $\cos \alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 | 0 |
| $\operatorname{tg} \alpha$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | не опр. | 0 | не опр. |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | не опр. | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | не опр. | 0 |

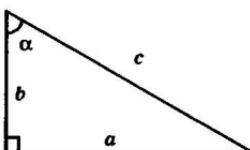
Тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$



Приближенные значения
тригонометрических функций некоторых углов

| α° | 5° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 85° | |
|------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------------------------------|
| $\sin \alpha \approx$ | 0,09 | 0,17 | 0,34 | 0,50 | 0,64 | 0,77 | 0,87 | 0,94 | 0,98 | 1,00 | $= \cos \alpha$ |
| $\operatorname{tg} \alpha \approx$ | 0,09 | 0,18 | 0,36 | 0,58 | 0,84 | 1,19 | 1,73 | 2,75 | 5,67 | 11,43 | $= \operatorname{ctg} \alpha$ |
| | 85° | 80° | 70° | 60° | 50° | 40° | 30° | 20° | 10° | 5° | α° |

Для малых положительных чисел $\sin \alpha \approx \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$.

Таблица 13. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Знаки тригонометрических функций по четвертям

| $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ |
|---------------|---------------|--|
| | | |

Способы нахождения значений тригонометрических функций числа (угла) α

| по формулам | по вспомогательному треугольнику |
|--|---|
| $\cos \alpha = -0,6$; II четверть | $\operatorname{tg} \alpha = 3$; III четверть |
| $ \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8$ $\sin \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha = 0,8$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{4}{3}$ $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{3}{4}$ | $\sin \alpha < 0 \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ $\operatorname{ctg} \alpha > 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$ |
| $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{5}{12}$; IV четверть | $\sin \alpha = 0,1$; I четверть |
| $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{169}{144}$ $ \sin \alpha = \frac{12}{13}$ $\sin \alpha < 0 \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{12}{13}$ $ \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$ $\cos \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{13}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = -\frac{12}{5}$ | $\cos \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$ $\operatorname{tg} \alpha > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{29}}$ $\operatorname{ctg} \alpha > 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{29}$ |

Таблица 13. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

| Формулы сложения | Формулы двойного угла |
|--|--|
| $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tgy}}{1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tgy}}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;$ $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad x+y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ $\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tgy}}{1 + \operatorname{tg}x\operatorname{tgy}}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;$ $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad x-y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ | $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}^2 x};$ $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$ |
| Формулы понижения степени | Дополнительные формулы |
| $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$ | $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ |
| Формулы половинного угла | Универсальная подстановка |
| $ \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ $ \sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x};$ $x \neq \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$ | $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right)}$ $\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right)}$ $x \neq \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$ |

Формулы преобразования

суммы в произведение

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} \quad \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y+x)}{\sin x \cdot \sin y} \quad \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \cdot \sin y}$$

произведения в сумму

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

Формула дополнительного угла

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \cos(x-\alpha), \text{ где } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad a^2 + b^2 \neq 0$$

Таблица 14. ЛОГАРИФМЫ

Логарифмом положительного числа a по положительному и не равному единице основанию b называется показатель степени, в который надо возвести число b , чтобы получить a .

$\log_b a = c$ ($a > 0$; $b > 0$; $b \neq 1$) тогда и только тогда, когда $b^c = a$

Основное логарифмическое тождество: $b^{\log_b a} = a$.

Примеры

| | | |
|--|------------------------|---|
| $5^{\log_5 7} = 7$ | $2^{\log_2 0,7} = 0,7$ | $8^{\log_2 3} = (2^3)^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^3 = 3^3 = 27$ |
| $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$ | | $\log_{0,25} 16 = -2$, так как $0,25^{-2} = 16$ |
| $\log_9 27 = 1,5$, так как $9^{\frac{3}{2}} = 27$ | | $\log_{25} \sqrt{5} = 0,25$, так как $25^{0,25} = \sqrt{5}$ |

$\log_9 (-7)$ не определен, так как $-7 < 0$;

$\log_{(-2)} (-8)$ не определен, так как $-2 < 0$, $-8 < 0$;

$\log_1 27$ не определен, так как не выполнено условие $b \neq 1$.

Логарифмы по основанию 10 называются *десятичными логарифмами*: $\log_{10} a = \lg a$.

Примеры.

$\lg 100 = 2$; $\lg 0,0001 = -4$; $\lg 100000000 = 8$;

$3 < \lg 2156 < 4$; $-1 < \lg 0,56 < 0$.

| a | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\lg a \approx$ | 0,30 | 0,48 | 0,60 | 0,70 | 0,78 | 0,85 | 0,90 | 0,95 |

Логарифмы по основанию e называются *натуральными логарифмами*: $\log_e a = \ln a$.

$e = 2,718281828459045\dots$ иррациональное число; $e \approx 2,7$.

| a | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 100 | 1000 |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\ln a \approx$ | 0,69 | 1,10 | 1,39 | 1,61 | 1,79 | 1,95 | 2,08 | 2,20 | 2,30 | 4,61 | 6,91 |

Таблица 14. ЛОГАРИФМЫ

Свойства логарифмов

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^m = m$$

$$\log_a \frac{1}{a} = -1$$

$$\log_{a^m} a = \frac{1}{m}$$

$$\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$$

Основные соотношения

Логарифм произведения:

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b.$$

Логарифм частного:

$$\log_c(a/b) = \log_c a - \log_c b.$$

Логарифм степени:

$$\log_c a^k = k \log_c a.$$

Переход к новому основанию:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

Дополнительные соотношения

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$$

$$\frac{\log_n b}{\log_n c} = \frac{\log_m b}{\log_m c} = \log_c b$$

$$\log_n b \cdot \log_m c = \log_m b \cdot \log_n c$$

$$a^{\log_n b} = b^{\log_n a}$$

Примеры

$$5^{\frac{1}{\log_6 5}} = 5^{\log_5 6} = 6.$$

$$\sqrt{\log_5 49 \cdot \log_7 25} = \sqrt{\log_7 49 \cdot \log_5 25} = \sqrt{2 \cdot 2} = 2.$$

$$\text{Сравнить: } 4^{\log_3 7} \text{ и } 6^{\log_3 4}.$$

$$\text{Tак как } 6^{\log_3 4} = 4^{\log_3 6} \text{ и } \log_3 7 > \log_3 6, \text{ то } 4^{\log_3 7} > 6^{\log_3 4}.$$

Сравнение логарифмовЕсли $0 < a < 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$.

(знак неравенства меняется)

Если $a > 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$

(знак неравенства не меняется)

Если $1 < a < b$ и $x > 1$, то $\log_a x > \log_b x$.Если $0 < a < b < 1$ и $x > 1$, то $\log_a x > \log_b x$.Если $1 < a < b$ и $0 < x < 1$, то $\log_a x < \log_b x$.Если $0 < a < b < 1$ и $0 < x < 1$, то $\log_a x < \log_b x$.

Таблица 14. ЛОГАРИФМЫ

$\log_b a > 0$ тогда и только тогда, когда положительные числа a и b лежат «по одну сторону от единицы»: $a > 0$; $b > 0$ и $(a - 1)(b - 1) > 0$.

$\log_b a < 0$ тогда и только тогда, когда положительные числа a и b лежат «по разные стороны от единицы»: $a > 0$; $b > 0$ и $(a - 1)(b - 1) < 0$.

Примеры

| | | |
|------------------------------------|--|-----------------------|
| $\log_{0,7} 0,2 < \log_{0,7} 0,11$ | $\log_6 2 < \log_6 11$ | $\log_5 7 > \log_8 7$ |
| $\log_{0,2} 7 > \log_{0,8} 7$ | $\log_4 5 < \log_3 5 < \log_3 6 \Rightarrow \log_4 5 < \log_3 6$ | |

Сравнить $\log_4 15$ и $\sqrt{17}$.

Так как $\log_4 15 < 4$, а $\sqrt{17} > 4$, то

$\log_4 15 < \sqrt{17}$.

Сравнить $\log_3 4$ и $\log_4 5$.

$$\begin{array}{lll} I \text{ способ.} & \log_3 4 & ? \\ & \log_3 4 - 1 & ? \\ & \log_3 \frac{4}{3} & ? \end{array} \quad \begin{array}{lll} \log_4 5 & ? \\ \log_4 5 - 1 & \\ \log_4 \frac{5}{4} & ? \end{array}$$

Так как $\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$, то

$$\log_3 \frac{4}{3} > \log_3 \frac{5}{4} > \log_4 \frac{5}{4},$$

т. е. $\log_3 4 > \log_4 5$.

II способ. Рассмотрим функцию $f(x) = \log_x (x + 1) = \frac{\ln(x + 1)}{\ln x}$

при $x > 1$.

$$f'(x) = \frac{\frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{x \cdot \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2} < 0$$

при $x > 1$.

Значит, $\log_3 4 > \log_4 5$, так как функция $f(x)$ убывает.

Таблица 15. УРАВНЕНИЯ

Корнем уравнения называется значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное равенство.

Примеры

$x^3 + x = 0$ — один корень: $x = 0$.

$(x^2 + x - 12) \cdot \sqrt{x+3} = 0$ — два корня: $x = -3, x = 3$.

$\sin(\pi x) = 0$ — бесконечное число корней $x \in \mathbb{Z}$.

$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ — верно при всех $x \in \mathbb{R}$.

$x^2 = x^2 + 1$ — нет корней (пустое множество корней \emptyset).

Два уравнения называются **равносильными**, если множества их корней совпадают.

Примеры

$x^2 - x + 2$ и $x^2 - x - 2 = 0$ равносильны.

$x^4 + 2 = -16$ и $\sin 3x = 2$ равносильны.

$\sqrt{x} = 2x - 6$ и $x = (2x - 6)^2$ неравносильны.

Неравносильные преобразования

могут привести к:

потере корня

$$\begin{aligned}x(x+5) &= 2x \\x+5 &= 2 \\x &= -3 \\&\text{Потерян корень } x = 0.\end{aligned}$$

правильное решение:
 $x^2 + 5x - 2x = 0$
 $x^2 + 3x = 0$
 $x(x+3) = 0$
 $x = 0; x = -3$

появлению «посторонних» корней

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x-1}{x-1} &= \frac{4x-3}{x-1} \\x^2+x-1 &= 4x-3 \\x^2-3x+2 &= 0 \\x = 1 \text{ и } x &= 2 \\&\text{«Посторонний» корень } x = 1.\end{aligned}$$

правильное решение:
 $x^2 + x - 1 = 4x - 3$
 $x \neq 1$
 $x^2 - 3x + 2 = 0$
 $x \neq 1$
Ответ: $x = 2$.

Таблица 15. УРАВНЕНИЯ

Методы решения уравнений

Разложение на множители

Произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них ноль, а остальные при этом существуют.

$$(x-1)(x^2-4) \cdot \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = \pm 2 \\ x = 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 0 \end{array} \right. \text{Ответ: } 0; 1; 2.$$

Замена переменной

$$\begin{aligned} (x+1)^4 + x^2 = 1 - 2x &\Leftrightarrow (x+1)^4 + (x^2 + 2x + 1) = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = (x+1)^2 \geq 0 \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \\ t \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Использование монотонности

$2^x + 5^x = 29$. Функция $f(x) = 2^x + 5^x$ возрастает; $f(2) = 29 \Rightarrow x = 2$ — единственный корень.

Сравнение обеих частей по величине

$$\begin{aligned} \sin^7 x - \cos^{22} x = 1 &\Leftrightarrow \sin^7 x = 1 + \cos^{22} x, \left(\begin{array}{l} \sin^7 x \leq 1 \\ 1 + \cos^{22} x \geq 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin^7 x = 1 \\ \cos^{22} x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Использование однородности

$$3(x+8)^2 - 4(x+8)(x^2 + 2x + 2) + (x^2 + 2x + 2)^2 = 0.$$

Пусть $x+8 = a$; $x^2 + 2x + 2 = b$. Тогда $3a^2 - 4ab + b^2 = 0$,

$$a_{1,2} = \frac{2b \pm b}{3}; \quad a = b \text{ или } a = \frac{b}{3}.$$

| | | |
|----------------------|---------------------------------------|---|
| $x+8 = x^2 + 2x + 2$ | $3x + 24 = x^2 + 2x + 2$ | $\text{Ответ: } -3; 2;$ |
| $x^2 + x - 6 = 0$ | $x^2 - x - 22 = 0$ | |
| $x_1 = -3; x_2 = 2$ | $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{89}}{2}$ | $\frac{1 - \sqrt{89}}{2}; \frac{1 + \sqrt{89}}{2}.$ |

Таблица 15. УРАВНЕНИЯ

Линейные уравнения
(приводимые к виду $ax = b$)

| | | |
|--|---|----------------------------------|
| $a \neq 0$ один корень $x = \frac{b}{a}$ | $a = b = 0$ бесконечное множество корней $x \in R$ | $a = 0, b \neq 0$ решений нет |
|--|---|----------------------------------|

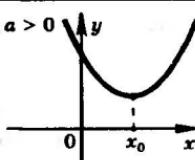
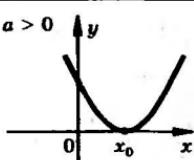
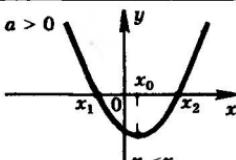
Квадратные уравнения

(приводимые к виду $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$)

Равносильными преобразованиями уравнение приводится к виду

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Наличие корней зависит от знака выражения:

$D = b^2 - 4ac$ (дискриминант квадратного уравнения).

| $D < 0$ корней нет | $D = 0$ один корень $x = -\frac{b}{2a}$ | $D > 0$ два корня $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ |
|---|---|---|
|  |  |  |

