

ФИПИ

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ



2015

ЕГЭ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

МАТЕМАТИКА

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВАРИАНТЫ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

И. В. ЯЩЕНКО



ИЗДАТЕЛЬСТВО
НАЦИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

ФИПИ

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

2015

ЕГЭ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

МАТЕМАТИКА

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВАРИАНТЫ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

И. В. ЯЩЕНКО



ИЗДАТЕЛЬСТВО
НАЦИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

Москва
2015

УДК 373.167.1:51

ББК 22.1я721

Е 31

**Издание подготовлено при содействии
Федерального института педагогических измерений (ФИПИ)**

НОУ «Московский центр непрерывного математического образования (МЦНМО)»

Авторы-составители:
И.Р. Высоцкий, И.В. Яценко

В сборнике использованы задачи, предложенные:
И.Р. Высоцким, Р.К. Гординым, П.И. Захаровым, В.С. Панферовым,
М.Я. Пратусевичем, Д.А. Ростовским, А.Р. Рязановским, И.Н. Сергеевым,
В.А. Смирновым, К.М. Столбовым, А.С. Трепалиным, С.А. Шестаковым,
Д.Э. Шнолем, И.В. Яценко

*Для подготовки издания
Федеральным институтом педагогических измерений
авторам предоставлено право использования
ресурсов открытого банка заданий*

Е 31 ЕГЭ. Математика : типовые экзаменационные варианты : 36 вариантов / под ред.
И.В. Яценко. — М. : Издательство «Национальное образование», 2015. — 272 с. —
(ЕГЭ. ФИПИ — школе).

ISBN 978-5-4454-0544-3

Серия «ЕГЭ. ФИПИ — школе» подготовлена разработчиками контрольных измерительных материалов (КИМ) единого государственного экзамена. В сборнике представлены:

- 36 типовых экзаменационных вариантов, составленных в соответствии с проектом демоверсии КИМ ЕГЭ 2015 года;
- инструкция по выполнению экзаменационной работы;
- ответы ко всем заданиям;
- решения и критерии оценивания заданий 15–21.

Выполнение заданий типовых экзаменационных вариантов предоставляет обучающимся возможность самостоятельно подготовиться к государственной итоговой аттестации, а также объективно оценить уровень своей подготовки.

Учителя могут использовать типовые экзаменационные варианты для организации контроля результатов освоения школьниками образовательных программ среднего общего образования и интенсивной подготовки обучающихся к ЕГЭ.

УДК 373.167.1:51

ББК 22.1я721

ISBN 978-5-4454-0544-3

© НОУ «Московский центр непрерывного математического образования (МЦНМО)», 2015

© ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений», 2015

© ООО «Издательство «Национальное образование», 2015

Содержание

Введение.	4
Инструкция по выполнению работы.	6
Вариант 1.	7
Вариант 2.	12
Вариант 3.	17
Вариант 4.	22
Вариант 5.	27
Вариант 6.	32
Вариант 7.	37
Вариант 8.	42
Вариант 9.	47
Вариант 10.	52
Вариант 11.	57
Вариант 12.	63
Вариант 13.	68
Вариант 14.	73
Вариант 15.	78
Вариант 16.	83
Вариант 17.	88
Вариант 18.	93
Вариант 19.	98
Вариант 20.	103
Вариант 21.	108
Вариант 22.	113
Вариант 23.	118
Вариант 24.	123
Вариант 25.	128
Вариант 26.	133
Вариант 27.	138
Вариант 28.	143
Вариант 29.	148
Вариант 30.	153
Вариант 31.	158
Вариант 32.	163
Вариант 33.	168
Вариант 34.	173
Вариант 35.	178
Вариант 36.	183
Ответы.	188
Решения и критерии оценивания заданий 15–21.	219

Введение

Сборник предназначен для подготовки к единому государственному экзамену по математике и содержит 36 полных вариантов, составленных в соответствии с демоверсией КИМ ЕГЭ по математике 2015 года. Варианты подготовлены специалистами федеральной комиссии разработчиков контрольных измерительных материалов ЕГЭ.

В соответствии с документами, регламентирующими ЕГЭ по математике в 2015 году, каждый вариант содержит 21 задание. Первая часть состоит из 9 заданий, вторая — из 12 заданий. Последние семь заданий подразумевают полное развёрнутое решение.

Семь вариантов даны с решениями, позволяющими проверить полноту и точность Ваших рассуждений. Ответы имеются ко всем заданиям.

Если Вы планируете получить школьный аттестат и больше никогда не иметь дела с математикой, эта книга для Вас.

Если Вы собираетесь поступить в вуз на техническую или социологическую специальность и Вам нужен высокий балл на ЕГЭ по математике, эта книга тоже для Вас.

Если Вы планируете продолжать своё математическое образование и претендуете на 90–100 баллов на ЕГЭ по математике, то Вам эта книга также будет полезна.

В предлагаемых вариантах задания весьма серьёзно различаются по сложности и назначению. В нынешних условиях, когда экзамен по математике обязателен для всех выпускников, это единственная возможность удовлетворить потребности всех участников.

Как пользоваться сборником

Если Ваша цель — преодолеть минимальный порог, для того чтобы получить аттестат, Вам нужно сосредоточиться на заданиях 1–9, которые образуют первую часть каждого варианта и рассчитаны на проверку первичных математических умений, необходимых в повседневной жизни. Такие задачи нередко приходится решать в магазинах, на вокзалах, в банках, при вызове такси и во время ремонта в квартире.

Обратите также внимание на задание 11, которое, несмотря на кажущуюся сложность, требует только умения подставить данные числа в данную формулу и провести вычисления.

Если Вы уверенно решаете в каждом варианте 6–7 заданий, то это означает, что Вы обладаете минимальной математической культурой и достигнете своей цели на ЕГЭ.