Частные формулы для решения квадратных уравнений

| | |
|--|--|
| Приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0 \quad (a = 1)$ | Квадратное уравнение с четным вторым коэффициентом $ax^2 + 2kx + c = 0 \quad (b = 2k)$ |
| Если $D > 0$, $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$; если $D = 0$, $x = -\frac{p}{2}$. | $D^* = k^2 - ac \quad (D^* = \frac{1}{4}D)$ Если $D^* > 0$, $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D^*}}{a}$; если $D^* = 0$, $x = -\frac{k}{a}$. |

Неполное квадратное уравнение

| | | |
|---|---|-------------------------------|
| $ax^2 + c = 0 \quad (b = 0)$ | $ax^2 + bx = 0 \quad (c = 0)$ | $ax^2 = 0$ |
| Если $ac > 0$, решений нет; если $ac < 0$, $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$. | $x(ax + b) = 0$ два корня: $x = 0, x = -\frac{b}{a}$. | один корень $x = 0$ |

Таблица 15. УРАВНЕНИЯ

Алгебраические уравнения высших степеней

(приводимые к виду $f(x) = 0$, где $f(x)$ — многочлен степени выше 2)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--|----|---|---|----|---|----|---|---|---|---|----|---|---|---|---|---|
| <p>Разложение на множители</p> $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ $x^2(x - 2) - (x - 2) = 0$ $(x - 2)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 2; x = \pm 1$ | <p>Подстановка (биквадратное уравнение)</p> $x^4 - 3x^2 + 2 = 0; \quad x^2 = t$ $t^2 - 3t + 2 = 0$ $t = 1; t = 2 \Rightarrow x = \pm 1; x = \pm \sqrt{2}$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>Применение схемы Горнера</p> $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>1</td><td>-4</td><td>1</td><td>6</td></tr> <tr> <td>-1</td><td>1</td><td>-5</td><td>6</td><td>0</td></tr> <tr> <td>2</td><td>1</td><td>-3</td><td>0</td></tr> <tr> <td>3</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table> $\Rightarrow x = -1$ $\Rightarrow x = 2$ $\Rightarrow x = 3$ | 1 | -4 | 1 | 6 | -1 | 1 | -5 | 6 | 0 | 2 | 1 | -3 | 0 | 3 | 1 | 0 | <p>Использование монотонности</p> $x^3 + x - 6\sqrt{5} = 0$ $x^3 + x = 6\sqrt{5}$ <p>Функция $F(x) = x^3 + x$ возрастает на \mathbb{R}; $F(\sqrt{5}) = 6\sqrt{5} \Rightarrow x = \sqrt{5}$ — единственный корень.</p> |
| 1 | -4 | 1 | 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | 1 | -5 | 6 | 0 | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | -3 | 0 | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>Возвратное уравнение</p> $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$ <p>Так как $x = 0$ не является корнем, можно делить на x^2.</p> $2x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} = 0,$ $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$ <p>Подстановка: $y = x + \frac{1}{x}$;</p> $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}.$ $2(y^2 - 2) - 5y + 6 = 0$ $2y^2 - 5y + 2 = 0$ | <p>Использование однородности</p> $3x^2 + 4x(x^2 + 3x + 4) + (x^2 + 3x + 4)^2 = 0$ <p>Пусть $y = x^2 + 3x + 4$.</p> <p>Тогда $3x^2 + 4xy + y^2 = 0$.</p> <p>Решаем относительно x:</p> $x = -y; \quad x = -\frac{1}{3}y.$ <p>Следовательно,</p> $\begin{cases} x = -x^2 - 3x - 4 \\ 3x = -x^2 - 3x - 4 \end{cases}$ <p><i>Ответ:</i> $-2; -3 \pm \sqrt{5}$.</p> | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>Уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно системе:</p> $\begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ | <p>Уравнение $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ равносильно системе:</p> $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \text{ (или } g(x) \geq 0) \end{cases}$ | | | | | | | | | | | | | | | | |

Неравенства в системах, как правило, проверяют, а не решают.

Иrrациональные уравнения

| | | |
|--|--|--|
| <i>Простейшие</i> | $\sqrt{3x+1} = 2$ $3x+1 = 4$ $x = 1$ | $\sqrt{1-2x} = -5$ корней нет |
| <i>Возведение обеих частей уравнения в степень</i> | $\sqrt{5x+6} + \sqrt{3x+4} = 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6 \geq 0; 3x+4 \geq 0 \\ 5x+6 + 3x+4 + 2\sqrt{(5x+6)(3x+4)} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6 \geq 0 \\ \sqrt{(5x+6)(3x+4)} = -4x-3 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6 \geq 0; -4x-3 \geq 0 \\ (5x+6)(3x+4) = (-4x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = -1$ | <i>Замена переменной</i> $\sqrt{2-x} = 3x+8$ Пусть $y = \sqrt{2-x} \geq 0$. Тогда $x = 2 - y^2$ и $y = 3(2 - y^2) + 8 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 3y^2 + y - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = -2$ |

Уравнения, связанные со степенной функцией

| | | |
|--|--|--|
| $5x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = 0$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y = x^{1/3} \geq 0 \end{cases}$ $5y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 1; y = -\frac{6}{5} < 0$ $x^{1/3} = 1 \Rightarrow x = 1$ | $5\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 6 = 0$ $y = \sqrt[3]{x} \in R$ $5y^2 + y - 6 = 0$ $y = \sqrt[3]{x} = 1, y = \sqrt[3]{x} = -\frac{6}{5}$ $x = -\left(\frac{6}{5}\right)^3 = -\frac{216}{125}$ | $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{4}{3}} = 4$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 4 \end{cases}$ $x^2 = 4$ $x = \pm 2$ <i>Ответ:</i> $x = 2$. |
|--|--|--|

Таблица 15. УРАВНЕНИЯ

Показательные уравнения

Решение простейших показательных уравнений основано на монотонности показательной функции $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1, D(y) = R, E(y) = (0; +\infty)$).

Простейшее показательное уравнение $a^x = b$ при $b > 0$ имеет единственное решение, записывающееся в общем виде $x = \log_a b$.

При $b \leq 0$ решений нет.

| | | | | | |
|-----------------|---------------------|---------------------|-------------|-------------|---------------|
| $6^x = 36$ | $2^x = \frac{1}{8}$ | $100^x = 10$ | $10^x = 3$ | $e^x = 2$ | $625^x = -25$ |
| $x = \log_6 36$ | $x = \log_2 (1/8)$ | $x = \log_{100} 10$ | $x = \lg 3$ | $x = \ln 2$ | решений нет |
| $x = 2$ | $x = -3$ | $x = 0,5$ | | | |

Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильны уравнению $f(x) = g(x)$.

Методы решения показательных уравнений

| Приведение к одному основанию | Логарифмирование обеих частей уравнения |
|--|--|
| $5^x \cdot 0,2 = 125^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{5}$ $5^x \cdot 5^{-1} = 5^{\frac{3x}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$ $5^{x-1} = 5^{\frac{3x+1}{2}}$ $x-1 = \frac{3x+1}{2} \Rightarrow x = -3$ | $6^{1/x} \cdot 2^x = 12$ Логарифмируем по основанию 2: $\frac{1}{x} \log_2 6 + x = \log_2 12 \Leftrightarrow$ $1 + \log_2 3 + x^2 = (2 + \log_2 3)x$ $x^2 - (2 + \log_2 3)x + (1 + \log_2 3) = 0$ <i>Ответ:</i> $x = 1; x = 1 + \log_2 3$. |

| Вынесение за скобку | Составление отношения | Замена переменной |
|---------------------------------|--|-----------------------------|
| $7^x + 7^{x+2} = 350$ | $4^x + 3^{x-1} = 4^{x-1} + 3^{x+2}$ | $25^x + 5^x + 1 - 6 = 0$ |
| $7^x(1 + 7^2) = 350$ | $4^x - 4^{x-1} = 3^{x+2} - 3^{x-1}$ | $5^x = y > 0$ |
| $7^x = \frac{350}{1 + 7^2} = 7$ | $4^{x-1}(4 - 1) = 3^{x-1}(3^3 - 1)$ | $y^2 + 5y - 6 = 0$ |
| $x = 1$ | $4^{x-1} \cdot 3 = 3^{x-1} \cdot 26$ | $y = 1; y = -6 < 0$ |
| | $\frac{4^{x-1}}{3^{x-1}} = \frac{26}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{x-1} = \frac{26}{3}$ | $5^x - 1 \Rightarrow x = 0$ |
| | $x = \log_{\frac{4}{3}} \frac{26}{3} + 1$ | |

Таблица 15. УРАВНЕНИЯ

| «Завуалированное» обратное число | Использование однородности | Использование монотонности |
|---|--|--|
| $(\sqrt{5} - 2)^x + (\sqrt{5} + 2)^x = 18$ | $3 \cdot 16^x - 12^x - 4 \cdot 9^x$ | $2^x + 5^x = 29$ |
| $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = -5 - 4 = 1$ | Делим на $9^x > 0$: | $f(x) = 2^x + 5^x$ возрастает на R . |
| Пусть $(\sqrt{5} - 2)^x = y > 0$ | $3 \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^x - \left(\frac{12}{9}\right)^x - 4 = 0$ | $f(2) = 29 \Rightarrow x = 2$ — единственный корень. |
| $y + \frac{1}{y} = 18 \Rightarrow y = 9 \pm 4\sqrt{5}$ | $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{4}{3}\right)^x - 4 = 0$ | |
| $(\sqrt{5} - 2)^x = 9 - 4\sqrt{5} = -(\sqrt{5} - 2)^2 \Rightarrow x = 2$ | Пусть $\left(\frac{4}{3}\right)^x = y > 0 \Rightarrow$ | |
| $(\sqrt{5} - 2)^x = 9 + 4\sqrt{5} = -(\sqrt{5} + 2)^2 = (\sqrt{5} - 2)^{-2} \Rightarrow x = -2$ | $3y^2 - y - 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}; y = -1 < 0 \Rightarrow$ | |
| Ответ: 2; -2. | $\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 1$ | |

Логарифмические уравнения

Решение простейших логарифмических уравнений основано на монотонности логарифмической функции $y = \log_a x$ ($a > 0$; $a \neq 1$; $D(y) = (0; +\infty)$; $E(y) = R$).

Типы простейших логарифмических уравнений

- 1) $\log_a x = b$ при всех допустимых a имеет единственное решение $x = a^b$.
- 2) $\log_a (f(x)) = b$ равносильно уравнению $f(x) = a^b$.
- 3) $\log_a (f(x)) = g(x)$ равносильно уравнению $f(x) = a^{g(x)}$.

4) $\log_a (f(x)) = \log_a (g(x))$ равносильно системе:
$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Причем любую из двух последних строк можно (и, как правило, нужно) опустить.

В логарифмических уравнениях, как правило, совершенно не обязательно находить области существования функций, входящих в уравнение. Достаточно проверить, какие из полученных корней уравнения системы удовлетворяют неравенствам в системе.

Таблица 15. УРАВНЕНИЯ

Уравнения, сводящиеся к типу 4

$$\log_2(x^2 + x - 2) = 1 + \log_2 x \Leftrightarrow \log_2(x^2 + x - 2) = \log_2(2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 2x \\ 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \\ x > 0 \end{cases}$$

Замена переменной

$$\lg^2\left(\frac{10}{x}\right) + \lg x = 7$$

$$(\lg 10 - \lg x)^2 + \lg x = 7 \Leftrightarrow y = \lg x \Rightarrow$$

$$(1 - y)^2 + y = 7 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 3 \\ \lg x = -2 \end{cases}$$

Ответ:

$$x = 1000; x = 0,01.$$

Потенцирование уравнений, сводящихся к типу 4

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) + \log_3\left(\frac{x}{2}\right) = 2 - 2\log_{\frac{1}{9}}(x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x+1) - \log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{2} = \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9} - \log_{\frac{1}{3}}(x^2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}}\frac{2(x+1)}{x} = \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9x^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{2(x+1)}{x} = \frac{1}{9x^2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{11}-3}{6}$$

Уравнение с неизвестным в основании логарифма

$$\log_x 5 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}$$

Ответ: $\sqrt[3]{5}$.

$$\log_{(-x)} 25 = -2$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x \neq -1 \\ (-x)^{-2} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x \neq -1 \\ x^2 = \frac{1}{25} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$$

Ответ: $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Таблица 15. УРАВНЕНИЯ