Если Ваша цель — подтвердить свою школьную оценку и самооценку и получить хороший балл по математике для поступления в вуз, тогда Ваш экзамен состоит из заданий 1–17. Все эти задания являются стандартными с точки зрения школьной программы. Помимо заданий практико-ориентированного блока здесь предлагаются задачи на понимание основных фактов и идей школьного курса математики, а также задачи, где нужно решить уравнения, найти элементы пространственной фигуры, исследовать функцию и т.п. Вы достигнете своей цели тренировкой, тренировкой и тренировкой. Обратите также внимание на задания 18 и 19. Они, конечно, посложнее предыдущих. Здесь уже нужно подумать, пофантазировать.

Если Ваша цель — поступить на математическую специальность и Вам нужен очень высокий балл на ЕГЭ, тогда Вы должны уверенно решать задания 1–17 (как ни странно, наиболее подготовленные учащиеся часто ошибаются в простых заданиях по небрежности). Вам нужно уметь выполнять (может быть, с некоторыми недочётами) задания 18 и 19. Основной объект Вашего внимания — задание 20, требующее умения комбинировать геометрические и алгебраические идеи, видеть за уравнением фигуру, за рисунком — ре-

шение уравнений и их систем; умения вообразить взаимное расположение двигающихся по плоскости линий и фигур.

Задание 21 требует высокой математической культуры, но не очень много специальных знаний. Все необходимые сведения о целых числах и делимости изучаются в 5–7 классах. Вопрос не в знаниях, а в том, как их применить. Здесь важно сочетание опыта, фантазии и подготовки. Помощь окажут сборники олимпиадных заданий, популярные математические статьи и журналы. Небесполезным, надеемся, будет и наш сборник.

Как пользоваться готовыми решениями вариантов

Обратите внимание на то, что некоторые варианты похожи друг на друга. Будем говорить, что такие варианты собраны по одному плану. Если для какого-то варианта приведены решения задач, то варианты, собранные по тому же плану, имеют аналогичные решения. Можно предложить два способа использования готовых решений при подготовке.

Вы не можете решить задачу: в этом случае посмотрите решение и тщательно разберитесь в нём. Недостаточно просто прочесть решение и понять, что там написано. Решения не очень подробные. Нужно проделать самостоятельно пропущенные выкладки, понять не только ход решения, но и снять возникающие вопросы «почему так». Когда Вы разберётесь в решении, попробуйте повторить его самостоятельно, осмысленно и осознанно воспроизводя все логические шаги и вычисления. Ваш вариант решения будет гораздо больше по объёму, поскольку он будет подробнее. Затем возьмите вариант того же плана, но без решения и решите в этом варианте аналогичное задание, ещё раз воспроизводя все логические построения и вычисления. Наконец, попробуйте изменить решение, может быть, улучшить его. Попробуйте решить похожую задачу с изменённым условием.

Вы решили задание самостоятельно, и ответы совпали. Это не означает, что Ваше решение не содержит упущений или логических ошибок. Сравните своё решение с решением, предложенным авторами. Попробуйте определить, какое решение Вам нравится больше, разобраться, в чём решения различаются, а в чём схожи. Проверьте, рассмотрели ли Вы все нужные случаи, убедительно ли сумели объяснить все свои построения и преобразования.

ВАРИАНТ 1

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

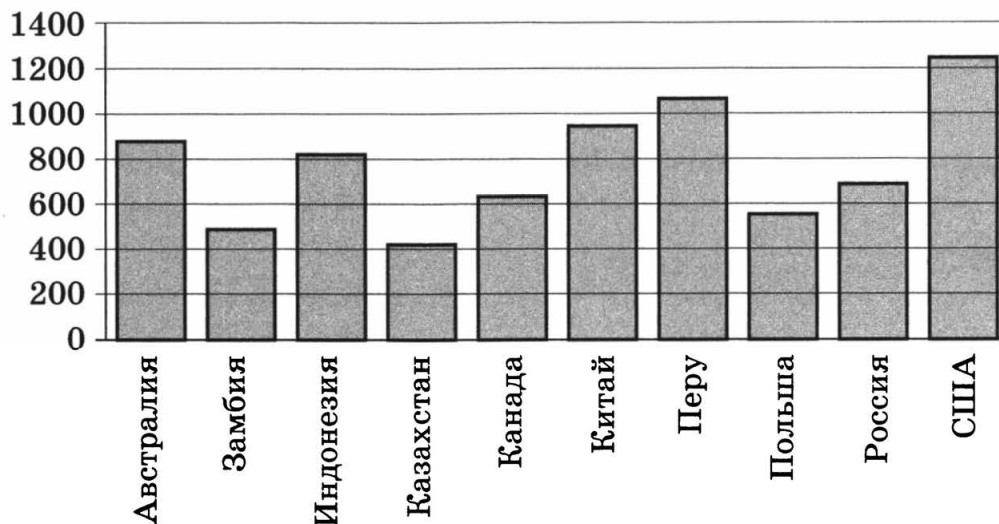
1

В доме, в котором живёт Федя, один подъезд. На каждом этаже по одиннадцать квартир. Федя живёт в квартире 62. На каком этаже живёт Федя?

Ответ: _____.

2

На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимала Польша?



Ответ: _____.