Тригонометрические уравнения

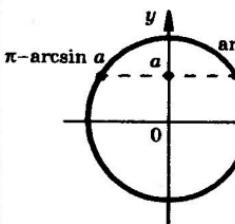
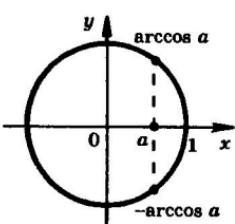
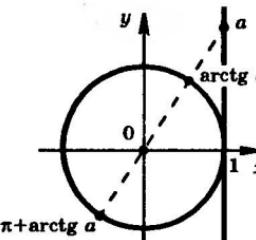
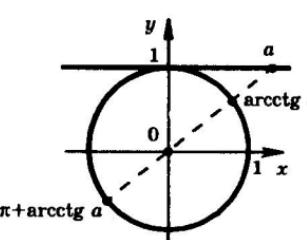
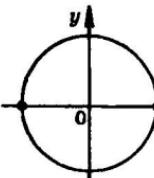
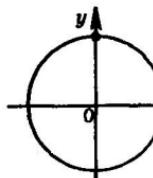
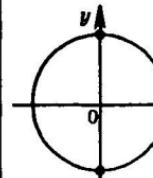
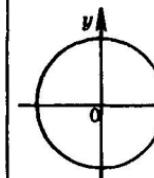
| $\sin x = a$ | | $\cos x = a$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|------------|-------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---|-----------------|---|---|
| $ a > 1$ | $ a \leq 1$ | $ a > 1$ | $ a \leq 1$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| решений нет |  $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ | решений нет |  $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| При $ a \leq 1$: $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$ $\sin(\arcsin a) = a$ $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ | | <table border="1"> <tr> <td>a</td><td>0</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>1</td></tr> <tr> <td>$\arcsin a$</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{6}$</td><td>$\frac{\pi}{4}$</td><td>$\frac{\pi}{3}$</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td></tr> <tr> <td>$\arccos a$</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>$\frac{\pi}{3}$</td><td>$\frac{\pi}{4}$</td><td>$\frac{\pi}{6}$</td><td>0</td></tr> </table> $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$ | a | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\arcsin a$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\arccos a$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | 0 | При $ a \leq 1$: $0 \leq \arccos a \leq \pi$ $\cos(\arccos a) = a$ $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ |
| a | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\arcsin a$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\arccos a$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\tg x = a$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  $x = \arctg a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ | |  $x = \text{arcctg } a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| При любом a : $-\frac{\pi}{2} < \arctg a < \frac{\pi}{2}$ $\tg(\arctg a) = a$ $\arctg(-a) = -\arctg a$ | | <table border="1"> <tr> <td>a</td><td>0</td><td>$\frac{1}{\sqrt{3}}$</td><td>1</td><td>$\sqrt{3}$</td></tr> <tr> <td>$\arctg a$</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{6}$</td><td>$\frac{\pi}{4}$</td><td>$\frac{\pi}{3}$</td></tr> <tr> <td>$\text{arcctg } a$</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>$\frac{\pi}{3}$</td><td>$\frac{\pi}{4}$</td><td>$\frac{\pi}{6}$</td></tr> </table> $\arctg a + \text{arcctg } a = \frac{\pi}{2}$ | a | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\arctg a$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\text{arcctg } a$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | При любом a : $0 < \text{arcctg } a < \pi$ $\text{ctg}(\text{arcctg } a) = a$ $\text{arcctg}(-a) = \pi - \text{arcctg } a$ | | | |
| a | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\arctg a$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\text{arcctg } a$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Таблица 15. УРАВНЕНИЯ

Частные решения

| $\sin x = 0$ | $\sin x = 1$ | $\cos x = 0$ | $\cos x = 1$ |
|--|---|---|---|
|  |  |  |  |
| $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ | $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ | $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ | $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ |
| $\sin(f(x)) = a$ | | $\cos(f(x)) = a$ | |
| при $ a < 1$: | | при $ a < 1$: | |
| $f(x) = \arcsin a + 2\pi n$ $f(x) = \pi - \arcsin a + 2\pi n$ $n \in \mathbb{Z}$ | | $f(x) = \pm \arccos a + 2\pi n$ $n \in \mathbb{Z}$ | |
| при всех a : | | $f(x) = \operatorname{arctg} a + \pi n$ $n \in \mathbb{Z}$ | |

Методы решения тригонометрических уравнений

Тригонометрические уравнения, приводимые к уравнениям от одной тригонометрической функции одной переменной, решаются (как правило) подстановкой.

| | |
|--|---|
| $\sin^2 x + 4\cos x = 2,75$ | $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 4$ |
| $1 - \cos^2 x + 4\cos x = 2,75$ | $\operatorname{tg} x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 4$ |
| $\cos x = t; t \leq 1$ | $\operatorname{tg} x = t$ |
| $t^2 - 4t + 1,75 = 0$ | $t^2 - 4t + 3 = 0$ |
| $t = \frac{1}{2}; t = \frac{7}{2} > 1$ | $t = 1; t = 3$ |
| $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ | $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k \end{array} \right. n, k \in \mathbb{Z}$ |

$$\begin{aligned}
 &\cos^2 x + \cos 4x = 0,25 \\
 &0,5(1 + \cos 2x) + 2\cos^2 2x - 1 = 0,25 \\
 &\cos 2x = u; |u| \leq 1 \\
 &4u^2 + u - 1,5 = 0 \\
 &u = \frac{1}{2}; u = -\frac{3}{4} \\
 &x = \pm \frac{1}{2} \arccos(-\frac{3}{4}) + \pi n; x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Таблица 15. УРАВНЕНИЯ

**Однородные тригонометрические уравнения
и уравнения, сводящиеся к ним**

| | |
|--|--|
| $2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$ $\cos x(2\sin x - \cos x) = 0$ $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $2\sin x - \cos x = 0$ Корни уравнения $\cos x = 0$ не удовлетворяют этому уравнению. Делим на $\cos x \neq 0$: $2\tg x - 1 = 0$ $\tg x = \frac{1}{2}$ $x = \arctg \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ | $5\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 2$ $5\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = -2\cos^2 x + 2\sin^2 x$ $3\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 4\cos^2 x = 0$ $\cos x \neq 0$. Делим на $\cos^2 x$: $3\tg^2 x + \tg x - 4 = 0 \Rightarrow$ $\tg x = 1; \tg x = -\frac{4}{3}$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n; x = -\arctg \frac{4}{3} + \pi k;$ $n, k \in \mathbb{Z}$ |
|--|--|

Разложение на множители

$$\begin{aligned} &\sqrt{2}\sin x \cdot \cos x - 2 = \cos x - 2\sqrt{2}\sin x \\ &\sqrt{2}\sin x \cdot \cos x - \cos x - 2 + 2\sqrt{2}\sin x = 0 \\ &\cos x(\sqrt{2}\sin x - 1) - 2(1 - \sqrt{2}\sin x) = 0 \\ &(\sqrt{2}\sin x - 1)(\cos x + 2) = 0 \\ &\left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin x - 1 = 0 \\ \cos x + 2 = 0 \end{array} \right. \\ &\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n; \\ &n \in \mathbb{Z} \\ &\cos x = -2, \text{ корней нет.} \end{aligned}$$

**Уравнения, решаемые на основе условия
равенства тригонометрических функций**

| | | |
|---|--|--|
| $\sin f(x) = \sin \varphi(x)$ $\left[\begin{array}{l} f(x) = \varphi(x) + 2\pi k \\ f(x) = \pi - \varphi(x) + 2\pi n \end{array} \right.$ $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$ | $\cos f(x) = \cos \varphi(x)$ $f(x) = \varphi(x) + 2\pi n$ $f(x) = -\varphi(x) + 2\pi k$ $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$ | $\tg f(x) = \tg \varphi(x)$ $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \varphi(x) + \pi n \\ \varphi(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi l \end{array} \right.$ $n \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}$ |
|---|--|--|

Таблица 15. УРАВНЕНИЯ

Уравнения с обратными тригонометрическими функциями

| $\arcsin x = a$ | $\arccos x = a$ | $\operatorname{arctg} x = a$ | $\operatorname{arcctg} x = a$ |
|---|--------------------------------------|---|---|
| $-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ $x = \sin a$ | $0 \leq a \leq \pi$ $x = \cos a$ | $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ $x = \operatorname{tg} a$ | $0 < a < \pi$ $x = \operatorname{ctg} a$ |
| $a < -\frac{\pi}{2}$ или $a > \frac{\pi}{2}$ решений нет | $a < 0$ или $a > \pi$ решений нет | $a \leq -\frac{\pi}{2}$ или $a \geq \frac{\pi}{2}$ решений нет | $a \leq 0$ или $a \geq \pi$ решений нет |

Уравнения с параметрами

Решить уравнение $\frac{2x + 3}{x - a} = 0$ для каждого значения a .

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2x + 3 = 0 \\ x - a \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x \neq a. \end{cases}$$

Ответ: при $a \neq -\frac{3}{2}$ $x = -\frac{3}{2}$, при $a = -\frac{3}{2}$ решений нет.

Найти все такие значения p , для которых один из корней уравнения $x^2 - 3px + 2p^2 = 0$ равен 1, и для каждого такого значения p найти остальные корни.

Для того чтобы один из корней уравнения был равен 1, необходимо и достаточно, чтобы $1^2 - 3p \cdot 1 + 2p^2 = 0$, т. е. $2p^2 - 3p + 1 = 0$, $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{1}{2}$.

При $p = 1$ $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;

при $p = \frac{1}{2}$ $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Ответ: при $p = 1$ и при $p = \frac{1}{2}$. При $p = 1$ $x_2 = 2$; при $p = \frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{1}{2}$.

Уравнения с параметрами (продолжение)

При каких значениях a уравнение $4^x - (a + 2) \cdot 2^x + 2a = 0$ имеет
а) хотя бы одно решение; б) ровно одно решение; в) более одного
решения?

Сделаем замену $2^x = t$,

$$t^2 - (a + 2) \cdot t + 2a = 0, t_1 = a, t_2 = 2.$$

$2^x = 2, x = 1$ при любом a .

$2^x = a$, при $a \leq 0$ решений нет; при $a > 0 \quad x = \log_2 a$.

Заметим, что при $a = 2 \quad x = 1$ совпадает с первым корнем.

Ответ: а) при всех значениях a ; б) при $a \leq 0$ и $a = 2$; в) при $0 < a < 2$ и $a > 2$.

При каких значениях b уравнения $\sin^2 x - (3 + b) \sin x + 3b = 0$ и $x^2 = b$ равносильны?

Если первое уравнение имеет решение x_0 , то оно имеет и бесконечно много решений вида $x_0 + 2\pi k$, т. е. не может быть равносильно уравнению $x^2 = b$, имеющему не более двух решений.

Уравнения равносильны, если они оба не имеют решений.

Уравнение $x^2 = b$ при $b < 0$ не имеет решений, второе уравнение

равносильно объединению $\begin{cases} \sin x = b \\ \sin x = 3, \end{cases}$ не имеющему решений

при $b < -1$ или $b > 1$. Таким образом, оба уравнения не имеют решений, т. е. равносильны при $b < -1$.

Ответ: при $b < -1$.

Найти все значения p , при которых сумма действительных корней уравнения $x^2 - px + 3 = 0$ меньше пяти.

При $D \geq 0 \quad x_1 + x_2 = p$.

$$\begin{cases} p < 5 \\ D \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p < 5 \\ p^2 - 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; 5).$$

Ответ: $p \in (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; 5)$.

Таблица 15. УРАВНЕНИЯ

Уравнения с параметрами (продолжение)

При каких значениях m уравнения $x^2 + 3x - m = 0$ и $mx^2 + x + 3 = 0$ имеют общий корень? Для каждого такого значения m найти этот корень.

Пусть t — общий корень уравнений. Составим систему двух уравнений с двумя неизвестными (t и m):

$$\begin{cases} t^2 + 3t - m = 0 \\ mt^2 + t + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(t + 3) = m \\ t + 3 = -mt^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(t + 3) = m \\ m = -mt^2 - t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t(t + 3) = m \\ m = 0 \\ t = -1 \end{cases}$$

При $m = 0$ $\begin{cases} x^2 + 3x = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$ общий корень $x = -3$;

при $t = -1$ $m = (-1)(-1 + 3) = -2$.

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 2 = 0 \\ -2x^2 + x + 3 = 0 \end{cases} \text{общий корень } x = -1.$$

Ответ: при $m = -2$ $x = -1$; при $m = 0$ $x = -3$.

Найти все пары действительных чисел a и b , при которых уравнение $|x - 1| + |x + 3| = ax + b$ имеет бесконечное множество решений.

$$|x - 1| + |x + 3| = \begin{cases} -2x - 2 & \text{при } x < -3 \\ 4 & \text{при } -3 \leq x < 1 \\ 2x + 2 & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

Уравнение имеет бесконечное множество решений, если $ax + b$ тождественно равно $-2x - 2$, т. е. $a = -2$; $b = -2$.

Аналогично $ax + b$ тождественно равно 4, т. е. $a = 0$; $b = 4$.

Аналогично $a = 2$; $b = 2$. *Ответ:* $(-2; -2); (0; 4); (2; 2)$.

При каких значениях m уравнение $x^2 - mx + 1 = 0$ имеет два корня, расстояние между которыми на числовой оси равно 2?

Уравнение имеет два различных корня, если $D > 0$, т. е.

$m^2 - 4 > 0$. Расстояние между корнями на числовой оси равно

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{m - \sqrt{D}}{2} - \frac{m + \sqrt{D}}{2} \right| = \sqrt{D}.$$

Имеем систему: $\begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ \sqrt{m^2 - 4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{2} \\ m = -2\sqrt{2} \end{cases}$

Ответ: $m = -2\sqrt{2}$, $m = 2\sqrt{2}$.

Таблица 16. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Метод подстановки

$$\begin{cases} x + 5y = 6 \\ x^2 + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{6-x}{5} \\ x^2 + 3 \cdot \frac{6-x}{5} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{6-x}{5} \\ 5x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{6-x}{5} \\ x = -\frac{2}{5} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = \frac{32}{25} \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ответ: $(-\frac{2}{5}; \frac{32}{25}), (1; 1)$.

$$\begin{cases} 2x + y = \pi \\ \cos(3x - 2y) = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - 2x \\ \cos(3x - 2\pi + 4x) = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 7x = 0,5 \\ y = \pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{21} + \frac{2\pi k}{7} \\ y = \frac{19\pi}{21} - \frac{4\pi k}{7} \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{21} + \frac{2\pi k}{7}, \frac{19\pi}{21} - \frac{4\pi k}{7}\right);$

$\left(-\frac{\pi}{21} + \frac{2\pi n}{7}, \frac{23\pi}{21} - \frac{4\pi n}{7}\right); \quad n, k \in \mathbb{Z}$.

Таблица 16. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Метод алгебраического сложения

$$\begin{cases} 5x + 2y = 9 & \text{умножим на 3} \\ 7x - 3y = 1 & \text{умножим на 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 6y = 27 & \text{уравнения} \\ 14x - 6y = 2 & \text{сложим} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 29x = 29 \\ 7x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ответ: (1; 2).

$$\begin{cases} \cos x \cos y = 0,75 & \text{сложим уравнения системы} \\ \sin x \sin y = 0,25 & \Leftrightarrow \\ & \text{вычтем уравнения системы} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = 1 \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x - y) = 1 \\ \cos(x + y) = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2\pi k \\ x + y = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2\pi k \\ x + y = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(n + k); \frac{\pi}{6} + \pi(n - k)\right)$;

$\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(n + k); -\frac{\pi}{6} + \pi(n - k)\right), n, k \in \mathbb{Z}$.