3

В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10% от уплаченной суммы. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести пиджак ценой 9450 руб., футболку ценой 800 руб. и галстук ценой 900 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего:

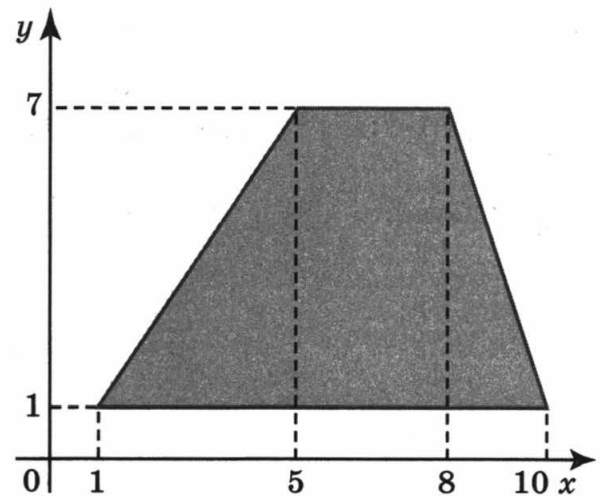
- 1) Б. купит все три товара сразу.
- 2) Б. купит сначала пиджак и футболку, а потом галстук со скидкой.
- 3) Б. купит сначала пиджак и галстук, а потом футболку со скидкой.

В ответе запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

Ответ: _____.

4

Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1; 1), (10; 1), (8; 7), (5; 7).



Ответ: _____.

5

На экзамене 60 билетов, Андрей не выучил 3 из них. Найдите вероятность того, что ему попадётся выученный билет.

Ответ: _____.

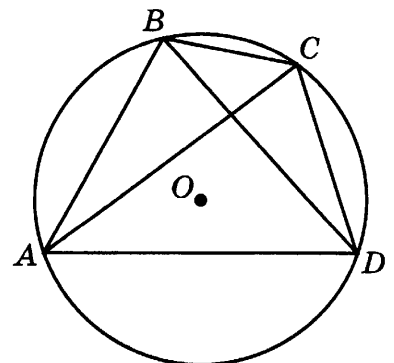
6

Найдите корень уравнения $\log_5(6+x) = 2$.

Ответ: _____.

7

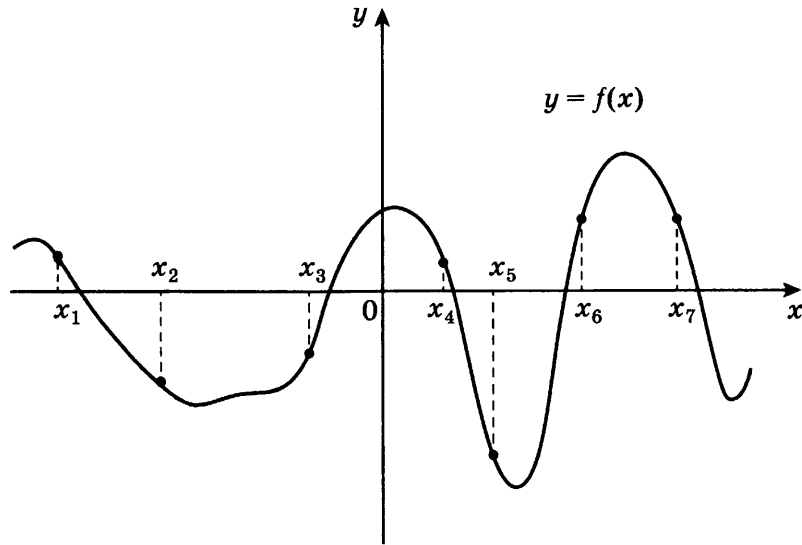
Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 100° , угол CAD равен 64° . Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

8

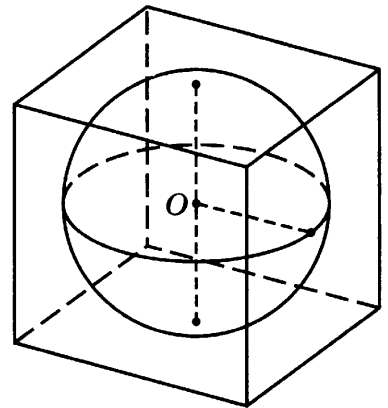
На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ и x_7 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответе запишите количество найденных точек.



Ответ: _____.

9

Шар, объём которого равен 15π , вписан в куб. Найдите объём куба.



Ответ: _____.

Часть 2

10

Найдите значение выражения $\left(-\frac{1}{7} + 1\frac{2}{3}\right) \cdot 131,25$.

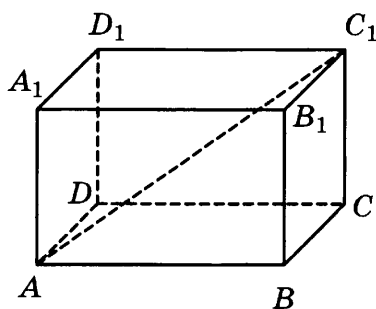
Ответ: _____.

11

Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1 + 11t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 3 м?

Ответ: _____.

- 12 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $BB_1 = 16$, $A_1 B_1 = 2$, $A_1 D_1 = 8$. Найдите длину диагонали AC_1 .



Ответ: _____.

- 13 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 483 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 22 км/ч, стоянка длится 2 ч, а в пункт отправления теплоход возвращается через 46 ч после отплытия из него. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 14 Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 12x^2 + 13$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $3\sin 2x - 4\cos x + 3\sin x - 2 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

16

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ — квадрат со стороной 6, а боковое ребро равно 9. На ребре SA отмечена точка M так, что $SM = 6$.

- Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки B , C , и M .
- Найдите расстояние от вершины S до плоскости BCM .

17

Решите неравенство $\log_3(9^x + 16^x - 9 \cdot 4^x + 8) \geq 2x$.

18

В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$. Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M , N , P .

- Докажите, что треугольник MNP прямоугольный.
- Найдите площадь треугольника MNP , если известно, что $BC = 12$.

19

Максим хочет взять в кредит 1,5 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Максим взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 тысяч рублей?

20

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $f(x) = |2a + 5|x$ имеет 6 решений, где f — чётная периодическая функция с периодом $T = 2$, определённая на всей числовой прямой, причём $f(x) = ax^2$, если $0 \leq x \leq 1$.