Таблица 16. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Дополнительные методы

| Применение теоремы Виета | Симметрические системы |
|--|---|
| $\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 4 \end{cases}$ <p>x, y — корни уравнения: $a^2 - 5a + 4 = 0$. $a = 1; a = 4$.</p> <p>Ответ: (1; 4); (4; 1).</p> | $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3xy = -1 \\ x + y - xy = 1 \end{cases}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $x + y = p$ $xy = q$ </div> $\begin{cases} (p^2 - 2q) - 3q = -1 \\ p - q = 1 \end{cases}$ |

Сведение к объединению более простых систем

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \\ 3x^2 - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x-4y) = 0 \\ 3x^2 - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x^2 - 2y = 8 \end{cases}^{(1)} \\ \begin{cases} x - 4y = 0 \\ 3x^2 - 2y = 8 \end{cases}^{(2)} \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} x = y \\ 3x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2; 2) \\ (-4/3; -4/3) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = 4y \\ 24y^2 - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{1 + \sqrt{385}}{12}; \frac{1 + \sqrt{385}}{48} \right); \left(\frac{1 - \sqrt{385}}{12}; \frac{1 - \sqrt{385}}{48} \right)$$

Использование однородности

$$\begin{cases} 3x^2 - xy + y^2 = 5 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на (-3),
второе — на 5 и сложим.

$$\begin{cases} -9x^2 + 3xy - 3y^2 = -15 \\ 5x^2 + 10y^2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 3xy + 7y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y+x)(7y-4x) = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y + x = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1; -1) \\ (-1; 1) \end{cases} \\ \begin{cases} 7y - 4x = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{7\sqrt{3}}{9}; \frac{4\sqrt{3}}{9} \right) \\ \left(-\frac{7\sqrt{3}}{9}; -\frac{4\sqrt{3}}{9} \right) \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: (1; -1); (-1; 1); $\left(\frac{7\sqrt{3}}{9}; \frac{4\sqrt{3}}{9} \right)$; $\left(-\frac{7\sqrt{3}}{9}; -\frac{4\sqrt{3}}{9} \right)$.

Таблица 17. НЕРАВЕНСТВА

| Строгие неравенства | Нестрогие неравенства |
|--|--------------------------|
| <p>Число $a > b$ (a больше b), если разность $(a - b)$ положительное число.</p> <p>Если $a < b$, то $b > a$. В этом случае разность $(a - b)$ отрицательное число.</p> | $a \leq b$ $c \geq d$ |

Свойства числовых неравенств

| a, b — любые числа | a, b — положительные числа |
|--|---|
| Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности). | Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. |
| Если $a > b$, то $a + c > b + c$ ($c \in R$). | Если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$. |
| Если $a > b$ и c положительное число, то $ac > bc$. | Если $a > b > 0$ и $m \in N$, то $a^m > b^m$. |
| Если $a > b$ и c отрицательное число, то $ac < bc$. | Если $a > b > 0$ и $m \in N$, то $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$. |
| Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$. | |

Двойное неравенство ($a < b \leq c$)

Сложение двойных неравенств

$$a < b \leq c, p < m < q \Rightarrow a + p < b + m < c + q$$

$$\text{Умножение двойных неравенств с положительными членами}$$

$$0 < a < b < c; 0 < p < m < q \Rightarrow ap < bm < cq$$

Методы доказательства неравенств

Составление разности (если разность двух чисел положительна, то уменьшаемое больше вычитаемого).

Метод использования известных неравенств.

Метод усиления (использование транзитивности).

Использование монотонности функции, применение производной.

Пример. Доказать неравенство: $e^x \geq 1 + x$ при $x \geq 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - 1 - x$. $f'(x) = e^x - 1 > 0$ при $x > 0$. Следовательно, $f(x)$ возрастает на $[0; +\infty)$. Но $f(0) = 0$. Значит, $f(x) > 0$ при $x > 0$. При $x = 0$ неравенство обращается в равенство. Итак, $e^x - 1 - x \geq 0$, то есть $e^x \geq 1 + x$ при $x \geq 0$.

Таблица 17. НЕРАВЕНСТВА

Сравнение средних величин положительных чисел

 $(a > b > 0, a_i > 0, n \in N)$

| <i>Среднее арифметическое</i> | двуих чисел $\frac{a+b}{2}$ | <i>n</i> чисел $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ |
|-------------------------------|--|---|
| <i>Среднее геометрическое</i> | двуих чисел \sqrt{ab} | <i>n</i> чисел $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ |
| <i>Среднее гармоническое</i> | двуих чисел $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ | <i>n</i> чисел $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$ |
| <i>Среднее квадратичное</i> | двуих чисел $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ | <i>n</i> чисел $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}}$ |

$$a \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \geq b$$

(верно и для *n* чисел)

Линейные неравенства

(приводимые к виду $ax > b$; $ax \geq b$; $ax < b$; $ax \leq b$)

| | | | |
|---|---|------------------------------|--|
| $3 \cdot x > -6$ $x > -2$ $x \in (-2; +\infty)$ | $-5 \cdot x \geq 1$ $x \leq -\frac{1}{5}$ $x \in (-\infty; -\frac{1}{5}]$ | $0 \cdot x < 2$ $x \in R$ | $0 \cdot x > 8$ $x \in \{\emptyset\}$ |
|---|---|------------------------------|--|

$$(\sqrt{5} - \sqrt{7})x > (\sqrt{5} - \sqrt{7})$$

$x < 1$, так как $\sqrt{5} - \sqrt{7} < 0$

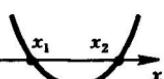
$$x \in (-\infty; 1)$$

Таблица 17. НЕРАВЕНСТВА

Квадратные неравенства

(приводимые к виду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $a > 0$)

Для решения квадратного неравенства вычислим дискриминант $D = b^2 - 4ac$ и определим корни квадратного трехчлена.

| Неравенство | $D < 0$ | $D = 0$ | $D > 0$ |
|---------------------|---|---|---|
| |  |  |  |
| $ax^2 + bx + c > 0$ | $x \in R$ | $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$ | $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ |
| $ax^2 + bx + c < 0$ | решений нет | решений нет | $x \in (x_1; x_2)$ |

Простейшие иррациональные неравенства

| | $\sqrt{x} < a$ | $\sqrt{x} > a$ |
|---|---|--|
| $a < 0$ | решений нет | $x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; +\infty)$ |
| $a = 0$ | решений нет | $x > 0 \Leftrightarrow x \in (0; +\infty)$ |
| $a > 0$ | $0 \leq x < a^2$, $x \in [0; a^2)$ | $x > a^2 \Leftrightarrow x \in (a^2; +\infty)$ |
| | $\sqrt{f(x)} < g(x)$ | $\sqrt{f(x)} > g(x)$ |
| равносильно системе | равносильно объединению систем | равносильно системе |
| $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$ | $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ |

Простейшие показательные неравенства

| | $a^x < m$ | $a^x > m$ | $a^{f(x)} < m$ | $a^{f(x)} > m$ |
|--------------------------------------|--|----------------|-------------------|-------------------|
| $m \leq 0$; $a > 0$, $a \neq 1$ | нет решений | $x \in R$ | нет решений | $x \in D(f)$ |
| $m > 0$; $a > 1$ | $x < \log_a m$ | $x > \log_a m$ | $f(x) < \log_a m$ | $f(x) > \log_a m$ |
| $m > 0$; $0 < a < 1$ | $x > \log_a m$ | $x < \log_a m$ | $f(x) > \log_a m$ | $f(x) < \log_a m$ |
| $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ | при $a > 1$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$ при $0 < a < 1$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$ | | | |

Таблица 17. НЕРАВЕНСТВА

Простейшие логарифмические неравенства

| $m \in R$ | $\log_a x < m$ | $\log_a x > m$ | $\log_a f(x) < m$ | $\log_a f(x) > m$ |
|--|--|--|--|--|
| $a > 1$ | $\begin{cases} x < a^m \\ x > 0 \end{cases}$ | $x > a^m$ | $\begin{cases} f(x) < a^m \\ f(x) > 0 \end{cases}$ | $f(x) > a^m$ |
| $0 < a < 1$ | $x > a^m$ | $\begin{cases} x < a^m \\ x > 0 \end{cases}$ | $f(x) > a^m$ | $\begin{cases} f(x) < a^m \\ f(x) > 0 \end{cases}$ |
| $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ | | $\log_{H(x)} f(x) < \log_{H(x)} g(x)$ | | |
| при $a > 1$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ | при $0 < a < 1$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$ | равносильно объединению систем неравенств: $\begin{cases} H(x) > 1 \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} H(x) > 0 \\ H(x) < 1 \\ f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$ | | |

Примеры простейших тригонометрических неравенств

| | | | |
|---|-----------------|---|-----------------------|
| $\sin x < -1,3$ | $\sin x > -1,3$ | $\sin x < \sqrt{1,3}$ | $\sin x > \sqrt{1,3}$ |
| решений нет, $-1 \leq \sin x \leq 1$ | $x \in R$ | $x \in R$, так как $\sin x \leq 1 < \sqrt{1,3}$ | решений нет |
| $\sin x < -0,5$ | | $\sin x > -0,5$ | |
| | | | |
| $x \in \left(2\pi n - \frac{5\pi}{6}; 2\pi n - \frac{\pi}{6}\right)$ $n \in Z$ | | $x \in \left(2\pi n - \frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right)$ $n \in Z$ | |

Таблица 17. НЕРАВЕНСТВА

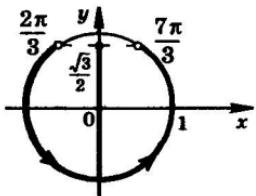
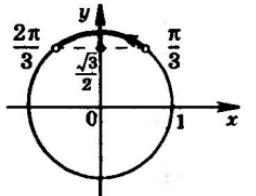
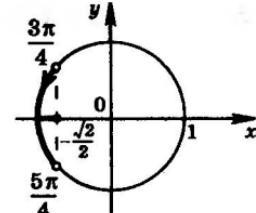
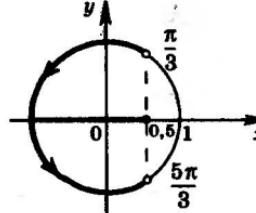
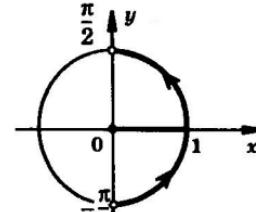
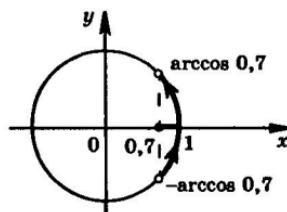
| | |
|--|---|
| $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
|  $x \in \left(2\pi n + \frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} + 2\pi n\right)$ $n \in \mathbb{Z}$ |  $x \in \left(2\pi n + \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$ $n \in \mathbb{Z}$ |
| $\cos x < -0,7$ | $\cos x < \ln 3$ |
| решений нет | $x \in \mathbb{R}$, так как $\cos x \leq 1 < \ln 3$ |
| $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\cos x < 0,5$ |
|  $x \in \left(2\pi n + \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)$ $n \in \mathbb{Z}$ |  $x \in \left(2\pi n + \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$ $n \in \mathbb{Z}$ |
| $\cos x > 0$ | $\cos x > 0,7$ |
|  $x \in \left(2\pi n - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ $n \in \mathbb{Z}$ |  $x \in (2\pi n - \arccos 0,7; \arccos 0,7 + 2\pi n) \quad n \in \mathbb{Z}$ |

Таблица 17. НЕРАВЕНСТВА

| | |
|---|--|
| $\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$ | $\operatorname{tg} x < -2^{-1}$ |
| | $(-2^{-1} = -\frac{1}{2})$ |
| $x \in \left(\pi n - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}$ | $x \in \left(\pi n - \frac{\pi}{2}; \pi n - \arctg \frac{1}{2}\right), n \in \mathbb{Z}$ |
| $\operatorname{tg} x \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\operatorname{ctg} x > 1$ |
| | |
| $x \in \left[\pi n - \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$ | $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$ |

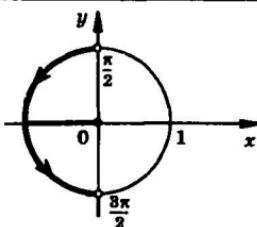
Более сложные примеры
решения тригонометрических неравенств

$$\cos\left(2x - \frac{3\pi}{8}\right) < 0$$

$$t = 2x - \frac{3\pi}{8}$$

$$\cos t < 0$$

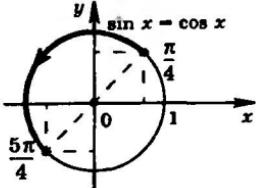
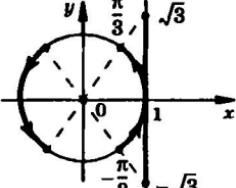
$$t \in \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$$



$$2\pi n + \frac{\pi}{2} < 2x - \frac{3\pi}{8} < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\pi n + \frac{7\pi}{16} < x < \frac{15\pi}{16} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Таблица 17. НЕРАВЕНСТВА

| $\sin x \geq \cos x$ | $\operatorname{tg}^2 x \leq 3$ |
|--|---|
|  $2\pi n + \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ |  $ \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3} \\ \operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3} \end{cases}$ $x \in \left[\pi n - \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} + \pi n \right], \quad n \in \mathbb{Z}$ |

$$6\cos^2 x - \cos x - 1 < 0$$

Пусть $y = \cos x$. Тогда

$$\begin{cases} 6y^2 - y - 1 < 0 \\ |y| \leq 1 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{3} < y < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{3} < \cos x < \frac{1}{2}$$



$$x \in \left(2\pi n - \arccos \left(-\frac{1}{3} \right); 2\pi n - \arccos \frac{1}{2} \right) \cup$$

$$\cup \left(2\pi n + \arccos \frac{1}{2}; 2\pi n + \arccos \left(-\frac{1}{3} \right) \right)$$