21

Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны члены возрастающей последовательности натуральных чисел a_n . В результате получилось рациональное число, которое выражается несократимой дробью, знаменатель которой меньше 100. Найдите наименьшее возможное значение a_3 .

ВАРИАНТ 2

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

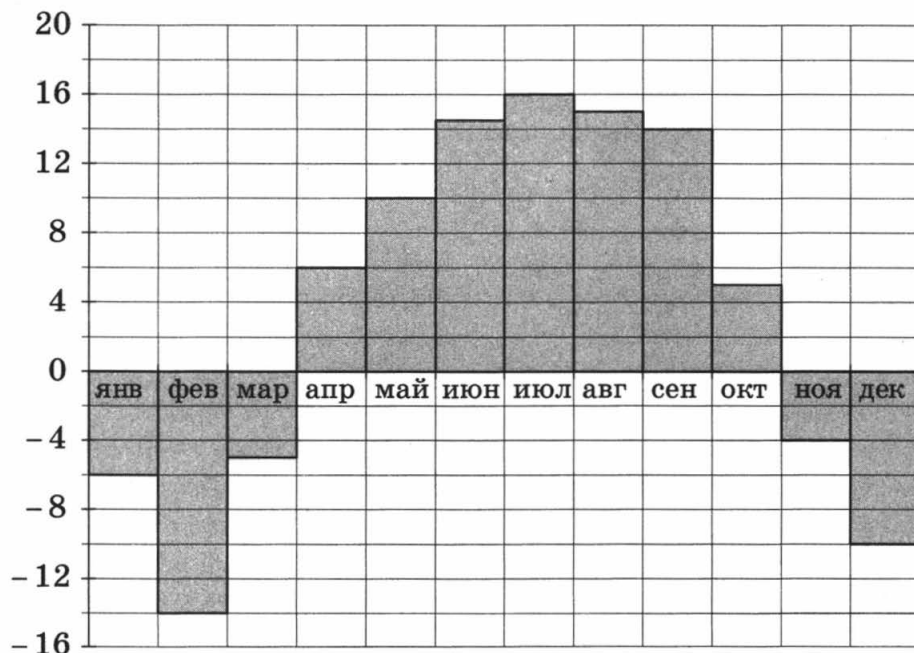
1

При оплате услуг через платёжный терминал взимается комиссия 7%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Аня хочет положить на счёт своего мобильного телефона не меньше 800 рублей. Какую минимальную сумму она должна положить в приёмное устройство данного терминала?

Ответ: _____.

2

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, в каком месяце средняя температура впервые превысила 10 °С. В ответ напишите номер месяца.



Ответ: _____.

3

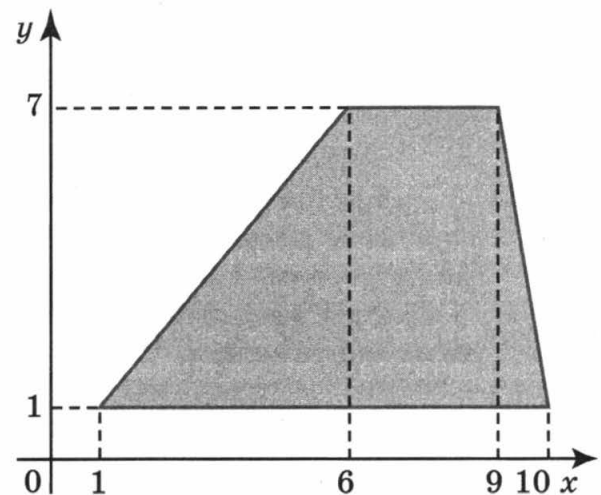
Строительной фирме нужно приобрести 79 кубометров пенобетона у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой (в рублях)?

Поставщик	Стоимость пенобетона (руб. за 1 м ³)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	2650	4400	Нет
Б	3200	5400	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатно
В	2680	3400	При заказе более 80 м ³ доставка бесплатно

Ответ: _____.

4

Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1; 1), (10; 1), (9; 7), (6; 7).



Ответ: _____.

5

Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,7, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежит 10 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватается первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Ответ: _____.

6

Найдите корень уравнения $\log_3(4 + x) = 3$.

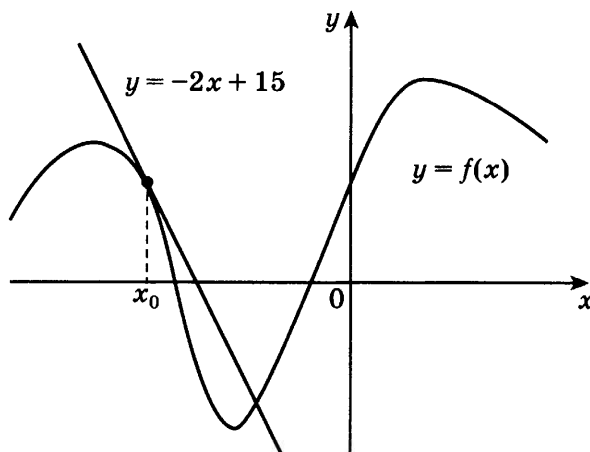
Ответ: _____.

7

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = 0,31$. Найдите $\sin B$.

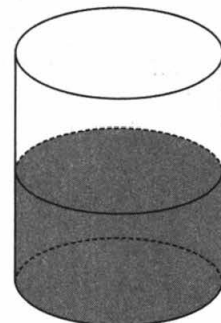
Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $y = -\frac{1}{4}f(x) + 5$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 9 В цилиндрический сосуд налили 1700 см^3 воды. Уровень воды при этом достиг высоты 10 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 5 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в кубических сантиметрах.



Ответ: _____.

Часть 2

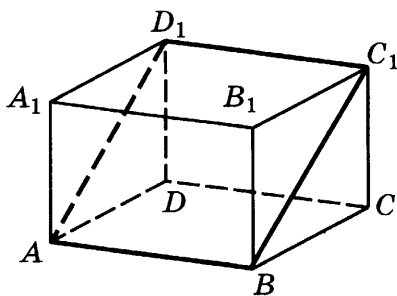
- 10 Найдите значение выражения $\left(4\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \cdot 0,24$.

Ответ: _____.

- 11 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,8 + 10t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 6 м?

Ответ: _____.

- 12 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 12$, $AD = 8$, $AA_1 = 15$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , B и C_1 .



Ответ: _____.

- 13 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 513 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 23 км/ч, стоянка длится 8 ч, а в пункт отправления теплоход возвращается через 54 ч после отплытия из него. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 14 Найдите наименьшее значение функции $y = (x-18)e^{x-17}$ на отрезке $[16; 18]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $2\sin 2x + \cos x + 4\sin x + 1 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

- 16 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки B , A_1 и D_1 .
 б) Найдите расстояние от точки B до прямой $A_1 D_1$.

17

Решите неравенство $\frac{x^2 + 4x - 8}{2x^2 + x - 6} \geq 1$.

18

Прямая, параллельная основаниям BC и AD трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB и CD в точках M и N . Диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Прямая MN пересекает стороны OA и OD треугольника AOD в точках K и L соответственно.

а) Докажите, что $MK = NL$.

б) Найдите MN , если известно, что $BC = 10$, $AD = 18$ и $MK : KL = 1 : 2$.

19

Пётр хочет взять в кредит 1,3 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Пётр взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 340 тысяч рублей?

20

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество значений функции $y = \frac{\sqrt{a} - 2\cos x + 1}{\sin^2 x + a + 2\sqrt{a} + 1}$ содержит отрезок $[2; 3]$.

21

а) Приведите пример числа-палиндрома, который делится на 55.

б) Сколько существует пятизначных чисел-палиндромов, делящихся на 55?

в) Найдите 13-е по величине число-палиндром, которое делится на 55.

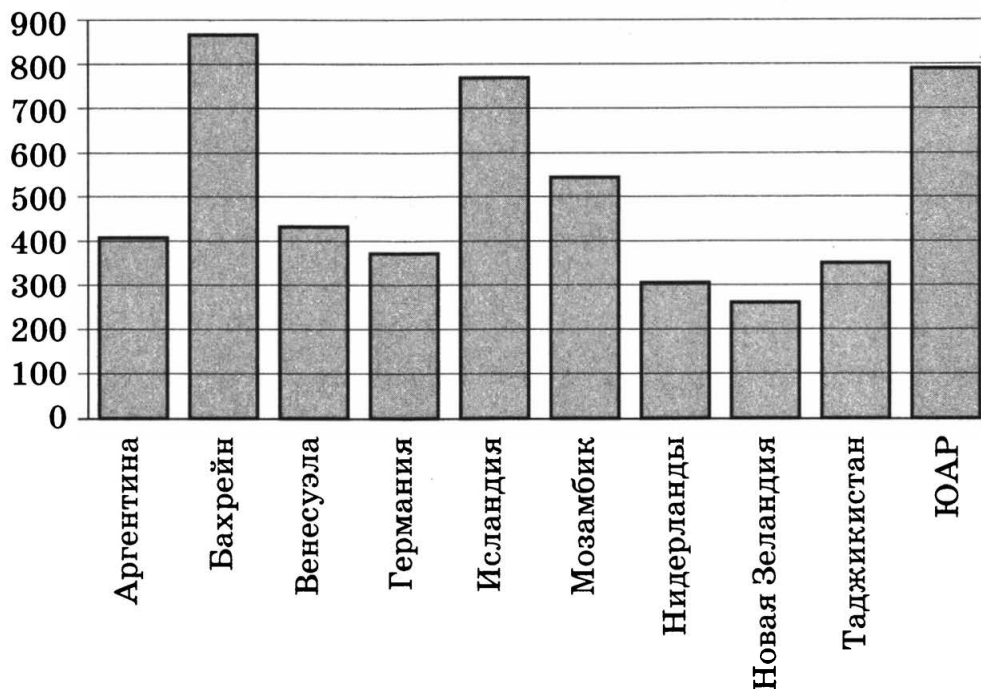
Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Железнодорожный билет для взрослого стоит 760 руб. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 19 школьников и 3 взрослых. Сколько стоят билеты на всю группу (в рублях)?

Ответ: _____.

- 2 На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке алюминия занимал Бахрейн, десятое место — Новая Зеландия. Какое место занимала Исландия?



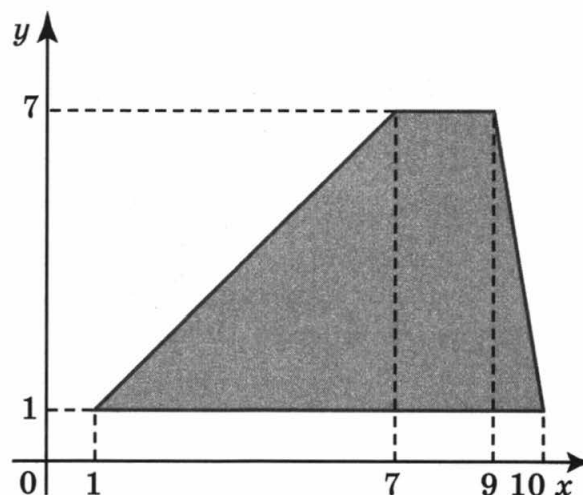
Ответ: _____.

- 3 Строительной фирме нужно приобрести 73 кубометра пенобетона у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой (в рублях)?

Поставщик	Стоимость пенобетона (руб. за 1 м ³)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	2650	4400	Нет
Б	2800	5400	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатно
В	2680	3400	При заказе более 75 м ³ доставка бесплатно

Ответ: _____.