или

$$x \in \left(2\pi n - \arccos \left(-\frac{1}{3} \right); 2\pi n - \frac{\pi}{3} \right) \cup$$

$$\cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \arccos \left(-\frac{1}{3} \right) + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

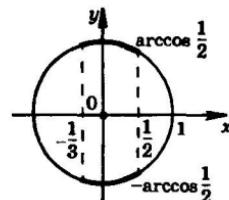


Таблица 17. НЕРАВЕНСТВА

$$\sin x - \sin 2x \leq 0$$

$$\sin x (1 - 2 \cos x) \leq 0$$

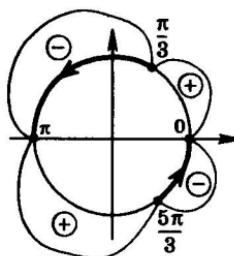
Используем метод интервалов на тригонометрической окружности, считая $x \in [0; 2\pi]$.

$$F(x) = \sin x (1 - 2 \cos x)$$

$$F(x) = 0 \Rightarrow x = 0; \pi; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}.$$

$$x \in \left[2\pi n + \frac{\pi}{3}; \pi + 2\pi n \right] \cup$$

$$\cup \left[2\pi n + \frac{5\pi}{3}; 2\pi + 2\pi n \right], n \in \mathbf{Z}$$



Примеры неравенств

с обратными тригонометрическими функциями

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\arccos x < -5$ решений нет, так как $0 \leq \arccos x \leq \pi$ | $\arccos x > -4$ $x \in [-1; 1]$ | $\arccos x < \frac{\pi}{3}$ $x \in (0,5; 1]$ | $\arccos x > 1$ $x \in [-1; \cos 1)$ |
| $\arcsin x < \pi$ $x \in [-1; 1]$ | $\arcsin x < -1,7$ решений нет, так как $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ | $\arcsin x \leq -\frac{\pi}{6}$ $x \in [-1; -0,5]$ | $\arcsin x > 0$ $x \in (0; 1]$ |
| $\operatorname{arctg} x < 2$ $x \in \mathbf{R},$ так как $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ | $\operatorname{arctg} x > 5$ решений нет | $\operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{7}$ $x \in (-\infty; \operatorname{tg} \frac{\pi}{7}]$ | $\operatorname{arctg} x \leq 0$ $x \in (-\infty; 0]$ |

Таблица 17. НЕРАВЕНСТВА

Метод интервалов (промежутков)

Методом интервалов решают неравенства, приведенные к виду $F(x) > 0$ или $F(x) < 0$, ($F(x) \geq 0$ или $F(x) \leq 0$).

Метод основан на том, что непрерывная на промежутке функция может менять знак только в тех точках, где ее значение равно нулю (но может и не менять).

Алгоритм применения метода

Найдем $D(F(x))$ и промежутки, на которых $F(x)$ непрерывна.

Найдем нули функции $F(x)$ — значения x , при которых $F(x) = 0$.

Нанесем на числовую ось найденные промежутки и нули.

Определим интервалы знакопостоянства и в каждом из них поставим найденный подсчетом или рассуждением знак.

Выпишем ответ.

Примеры

$$x(x - 4)(x + 5)^2 > 0$$

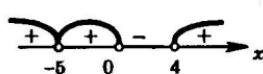
Рассмотрим функцию $F(x) = x(x - 4)(x + 5)^2$.

$D(F) = \mathbb{R}$, функция непрерывна на \mathbb{R} .

$F(x) = 0$ в точках $x = 0; x = 4; x = -5$.

$F(-6) > 0; F(-1) > 0; F(1) < 0; F(5) > 0$.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-5; 0) \cup (4; \infty)$.



$$x(x - 4)(x + 5)^2 \leq 0 \text{ при } x \in \{-5\} \cup [0; 4].$$

$$\frac{x(x + 2)}{x - 5} \leq 0. \text{ Рассмотрим функцию } F(x) = \frac{x(x + 2)}{x - 5}.$$

$D(F) = (-\infty; 5) \cup (5; \infty)$.

$F(x) = 0$ в точках $x = 0; x = -2$.

$F(-3) < 0; F(-1) > 0; F(1) < 0; F(6) > 0$.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [0; 5]$.

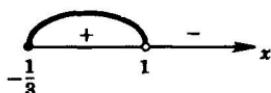


$$\sqrt{3x + 1} > 2x. \text{ Приведем неравенство к виду: } \sqrt{3x + 1} - 2x > 0.$$

$$F(x) = \sqrt{3x + 1} - 2x.$$

$D(F) = [-\frac{1}{3}; +\infty)$. Найдем нули этой функции.

$$\sqrt{3x + 1} - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x + 1 = 4x^2 \end{cases}$$



$$F(x) = 0 \text{ при } x = 1. F(0) > 0; F(5) < 0.$$

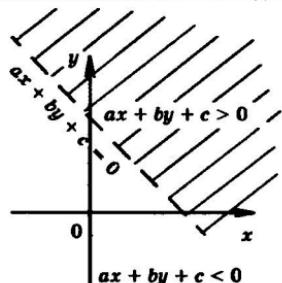
Ответ: $[-\frac{1}{3}; 1]$.

Таблица 18. НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

$ax + by + c > 0$ и $ax + by + c < 0$ — полуплоскости ($a^2 + b^2 \neq 0$)

граница — прямая

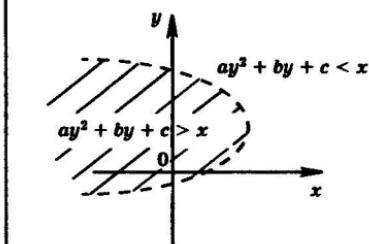
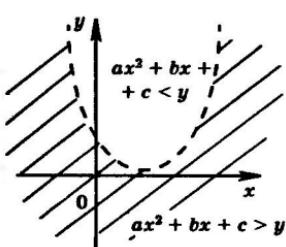
$$ax + by + c = 0$$



$ax^2 + bx + c > y$ и $ax^2 + bx + c < y$ $ay^2 + by + c > x$ и $ay^2 + by + c < x$

граница — парабола

$$ax^2 + bx + c = 0$$



граница — парабола
 $ay^2 + by + c = x$

$(x - x_0)(y - y_0) \geq k$ и $(x - x_0)(y - y_0) < k$ ($k \neq 0$)

граница — гипербола

$$(x - x_0)(y - y_0) = k$$

(две ветви)

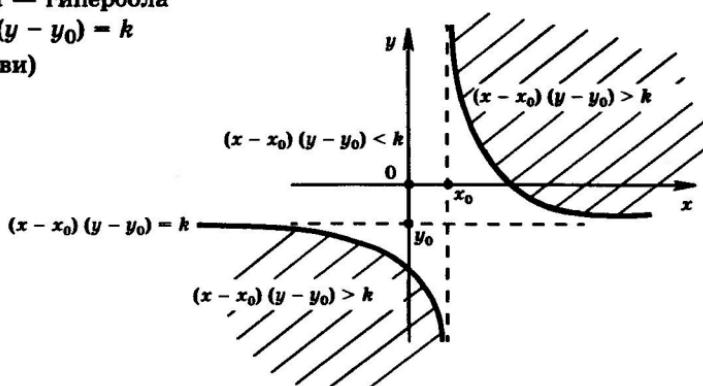
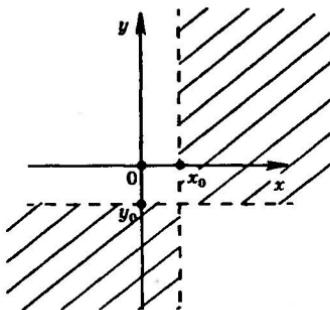


Таблица 18. НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

$$(x - x_0)(y - y_0) > 0 \text{ и } (x - x_0)(y - y_0) < 0 \quad (k = 0)$$

граница — две прямые
 $x = x_0$ и $y = y_0$



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \geq m \text{ и } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < m; \quad (m > 0)$$

граница — окружность
 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = m$
 \sqrt{m} — радиус окружности

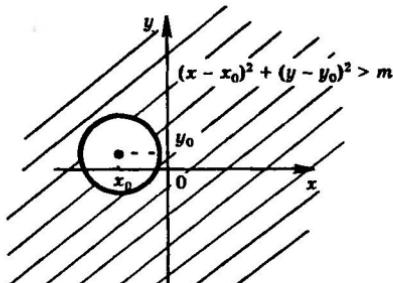


Таблица 19. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Производной функции f в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*.

Необходимое условие дифференцируемости функции

Для того чтобы функция f была дифференцируема (имела производную) в точке x_0 , необходимо (но недостаточно), чтобы она была непрерывна в этой точке (т.е. $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$).

Примеры нахождения производной функции f по определению

| | |
|---|--|
| $f(x) = x^2$ $x_0 = 2$ | $f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$ $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4$ |
| $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $x_0 \neq 0$ | $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}}{\Delta x} =$ $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\left(\sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}\right)\Delta x} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_0^2}}$ |
| $f(x) = \sin x$ $x_0 \in \mathbb{R}$ | $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} =$ $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x_0$ |
| $f(x) = x \cdot x^2$ $x_0 = -2$ | $f'(-2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ -2 + \Delta x \cdot (-2 + \Delta x)^2 - 8}{\Delta x} =$ $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 - \Delta x)(-2 + \Delta x)^2 - 8}{\Delta x} = -12$ |

Таблица 19. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Пример непрерывной, не дифференцируемой в точке x_0 функции

| | |
|---------------------------------------|--|
| $f(x) = x - 2 $ $x_0 = 2$ | $f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ (2 + \Delta x) - 2 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ \Delta x }{\Delta x}$ предел не существует, $f'(2)$ не существует. |
| $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ $x_0 = 1$ | $f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1 + \Delta x) - 1} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} =$ $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = \infty, f'(1)$ не существует. |

| Вторая производная | Производные высших порядков |
|--|--|
| $f''(x) = (f'(x))'$ | $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ |
| $(\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$ | $(\sqrt{x})''' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'' = \left(-\frac{1}{4}x^{-3/2}\right)' =$ $= \frac{3}{8}x^{-5/2} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$ |
| Табличное дифференцирование | Производная сложной функции $(f(u(x)))' = f'(u) \cdot u'(x)$ |
| $(c)' = 0,$ $(x)' = 1,$ $(x^n)' = nx^{n-1},$ $(\cos x)' = -\sin x,$ $(\sin x)' = \cos x,$ $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$ $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$ $(\ln x)' = \frac{1}{x},$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a},$ $(e^x)' = e^x,$ $(a^x)' = a^x \ln a,$ | $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$ $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$ $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$ $(e^u)' = e^u \cdot u'$ $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ |
| | <hr/> $* u = u(x)$ |

Таблица 19. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

| Производная обратной функции | |
|---|--|
| Функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ взаимообратны. | $f(a) = b \Leftrightarrow a = \varphi(b)$ $f'(a) \cdot \varphi'(b) = 1$ |
| $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1; 1)$ | $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ |
| $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1; 1)$ | $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ |
| $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R$ | $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ |
| $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R$ | $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ |
| Основные формулы | Следствия из основных формул |
| $(u+v)' = u' + v'$ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ | $(u-v)' = u' - v'$ $(c \cdot u)' = c \cdot u'$ $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$ |
| Примеры | |
| $(\cos \sqrt{x})' = -\sin \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; | |
| $((2x^2 - x + 1)^{10})' = 10 \cdot (2x^2 - x + 1)^9 \cdot (2x^2 - x + 1)' =$ $= 10 \cdot (2x^2 - x + 1)^9 \cdot (4x - 1)$. | |
| Физический смысл производной | Геометрический смысл производной |
| Пусть $s = s(t)$ — зависимость пути от времени, тогда: $v = v(t) = s'(t)$ Скорость — производная пути по времени. $a = a(t) = v'(t) = s''(t)$ Ускорение — производная скорости по времени (вторая производная пути по времени). | Касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 называется прямая, задаваемая уравнением: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_{\text{кас}} = k_{\text{кас}}$ Значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке. |

Таблица 19. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Касательная к графику функции

Уравнение касательной (не вертикальной) к графику функции $y = f(x)$ в точке графика с абсциссой x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Если функция $f(x)$ не имеет производной в точке x_0 , но непрерывна в этой точке, то у графика функции в этой точке либо вообще нет касательной, либо есть вертикальная касательная.

$y = |x|$ не имеет касательной в точке графика с абсциссой $x = 0$.

$y = \sqrt[3]{x}$ имеет в точке графика с абсциссой $x = 0$ вертикальную касательную $x = 0$.

Примеры решения задач на составление уравнения касательной

Составить уравнение касательной к кривой $y = x^3 - x^2$ в точке графика с абсциссой $x_0 = 1$.

Координаты точки касания $x_0 = 1; y_0 = 1^3 - 1^2 = 0$.

$$y' = 3x^2 - 2x \Rightarrow k_{\text{кас}} = y'(1) = 1.$$

Уравнение касательной: $y = 0 + 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow [y = x - 1]$.

Составить уравнение касательной к кривой $f(x) = (x^2 + 6x + 3)/2$, не пересекающей прямую $y = 2x + 5$.

Так как касательная не пересекает прямую $y = 2x + 5$, значит, она параллельна касательной. Следовательно, $f'(x_0) = 2$. Но $f'(x) = x + 3$.