- 4 Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1; 1), (10; 1), (9; 7), (7; 7).



Ответ: _____.

- 5 На экзамене 45 билетов, Федя не выучил 9 из них. Найдите вероятность того, что ему попадётся выученный билет.

Ответ: _____.

- 6 Найдите корень уравнения $\log_6(4 + x) = 2$.

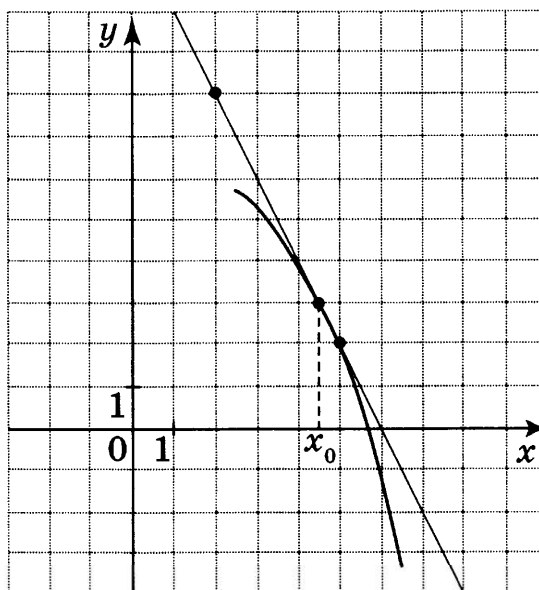
Ответ: _____.

- 7 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = 0,55$. Найдите $\sin B$.

Ответ: _____.

8

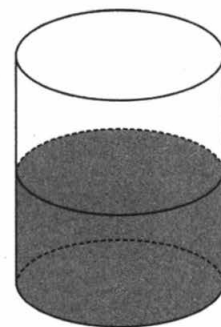
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

9

В цилиндрический сосуд налили 2900 см^3 воды. Уровень воды при этом достиг высоты 20 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 15 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в кубических сантиметрах.



Ответ: _____.

Часть 2

10

Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{3,5} \cdot \sqrt{1,5}}{\sqrt{0,21}}$.

Ответ: _____.

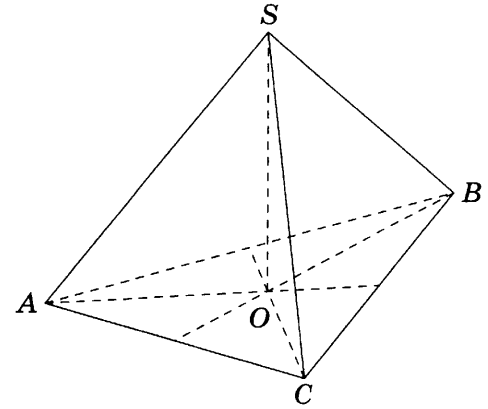
11

Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,8 + 13t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 9 м?

Ответ: _____.

12

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O . Площадь треугольника ABC равна 2; объём пирамиды равен 5. Найдите длину отрезка OS .



Ответ: _____.

13

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 240 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 16 км/ч, стоянка длится 8 ч, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 ч после отплытия из него. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

14

Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 6x^2 + 11$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

- а) Решите уравнение $3\sin 2x - 3\cos x + 2\sin x - 1 = 0$.
 б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

16

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1.

- а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A , C_1 и D .
 б) Найдите расстояние от точки A до прямой $C_1 D$.

17

Решите неравенство $\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) \leq 2$.

18

Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120^\circ$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если известно, что $BE = 21$ и $CE = 24$.

19

1 января 2015 года Андрей Владимирович взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 3 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 3%), затем Андрей Владимирович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Андрей Владимирович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 220 тыс. рублей?

20

Найдите все значения параметра a , не меньшие 1, при каждом из которых уравнение $f(x) = |9^a - 3|\sqrt{x}$ имеет 6 решений, где f — нечётная периодическая функция с периодом $T = 4$, определённая на всей числовой прямой, причём $f(x) = 18a^2(|x - 1| - 1)^2$, если $0 \leq x \leq 2$.

21

Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны члены арифметической прогрессии $a_n = dn + 2$ (d — целое). Из полученной записи удалены минусы, если они есть. В результате получается рациональное число. Найдите это число.

ВАРИАНТ 4

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

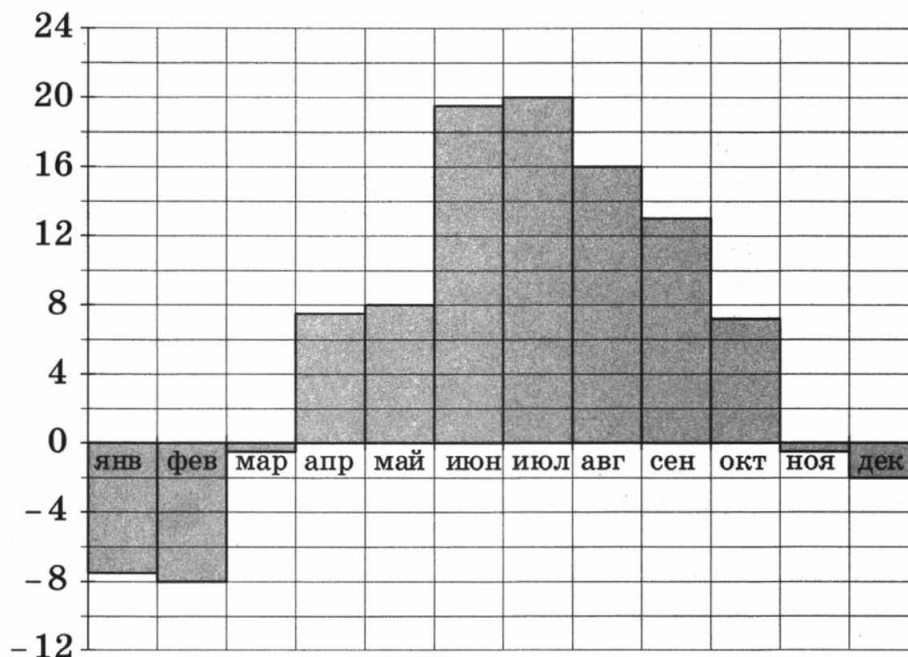
1

Рост Джимми 4 фута 7 дюймов. Выразите рост Джимми в сантиметрах, если в 1 футе 12 дюймов, а в 1 дюйме 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

Ответ: _____.

2

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, в каком месяце второго полугодия средняя температура впервые стала ниже 10 °С. В ответ напишите номер месяца.



Ответ: _____.

3

Керамическая плитка одной и той же торговой марки выпускается трёх разных размеров. Плитки упакованы в пачки. Требуется купить плитку, чтобы облицевать пол квадратной комнаты со стороной 3 м 60 см. Размеры плитки, количество плиток в пачке и стоимость пачки приведены в таблице.

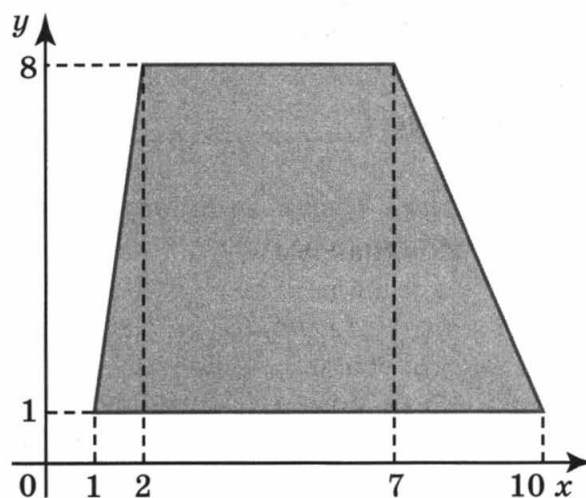
Размер плитки	Количество плиток в пачке	Цена пачки (руб. за пачку)
30 см × 40 см	11	693
30 см × 30 см	14	667,8
20 см × 40 см	16	704

Во сколько рублей обойдётся самый дешёвый вариант покупки?

Ответ: _____.

4

Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1; 1), (10; 1), (7; 8), (2; 8).



Ответ: _____.

5

Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежат 10 револьверов, из них только 3 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватается первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Ответ: _____.

6

Найдите корень уравнения $2^{2-3x} = 32$.

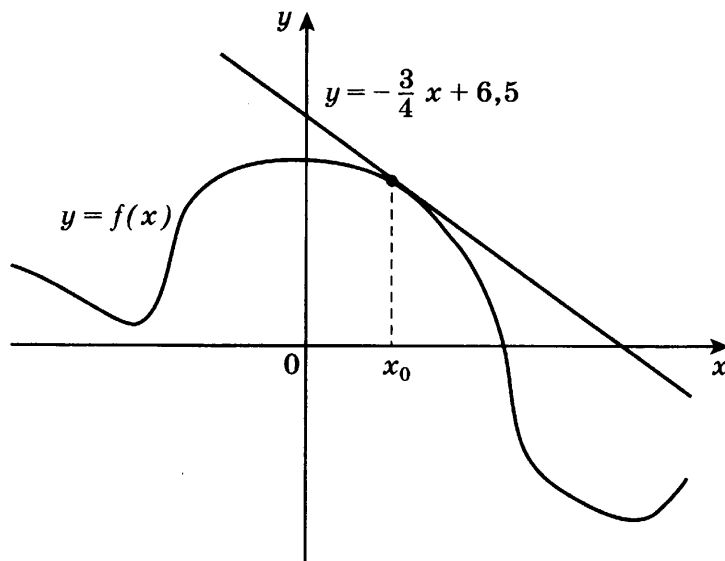
Ответ: _____.

7

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = 0,41$. Найдите $\sin B$.

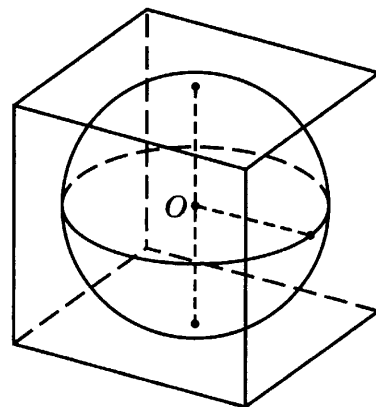
Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $y = 4f(x) - 3$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 9 Шар, объём которого равен 36π , вписан в куб. Найдите объём куба.



Ответ: _____.

Часть 2

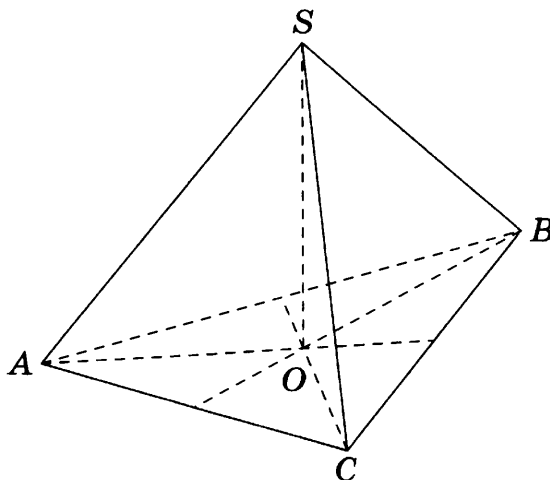
- 10 Найдите значение выражения $\left(-1\frac{3}{4} - 8\frac{1}{2}\right) \cdot 0,64$.

Ответ: _____.

- 11 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 2 + 13t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 10 м?