Отсюда $x_0 + 3 = 2$ и $x_0 = -1$. Ордината точки касания y_0 равна

$$((-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 3)/2 = -1. \text{ Координаты точки касания } (-1; -1).$$

Уравнение касательной $y = -1 + 2(x + 1)$ или $[y = 2x + 1]$.

Составить уравнение касательной к кривой $y = x^3$, проходящей через точку $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$. Пусть $(x_0; y_0)$ — точка касания. Тогда $y_0 = x_0^3$;

$k_{\text{кас}} = 3x_0^2$. Уравнение касательной $y = x_0^3 + 3x_0^2(x - x_0)$. Точка

$\left(\frac{1}{3}; -1\right)$ лежит на касательной. Поэтому $-1 = x_0^3 + 3x_0^2\left(\frac{1}{3} - x_0\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x_0^3 - x_0^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1.$$

Уравнение касательной $y = 1 + 3(x - 1)$ или $[y = 3x - 2]$.

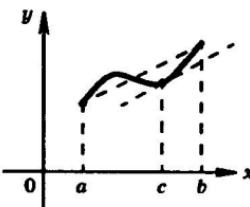
Таблица 19. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Исследование функции при помощи производной

Монотонность функции

Теорема Лагранжа

Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$, то существует $c \in (a; b)$ такое, что $f(a) - f(b) = f'(c) \cdot (a - b)$.



(Заметим, что таких точек c на $(a; b)$ может быть и более одной.)

Для исследования функции $f(x)$ на монотонность можно исследовать ее производную на знакопостоянство.

Если $f'(x) > 0$ на $(a; b)$, то $f(x)$ возрастает на $(a; b)$.

Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то $f(x)$ возрастает на $[a; b]$.

Если $f'(x) < 0$ на $(a; b)$, то $f(x)$ убывает на $(a; b)$.

Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то $f(x)$ убывает на $[a; b]$.

$f(x) = x^2 - 6x + 1$;
 $f'(x) = 2x - 6 > 0$ при $x > 3 \Rightarrow$
 $f(x)$ возрастает на $[3; +\infty)$.

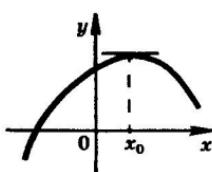
$f(x) = \sqrt{-x}$;
 $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x}} < 0$ при $x < 0 \Rightarrow$
 $f(x)$ убывает на $(-\infty; 0]$.

Если $f(x)$ возрастает и дифференцируема на $[a; b]$, то $f'(x) \geq 0$.

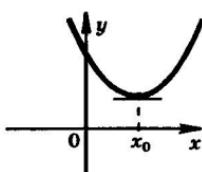
Если $f(x)$ убывает и дифференцируема на $[a; b]$, то $f'(x) \leq 0$.

Критические точки функции

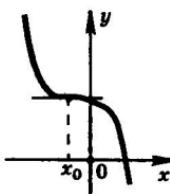
Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками* функции.



$f'(x_0) = 0$;
 x_0 – крит. точка;
 $f(x_0) = f_{\max}$.



$f'(x_0) = 0$;
 x_0 – крит. точка;
 $f(x_0) = f_{\min}$.



$f'(x_0) = 0$;
 x_0 – крит. точка;
 $f(x_0)$ не является
 экстремумом.

Таблица 19. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

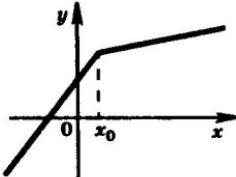
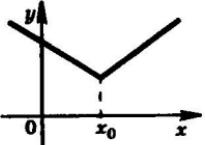
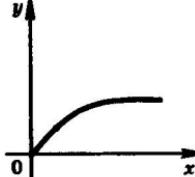
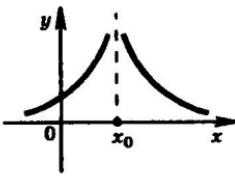
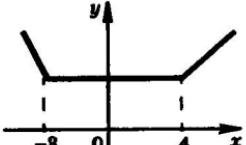
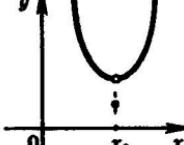
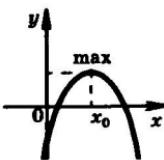
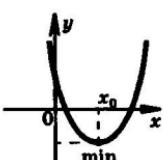
| Критические точки (примеры) | | |
|--|---|---|
|  <p>$f'(x_0)$ не существует; x_0 — крит. точка; $f(x_0)$ не является экстремумом.</p> |  <p>$f'(x_0)$ не существует; x_0 — крит. точка; $f(x_0) = f_{\min}$.</p> |  <p>Нет критических точек; $x_0 = 0$ не является внутренней точкой области определения.</p> |
|  <p>Нет критических точек; x_0 — точка разрыва.</p> |  <p>$f'(x) = 0$ при всех $x \in (-3; 4);$ $f'(-3), f'(4)$ не существуют; все $x \in [-3; 4]$ критические точки.</p> |  <p>$f'(x_0)$ не существует; x_0 — крит. точка; $f(x_0) = f_{\min}$.</p> |
| Экстремумы | | |
| $x_0 \in D(f)$ — точка максимума $f(x)$, если существует $\delta > 0$ такое, что при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $f(x_0) \geq f(x)$ | $x_0 \in D(f)$ — точка минимума $f(x)$, если существует $\delta > 0$ такое, что при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $f(x_0) \leq f(x)$ | |
| <p>Точки максимума и минимума функции называются ее точками экстремума, а значения в них — экстремумами (максимумами или минимумами).</p> | | |
| $f'(x_0) = 0$ при $x < x_0$ $f'(x) > 0$ при $x > x_0$ $f'(x) < 0$ | $f'(x_0) = 0$ при $x < x_0$ $f'(x) < 0$ при $x > x_0$ $f'(x) > 0$ | |
|  |  | |

Таблица 19. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Примеры критических точек различных функций

1) $y = |x|$; $x_0 = 0$; $y'(0)$ не существует; $y(0) = 0$ — минимум.

2) $y = x^2$; $x_0 = 0$; $y'(0) = 0$; $y(0) = 0$ — минимум.

3) $y = x^3$; $x_0 = 0$; $y'(0) = 0$; экстремумов нет.

4) $y = 2x - |x|$; $x_0 = 0$; $y'(0)$ — не существует; экстремумов нет.

Примеры исследования функций на монотонность

$$f(x) = x^3 + x^2 + x - 5;$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0 \text{ при } x \in \mathbb{R};$$

$f(x)$ возрастает на \mathbb{R} .



$$f(x) = x^3 - 3x;$$

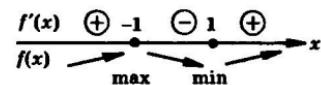
$$f'(x) = 3(x-1)(x+1) = 0 \text{ при } x = -1$$

и $x = 1$;

$f(x)$ возрастает на $(-\infty; -1]$ и

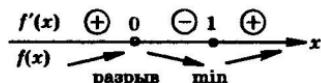
на $[1; +\infty)$;

$f(x)$ убывает на $[-1; 1]$.



$$f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}; f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3};$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } x = 1;$$



$f(x)$ возрастает на $(-\infty; 0)$ и

на $[1; +\infty)$;

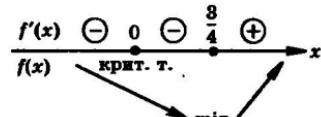
$f(x)$ убывает на $(0; 1)$.

$$f(x) = x^4 - x^3;$$

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - x^2(4x - 3);$$

$f(x)$ возрастает на $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$;

$f(x)$ убывает на $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right]$.



$$f(x) = x + \frac{1}{x}; f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2};$$

$f(x)$ возрастает на $(-\infty; -1]$ и
на $[1; +\infty)$;

$f(x)$ убывает на $[-1; 0)$ и на $(0; 1]$.

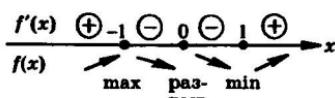


Таблица 20. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

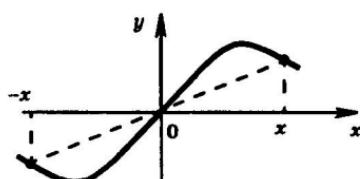
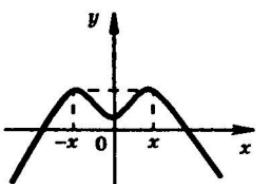
Область определения функции $D(f)$ — множество значений x , при которых функция определена.

| | | |
|--|--|--|
| $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ $D(f) = R$ | $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ $D(f) = \{x \mid x \neq 1\}$ | $f(x) = \sqrt[4]{1 - x}$ $D(f) = \{x \mid x \leq 1\}$ |
| $f(x) = \sqrt{2x - x^2 - 1}$ $D(f) = \{1\}$ | | $f(x) = \lg x + \lg(-x)$ $D(f) = \emptyset$ |

Область значений функции $E(f)$ — множество значений, которые может принимать $f(x)$ при $x \in D(f)$. (Все значения a , при которых уравнение $f(x) = a$ имеет решения.)

| | | |
|--|--|--|
| $f(x) = x^3 - 3x$ $E(f) = R$ | $f(x) = 1 + \frac{1}{x^3}$ $E(f) = \{y \mid y \neq 1\}$ | $f(x) = \sqrt[3]{2x - x^2}$ $E(f) = \{y \mid y \leq 1\}$ |
| $f(x) = 1 + \sqrt{4x - x^2 - 4}$ $E(f) = \{1\}$ | | $f(x) = \sin x + \cos x$ $E(f) = \{y \mid -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}\}$ |

| Четность | Нечетность |
|---|--|
| $f(-x) = f(x), x \in D(f)$ | $f(-x) = -f(x), x \in D(f)$ |
| График четной функции симметричен относительно оси ординат. | График нечетной функции симметричен относительно начала координат. |



| | |
|--|--|
| Примеры четных функций $f(x) = x^4 - 21x^2$ $g(x) = 5^x + 5^{-x}$ $\varphi(x) = \sqrt[3]{1 - x} + \sqrt[3]{1 + x}$ | Примеры нечетных функций $h(x) = x^3 - 20x$ $u(x) = 5^x - 5^{-x}$ $v(x) = \sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}$ |
| $f(x) = \sin x - \cos x$ не обладает четностью или нечетностью. | |

Таблица 20. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Периодичность

$$f(x-t) = f(x+t) - f(x), x \in D(f), t \neq 0$$

Число t называется *периодом функции*, а наименьшее положительное значение t основным *периодом функции* (T).

$$f(x) = \sin 4x \\ T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

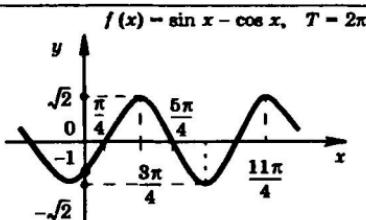
$$f(x) = \cos 2\pi x \\ T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$f(x) = 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{3} \\ T = \frac{\pi}{1/3} = 3\pi$$

$$f(x) = 17 \\ t \in (0; +\infty) \\ \text{основного периода нет}$$

$f(x) = x + \sin x; f(x) = \cos(x^2)$ — непериодические функции.

График периодической функции состоит из повторяющихся фрагментов на отрезке длины T ; на любом таком отрезке периодическая функция принимает все свои значения.



Корень (нуль) функции —

значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

$$f(x) = 4x - \frac{1}{x}$$

$$\text{корни: } x = \pm \frac{1}{2}$$

$$f(x) = x + \sqrt{1-x}$$

$$\text{корни: } x = 0; x = 1$$

$$f(x) = (1+x) \cdot \sqrt{x}$$

$$\text{корень: } x = 0$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$\text{корни: } x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

корней нет

Промежуток знакопостоянства —

промежуток, на котором все значения функции положительны (или отрицательны), а на любом его расширении нет.

Примеры

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 8; \quad f(x) < 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{8}{3}; 1\right);$$

$$f(x) > 0 \text{ при } x \in \left(-\infty; -\frac{8}{3}\right) \cup (1; +\infty).$$

$f(x) = x^{-2}$; два промежутка знакопостоянства $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, на обоих функция положительна.

Таблица 20. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

| Монотонность | |
|--|---|
| <p>Функция $f(x)$ называется <i>возрастающей</i> на промежутке I, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка</p> $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$ <p>Промежуток I называется <i>промежутком возрастания</i> функции $f(x)$, если на этом промежутке функция возрастает, а на любом его расширении нет.</p> | <p>Функция $f(x)$ называется <i>убывающей</i> на промежутке I, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка</p> $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$ <p>Промежуток I называется <i>промежутком убывания</i> функции $f(x)$, если на этом промежутке функция убывает, а на любом его расширении нет.</p> |
| Промежутки возрастания и убывания называются <i>промежутками монотонности</i> функции. | |
| Критерий монотонности функции | |
| <p>$f(x)$ возрастает на промежутке, если $f'(x) > 0$.</p> | <p>$f(x)$ убывает на промежутке, если $f'(x) < 0$.</p> |
| Примеры | |
| $f(x) = 3x^2 + 5x - 8; \quad f'(x) = 6x + 5;$ $f'(x) > 0$ при $x > -\frac{5}{6}$; $f(x)$ возрастает на промежутке $\left[-\frac{5}{6}; +\infty\right)$; $f'(x) < 0$ при $x < -\frac{5}{6}$; $f(x)$ убывает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right]$. | |
| $f(x) = -\frac{1}{x}$; два промежутка монотонности $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$; на обоих функция возрастает. | |
| $f(x) = 3x + 4$ возрастает на R , один промежуток монотонности $(-\infty; +\infty)$. | |
| $f(x) = 3x^2 + 6x - 8; \quad f'(x) = 6(x + 1) = 0$ при $x = -1$; $f'(-2) < 0 \Rightarrow f(x)$ убывает на $(-\infty; -1]$; $f'(0) > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает на $[-1; +\infty)$; $x_0 = -1$ — точка минимума; $f(-1) = -11$ — минимум. | |
| $f(x) = x^3$ — экстремумов нет. | |

Таблица 20. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

**Исследование функции при помощи производной.
Построение графика**

Найдите $D(f)$.

Найдите производную, критические точки, исследуйте знаки производной.

Найдите промежутки монотонности, точки экстремума, определите вид точек экстремума.

Найдите экстремумы функции.

Исследуйте функцию на четность, нечетность, периодичность (периодическую функцию лучше исследовать на промежутке длины T).

«Набросайте» эскиз графика.

Найдите $E(f)$.

Найдите несколько значений функции (по крайней мере по одному в каждом промежутке монотонности).

По возможности

Исследуйте поведение функции на концах области определения и в точках разрывов.

Найдите горизонтальные и вертикальные асимптоты.

Найдите корни и промежутки знакопостоянства функции.

Постройте график функции

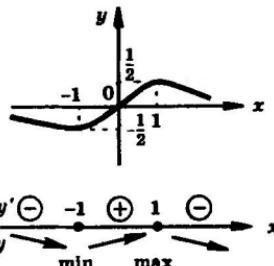
Пример: $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

$D(y) = R$.

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2};$$

y' существует при $x \in R$;

$y' = 0$ при $x = \pm 1$.



$$y_{\min} = y(-1) = -\frac{1}{2}; y_{\max} = y(1) = \frac{1}{2}.$$

Функция нечетная: $y(-x) = -y(x)$.

$$E(y) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right].$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + \frac{1}{x}} = 0.$$

$y = 0$ — горизонтальная асимптота; вертикальных асимптот нет.

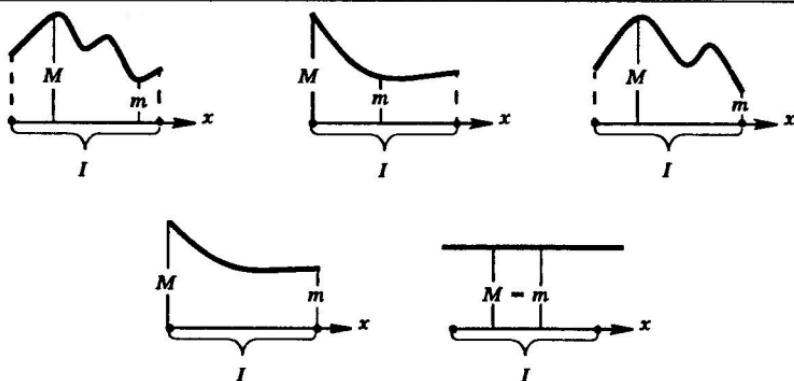
$y = 0$ при $x = 0$ (корень),

$y > 0$ при $x > 0$;

$y < 0$ при $x < 0$.

Таблица 21. НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ НА ПРОМЕЖУТКЕ

Наибольшим (наименьшим) значением функции $f(x)$ на I называется такое число M (m), что существует $x_0 \in I$ такое, что $f(x_0) = M$ ($f(x_0) = m$), $M \geq f(x)$ ($m \leq f(x)$) для всех x из I .



Наибольшее и наименьшее значения непрерывная на I функция может принимать либо на концах промежутка (если это числа), либо в критических точках, лежащих внутри промежутка.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего на $[a; b]$ значений функции, непрерывной на $[a; b]$.

- 1) Найдите $f(a)$ и $f(b)$ — значения функции на концах промежутка.
- 2) Найдите критические точки функции внутри промежутка (т.е. на $(a; b)$).
- 3) Найдите значения функции в критических точках.
- 4) Из всех найденных значений выберите наибольшее и наименьшее; они и будут наибольшим и наименьшим значением функции на $[a; b]$.

Пример

$$f(x) = 8x^2 - x^4, x \in [-1; 3].$$

$$f(-1) = 7; f(3) = -9;$$

$$f'(x) = 16x - 4x^3 = 4x(4 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 2; x = -2 \notin [-1; 3].$$

$$f(0) = 0; f(2) = 16.$$

$$\max \{7; -9; 0; 16\} = 16 \Rightarrow \max_{[-1; 3]} f(x) = 16;$$

$$\min \{7; -9; 0; 16\} = -9 \Rightarrow \min_{[-1; 3]} f(x) = -9.$$

Таблица 21. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ

Пример

Если непрерывная функция имеет на промежутке I единственную точку экстремума и этот экстремум максимум (минимум), то в этой точке достигается наибольшее (наименьшее) значение функции.

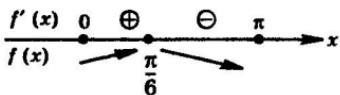
$$f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x, x \in [0; \pi].$$

$$f(0) = \sqrt{3}; f(\pi) = -\sqrt{3}; f'(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x; f'(x) = 0 \text{ при}$$

$$\cos x = \sqrt{3} \sin x \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi k \in [0; \pi] \text{ при } k = 0.$$

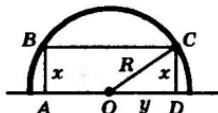
$$\max_{[0; \pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} = 2;$$

$$\min_{[0; \pi]} f(x) = f(\pi) = -\sqrt{3}$$



Задача

В полукруг радиуса R вписать прямоугольник наибольшей площади так, чтобы одна его сторона лежала на диаметре полукруга, а две вершины — на дуге полукруга.



Обозначим стороны прямоугольника $AB = x$, $AD = 2y$.

Тогда его площадь $S = 2xy$. Заметив, что $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, получим

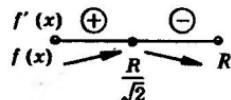
$$S = 2x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} = 2 \cdot \sqrt{R^2 x^2 - x^4}, x \in (0; R).$$

Исследуем на максимум функцию $f(x) = R^2 x^2 - x^4$ при $x \in (0; R)$.

$$f'(x) = 2R^2 x - 4x^3 = 2x(R^2 - 2x^2). \quad f'(x) = 0 \text{ при } x = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

(так как $x \in (0; R)$).

Следовательно, при $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ площадь прямоугольника наибольшая.



Ответ. Прямоугольник имеет наибольшую

$$\text{площадь, если его стороны } x = \frac{R}{\sqrt{2}}, 2y = R\sqrt{2}.$$

Таблица 22. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на промежутке I , если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ одна из первообразных функции $f(x)$ на I , то любая первообразная функции $f(x)$ на этом промежутке имеет вид $F(x) + C$, где $C \in R$.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* и обозначается $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ где } F(x) — \text{ любая первообразная } f(x), \text{ а } C \in R.$$

Свойства первообразных

Первообразная $f'(x)$ равна $f(x) + C$.

Если первообразная $f(x)$ равна $F(x)$, то первообразная $f(t)$ равна $F(t)$.

Если первообразная $f(x)$ равна $F(x)$, то первообразная $kf(x)$ равна $kF(x)$.

Пусть первообразная $f_1(x)$ равна $F_1(x)$, первообразная $f_2(x)$ равна $F_2(x)$, тогда первообразная $f_1(x) + f_2(x)$ равна $F_1(x) + F_2(x)$.

Пусть первообразная $f(x)$ равна $F(x)$, тогда первообразная $f(kx + p)$ равна $\frac{1}{k} F(kx + p)$.

Для того чтобы доказать, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на промежутке I , нужно показать, что для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$ (т.е. воспользоваться определением).

Задачи

Доказать, что функция $F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + x$ является первообразной для функции $f(x) = 1 + \cos 2x$ на R .

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cos 2x \cdot 2 + 1 = 1 + \cos 2x = f(x).$$

Полученное равенство верно для всех действительных значений x .

Найти первообразную функции $f(x) = 3x^2 - 1$, график которой проходит через точку $M(1; -1)$.

Любая первообразная функции $f(x) = 3x^2 - 1$ имеет вид $F(x) = -x^3 - x + C$. График искомой первообразной пройдет через точку $M(1; -1)$, если $F(1) = -1$, т. е. $1^3 - 1 + C = -1 \Rightarrow C = -1$.

Ответ. $F(x) = x^3 - x - 1$.

Таблица 22. ПЕРВООБРАЗНАЯ

Найти первообразную функции $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$.

Преобразуем $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x$.

Первообразная суммы равна сумме первообразных. Следовательно, первообразная $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$, где C — произвольная постоянная.

Найти неопределенный интеграл $\int \sin 3x \cdot \cos x \, dx$.

$$\int \sin 3x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 2x) \, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot \cos 4x + \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \cos 2x \right) = -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

Найти первообразную для функции $f(x) = \frac{1}{4x^2 - 1}$.

Преобразуем $f(x) = \frac{1}{4x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{2x + 1} \right)$.

Следовательно, первообразная

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln|2x - 1| - \frac{1}{2} \ln|2x + 1| \right) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2x - 1}{2x + 1} \right| + C.$$

Таблица первообразных

| $f(x)$ | $F(x)$ | Промежуток I |
|----------------------------------|-------------------------------------|---|
| k | $kx + C$ | R |
| x^α $(\alpha \neq -1)$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ | $\alpha \in N, x \in R;$ $-\alpha \in N, x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty);$ $\alpha \notin Z, x \in (0; +\infty)$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln x + C$ | $(-\infty; 0)$ или $(0; +\infty)$ |
| e^x | $e^x + C$ | R |
| a^x | $\frac{a^x}{\ln a} + C$ | R |
| $\cos x$ | $\sin x + C$ | R |
| $\sin x$ | $-\cos x + C$ | R |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\operatorname{tg} x + C$ | $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in Z$ |
| $\frac{1}{\sin^2 x}$ | $-\operatorname{ctg} x + C$ | $(\pi k; \pi + \pi k), k \in Z$ |

Таблица 23. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I числовой оси, содержащем точки $x = a$ и $x = b$, то разность значений $F(b) - F(a)$ (где $F(x)$ — первообразная $f(x)$ на I) называется **определенным интегралом от функции $f(x)$ от a до b :**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Определенный интеграл есть число.

Основные свойства

| | | |
|----------------------------------|---|--|
| b | b | b |
| $\int_a^b f(x)dx$ | $= \int_a^b f(t)dt$ | $= \int_a^b f(z)dz$ |
| a | a | a |
| a | | |
| b | b | 0 |
| a | | |
| b | a | |
| $\int_a^b f(x)dx$ | $= - \int_b^a f(x)dx$ | |
| a | b | |
| b | c | b |
| $\int_a^b f(x)dx$ | $= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ | , если a, b и c — любые точки про- |
| a | a | c |
| межутка I непрерывности $f(x)$ | | |
| b | b | |
| $\int_a^b kf(x)dx$ | $= k \cdot \int_a^b f(x)dx$ | |
| a | a | |
| b | b | b |
| $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx$ | $= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$ | |
| a | a | a |

Таблица 23. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Дополнительные свойства

$$\int_a^b f(px+q)dx = \frac{1}{p} \int_{pa+q}^{pb+q} f(t)dt$$

Если $f(x)$ четная, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx.$

Если $f(x)$ нечетная, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

Примеры

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^4 (x^{1/2} + x^{-1/2}) dx = \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} \right) \Big|_1^4 = \frac{2}{3}(4^{3/2} - 1) + \\ &+ 2(4^{1/2} - 1) = \frac{2}{3} \cdot 7 + 2 \cdot 1 = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \frac{dx}{(3x+4)^2} &= \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t} \Big|_1^{10} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{8} \right) = \frac{7}{90} \end{aligned}$$

$$3x+4=t$$

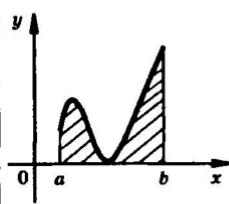
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{25^x + 5^{x+1}}{10^{x-1}} dx &= \int_0^1 \left(\frac{25}{10} \right)^x \cdot 10 dx + \int_0^1 \left(\frac{5}{10} \right)^x \cdot 50 dx = 10 \int_0^1 2,5^x dx + \\ &+ 50 \int_0^1 0,5^x dx = 10 \cdot \frac{2,5^x}{\ln 2,5} \Big|_0^1 + 50 \cdot \frac{0,5^x}{\ln 0,5} \Big|_0^1 = \frac{15}{\ln 2,5} + \frac{25}{\ln 2} \end{aligned}$$

Таблица 23. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

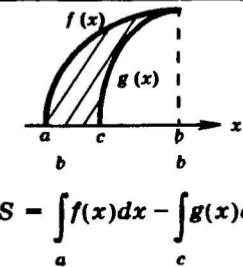
Площадь криволинейной трапеции

Фигура, ограниченная прямыми $y = 0$; $x = a$; $x = b$ и графиком непрерывной и неотрицательной на $[a; b]$ функции $f(x)$, называется *криволинейной трапецией*. Площадь криволинейной трапеции

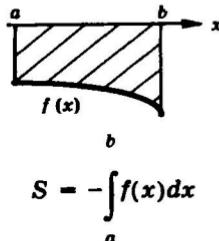
$$S = \int_a^b f(x) dx$$



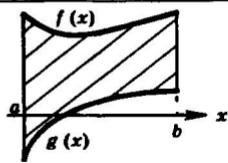
Вычисление площадей



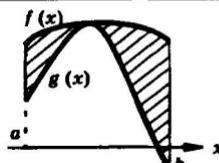
$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_c^b g(x) dx$$



$$S = - \int_a^b f(x) dx$$

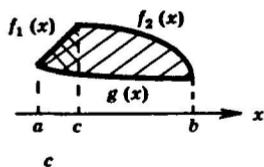


$$f(x) \geq g(x) \text{ на } [a, b]$$



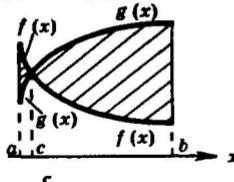
$$b$$

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



$$S = \int_a^b (f_1(x) - g(x)) dx +$$

$$+ \int_c^b (f_2(x) - g(x)) dx$$



$$S = \int_a^c (f(x) - g(x)) dx +$$

$$+ \int_c^b (g(x) - f(x)) dx$$

Таблица 23. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Вычисление объемов тел вращения

| | | |
|---|--|---|
| <p>Криволинейная трапеция (вокруг оси Ox)</p> | | $V_{ox} = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ |
| <p>Конус</p> | | $\begin{aligned} V_k &= \pi \int_0^H \left(\frac{Rx}{H}\right)^2 dx = \\ &= \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big _0^H = \frac{1}{3} \pi R^2 H \end{aligned}$ |
| <p>Шар</p> | | $\begin{aligned} V_{ш} &= \pi \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \\ &= 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \\ &= 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right) \Big _0^R = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$ |

Путь, пройденный материальной точкой за время $t_2 - t_1$ ($t_2 > t_1$) при прямолинейном движении со скоростью $v(t)$, равен:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

Предметный указатель

| | | | |
|--|--------|--|--------|
| Арифметическая прогрессия | 33 | Исследование функции на монотонность | 77, 79 |
| Арифметический корень. | 13 | — — с помощью производной | 77, 83 |
| Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия | 34 | Каноническое разложение натурального числа | 7 |
| Бином Ньютона. | 10 | Касательная | 76 |
| Вершина параболы (координаты). | 19 | Квадратичная функция | 19 |
| Взаимно простые числа | 7 | Квадратные неравенства | 64 |
| Возвратное уравнение. | 48 | — — уравнения | 47 |
| Вторая производная | 74 | Квадратный корень | 13 |
| Выделение полного квадрата. | 30 | — трехчлен | 30 |
| Вычитание многочленов | 10 | Коэффициенты многочлена | 11 |
| Геометрическая прогрессия. | 33 | Корень многочлена | 12 |
| Геометрическая интерпретация модуля | 8 | — нечетной степени | 15 |
| Геометрический смысл производной | 75 | — функции | 81 |
| Гипербола. | 20 | — уравнения | 45 |
| График уравнения с двумя переменными | 28 | Косинус числа | 37 |
| Двойные неравенства | 62 | Котангенс числа | 37 |
| Действительные числа | 5 | Кратное | 5 |
| Действия с квадратными корнями | 13 | Криволинейная трапеция | 90 |
| Действия с корнями. | 15, 16 | Критические точки функций | 77, 78 |
| Деление многочленов | 11 | Линейная функция | 19 |
| Делитель | 5 | Линейные неравенства | 63 |
| Десятичная запись натурального числа | 6 | — — уравнения | 47 |
| Десятичные логарифмы | 42 | Логарифм | 42 |
| Дискриминант | 30, 47 | Логарифмическая функция | 23 |
| Дифференцирование (формулы) . | 75 | Логарифмические неравенства | 65 |
| Дифференцируемость в точке . | 73 | — — уравнения | 51 |
| Доказательство неравенств (методы) | 62 | Логарифмов сравнение | 43 |
| Дробно-линейная функция | 20 | Логарифмы (действия с ними) | 43 |
| Задание последовательностей . | 33 | — (таблица значений) | 42 |
| Замена переменной в уравнении | 46 | Метод интервалов (в неравенствах) | 70 |
| Знаки корней квадратного трехчлена | 30, 31 | Методы построения графиков | 26, 27 |
| — тригонометрических функций | 39 | — — разложения на множители | 11 |
| Значения тригонометрических функций | 38 | — — решения уравнений | 46 |
| Интеграл | 86—91 | — — доказательства неравенств | 62 |
| Иррациональность в знаменателе | 14 | — — решения систем уравнений | 59 |
| Иррациональные числа | 5 | Многочлены от одной переменной | 11 |
| — — неравенства | 64 | Модуль действительного числа | 8 |
| — — уравнения | 49 | Модуль (раскрытие модуля) | 9 |
| | | Монотонность функции | 82 |
| | | Наибольшее и наименьшее значения функции | 84 |
| | | Наибольший общий делитель | 7 |
| | | Наименьшее общее кратное | 7 |

| | |
|---|----------------|
| Натуральные числа | 5 |
| — логарифмы | 42 |
| Нахождение производных | |
| по определению | 73 |
| Неопределенный интеграл | 86 |
| Неполные квадратные уравнения | 47 |
| Неравенства с модулем | 8 |
| — с двумя переменными | 71, 72 |
| — с обратными тригонометрическими функциями | 69 |
| Неравносильные преобразования | 45 |
| Нестрогие неравенства | 62 |
| Нули функции | 81 |
| Обратная пропорциональность | 20 |
| Обратные тригонометрические функции | 25 |
| Однородные уравнения | 46, 48, 51, 55 |
| Определенного интеграла (нахождение) | 89 |
| Определенный интеграл | 88 |
| Основное логарифмическое тождество | 42 |
| Остаток | 6 |
| Ось котангенсов (ось тангенсов) | 37 |
| Первообразная | 86 |
| Перевод периодической дроби в обыкновенную | 34 |
| Периодичность тригонометрических функций | 38 |
| Площадь и интеграл | 90 |
| Показательные неравенства | 64 |
| — уравнения | 50 |
| Показательная функция | 23 |
| Последовательность (числовая) | 33 |
| Построение отрезка длины \sqrt{p} , $p \in N$ | 14 |
| — графика (производная) | 83 |
| — графиков (методы) | 26, 27 |
| Приведенное квадратное уравнение | 47 |
| Приведенный квадратный трехчлен | 32 |
| — многочлен | 11 |
| Признаки делимости на 2, 4, 5, 9, 11, 25 | 6 |
| Приложения определенного интеграла | 90, 91 |
| Производная обратной функции | 75 |
| — сложной функции | 74 |
| — функции | 73 |
| Производные высших порядков | 74 |
| Промежутки знакопостоянства | 81 |
| — монотонности | 82 |
| Простые числа | 7 |
| Прямая пропорциональность | 19 |
| Равносильные преобразования | 45 |
| — уравнения | 45 |
| Радианная мера | 35 |
| Разложение квадратного трехчлена на множители | 31 |
| Расположение графика квадратичной функции | 20 |
| Рациональные числа | 5 |
| Рекуррентное задание последовательности | 33 |
| Свойства делимости | 6 |
| — квадратных корней | 13 |
| — логарифмов | 43 |
| — модуля | 8 |
| — обратных тригонометрических функций | 25 |
| — определенного интеграла | 88 |
| — первообразной | 86 |
| — простых чисел | 7 |
| — степеней | 17 |
| — тригонометрических функций | 24 |
| — числовых неравенств | 62 |
| Симметрические системы уравнений | 61 |
| Синус числа | 37 |
| Системы уравнений | 59—61 |
| Сложение двойных неравенств | 62 |
| — многочленов | 10 |
| Составление квадратного трехчлена по корням | 32 |
| Сравнение квадратных корней | 13 |
| — корней | 15 |
| — средних величин | 63 |
| Среднее геометрическое | 16 |
| — арифметическое | 16 |
| Старший коэффициент многочлена | 11 |
| Степень | 17 |
| Степени многочлена | 11 |
| Степенная функция | 18, 22 |
| Суммирование | 34 |
| Схема Горнера | 12 |
| Таблица первообразных | 87 |
| — производных | 74 |
| Тангенс числа | 37 |

| | |
|---|--------|
| Теорема Безу | 12 |
| — Виета | 31 |
| — Лагранжа | 77 |
| Точки экстремума (минимума, максимума) | 78 |
| Треугольник Паскаля | 10 |
| Тригонометрическая окружность | 35 |
| Тригонометрические неравенства | 65 |
| — соотношения | 37, 40 |
| — — в прямоугольном треугольнике | 38 |
| — уравнения | 53 |
| — функции | 24 |
| Угловой коэффициент касательной | 75 |
| Умножение многочленов | 10 |
| Универсальная подстановка | 40 |
| Уравнения высших степеней | 48 |
| — с модулем | 8 |
| — со степенной функцией | 49 |
| — (методы решений) | 46 |
| — с обратными тригонометрическими функциями | 56 |
| — с параметрами | 56—58 |
| Факториал | 10 |
| Фибоначчи (числа) | 33 |
| Физический смысл производной | 75 |
| Формула общего члена последовательности | 33 |
| Формулы двойного угла | 40 |
| — дифференцирования | 75 |
| — дополнительного угла | 41 |
| — корней квадратного уравнения | 47 |
| — понижения степени | 40 |
| — приведения | 37 |
| — сокращенного умножения | 10 |
| Целые корни многочлена | 12 |
| — числа | 5 |
| Четность тригонометрических функций | 38 |
| Числовые неравенства | 62 |
| Экстремумы | 78 |

ПРИЛОЖЕНИЕ

Простые числа от 2 до 997

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 | 37 | 41 | 43 |
| 47 | 53 | 59 | 61 | 67 | 71 | 73 | 79 | 83 | 89 | 97 | 101 | 103 | 107 |
| 109 | 113 | 127 | 131 | 137 | 139 | 149 | 151 | 157 | 163 | 167 | 173 | 179 | 181 |
| 191 | 193 | 197 | 199 | 211 | 223 | 227 | 229 | 233 | 239 | 241 | 251 | 257 | 263 |
| 269 | 271 | 277 | 281 | 283 | 293 | 307 | 311 | 313 | 317 | 331 | 337 | 347 | 349 |
| 353 | 359 | 367 | 373 | 379 | 383 | 389 | 397 | 401 | 409 | 419 | 421 | 431 | 433 |
| 439 | 443 | 449 | 457 | 461 | 463 | 467 | 479 | 487 | 491 | 499 | 503 | 509 | 521 |
| 523 | 541 | 547 | 557 | 563 | 569 | 571 | 577 | 587 | 593 | 599 | 601 | 607 | 613 |
| 617 | 619 | 631 | 641 | 643 | 647 | 653 | 659 | 661 | 673 | 677 | 683 | 691 | 701 |
| 709 | 719 | 727 | 733 | 739 | 743 | 751 | 757 | 761 | 769 | 773 | 787 | 797 | 809 |
| 811 | 821 | 823 | 827 | 829 | 839 | 853 | 857 | 859 | 863 | 877 | 881 | 883 | 887 |
| 907 | 911 | 919 | 929 | 937 | 941 | 947 | 953 | 967 | 971 | 977 | 983 | 991 | 997 |

Квадраты натуральных чисел от 11 до 99

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 |
| 2 | 441 | 484 | 529 | 576 | 625 | 676 | 729 | 784 | 841 |
| 3 | 961 | 1024 | 1089 | 1156 | 1225 | 1296 | 1369 | 1444 | 1521 |
| 4 | 1681 | 1764 | 1849 | 1936 | 2025 | 2116 | 2209 | 2304 | 2401 |
| 5 | 2601 | 2704 | 2809 | 2916 | 3025 | 3136 | 3249 | 3364 | 3481 |
| 6 | 3721 | 3844 | 3969 | 4096 | 4225 | 4356 | 4489 | 4624 | 4761 |
| 7 | 5041 | 5184 | 5329 | 5476 | 5625 | 5776 | 5929 | 6084 | 6241 |
| 8 | 6561 | 6724 | 6889 | 7056 | 7225 | 7396 | 7569 | 7744 | 7921 |
| 9 | 8281 | 8464 | 8649 | 8836 | 9025 | 9216 | 9409 | 9604 | 9801 |

Факториалы и степени

| n | $n!$ | 2^n | 3^n | 5^n |
|-----|---------|-------|-------|---------|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 |
| 2 | 2 | 4 | 9 | 25 |
| 3 | 6 | 8 | 27 | 125 |
| 4 | 24 | 16 | 81 | 625 |
| 5 | 120 | 32 | 243 | 3125 |
| 6 | 720 | 64 | 729 | 15625 |
| 7 | 5040 | 128 | 2187 | 78125 |
| 8 | 40320 | 256 | 6561 | 390625 |
| 9 | 362880 | 512 | 19683 | 1953125 |
| 10 | 3628800 | 1024 | 59049 | 9765625 |

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| <i>От авторов</i> | 3 |
| <i>Таблица 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА</i> | 5 |
| <i>Таблица 2. МОДУЛЬ</i> | 8 |
| <i>Таблица 3. ДЕЙСТВИЯ С МНОГОЧЛЕНАМИ</i> | 10 |
| <i>Таблица 4. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ</i> | 13 |
| <i>Таблица 5. КОРНИ НАТУРАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ</i> | 15 |
| <i>Таблица 6. СТЕПЕНИ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ. ФУНКЦИЯ $y = \sqrt[n]{x}$</i> | 17 |
| <i>Таблица 7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА</i> | 19 |
| <i>Таблица 8. ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ</i> | 26 |
| <i>Таблица 9. ГРАФИК УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ</i> | 28 |
| <i>Таблица 10. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН</i> | 30 |
| <i>Таблица 11. ПРОГРЕССИИ</i> | 33 |
| <i>Таблица 12. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ</i> | 35 |
| <i>Таблица 13. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ</i> | 37 |
| <i>Таблица 14. ЛОГАРИФМЫ</i> | 42 |
| <i>Таблица 15. УРАВНЕНИЯ</i> | 45 |
| <i>Таблица 16. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ</i> | 59 |
| <i>Таблица 17. НЕРАВЕНСТВА</i> | 62 |
| <i>Таблица 18. НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ</i> | 71 |
| <i>Таблица 19. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ</i> | 73 |
| <i>Таблица 20. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ</i> | 80 |
| <i>Таблица 21. НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ НА ПРОМЕЖУТКЕ</i> | 84 |
| <i>Таблица 22. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ</i> | 86 |
| <i>Таблица 23. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ</i> | 88 |
| <i>Предметный указатель</i> | 92 |
| <i>Приложение</i> | 94 |

А Л Г
Е Б Р
А В И А
Б У М Е
А



ISBN 5-7107-8105-3

A standard linear barcode representing the ISBN number 5-7107-8105-3.

9 785710 781050