Ответ: _____.

- 12 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O . Площадь треугольника ABC равна 2; объём пирамиды равен 4. Найдите длину отрезка OS .



Ответ: _____.

- 13 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 375 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 20 км/ч, стоянка длится 10 ч, а в пункт отправления теплоход возвращается через 50 ч после отплытия из него. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 14 Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 22)e^{x-21}$ на отрезке $[20; 22]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $2\sin 2x - 4\cos x + 3\sin x - 3 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

16

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1.

- Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки F_1 , A и C .
- Найдите расстояние от точки F_1 до прямой AC .

17

Решите неравенство $5^{x+1} + 3 \cdot 5^{-x} \leq 16$.

18

Внеписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

- Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на основание.
- Известно, что радиус этой окружности в 4 раза больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

19

31 декабря 2014 года Фёдор взял в банке 6 951 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Фёдор переводит в банк платёж. Весь долг Фёдор выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

20

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $f(x) = |a + 2|\sqrt[3]{x}$ имеет 4 решения, где f — чётная периодическая функция с периодом $T = \frac{16}{3}$, определённая на всей числовой прямой, причём $f(x) = ax^2$, если

$$0 \leq x \leq \frac{8}{3}.$$

21

- Приведите пример трёхзначного числа, у которого ровно 5 натуральных делителей.
- Существует ли такое трёхзначное число, у которого ровно 15 натуральных делителей?
- Сколько существует таких трёхзначных чисел, у которых ровно 20 натуральных делителей?

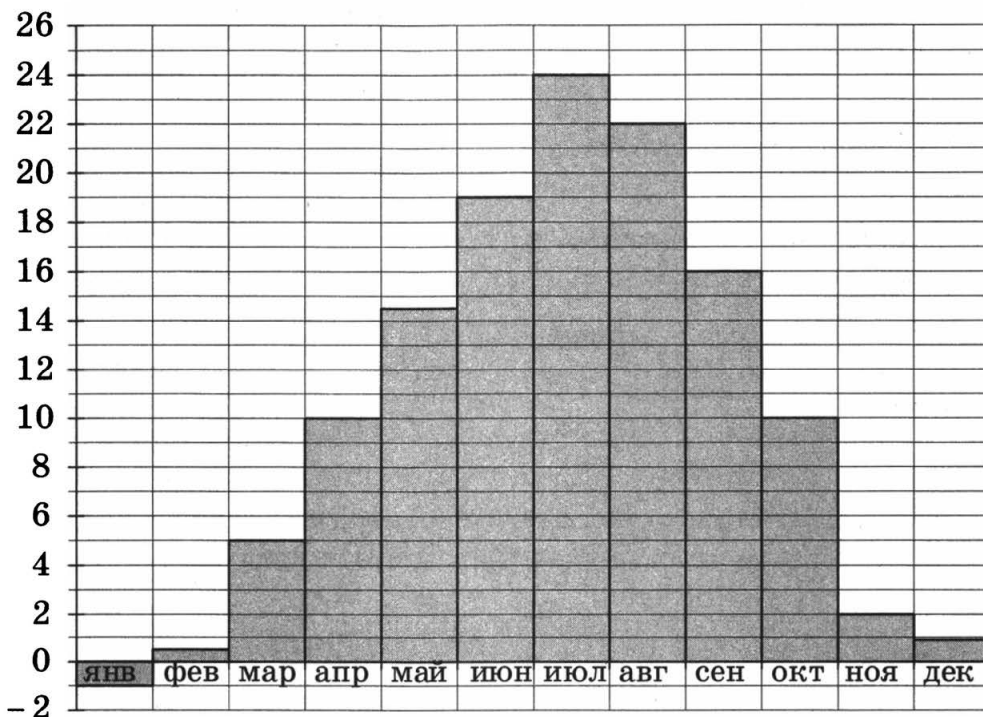
Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Шоколадка стоит 20 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за три шоколадки, покупатель получает четыре (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 120 рублей в воскресенье?

Ответ: _____.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, в каком месяце средняя температура впервые превысила 12 °С. В ответе напишите номер месяца.



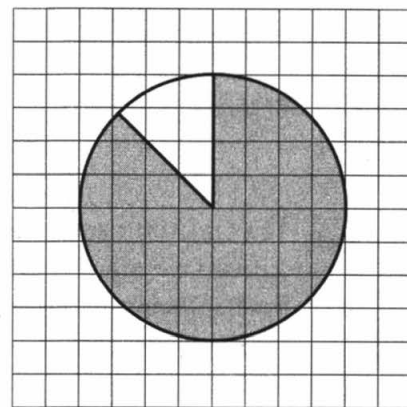
Ответ: _____.

- 3 Строительной фирме нужно приобрести 72 кубометра пенобетона у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой (в рублях)?

Поставщик	Стоимость пенобетона (руб. за 1 м ³)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	2950	5000	Нет
Б	3000	6000	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатно
В	2980	4000	При заказе более 75 м ³ доставка бесплатно

Ответ: _____.

- 4 На клетчатой бумаге изображён круг. Какова площадь круга, если площадь заштрихованного сектора равна 70?



Ответ: _____.

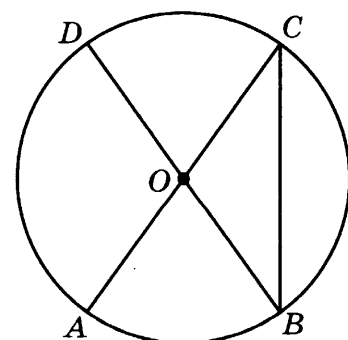
- 5 На экзамене 40 билетов, Игорь не выучил 2 из них. Найдите вероятность того, что ему попадётся выученный билет.

Ответ: _____.

- 6 Найдите корень уравнения $\log_4(7+x) = 2$.

Ответ: _____.

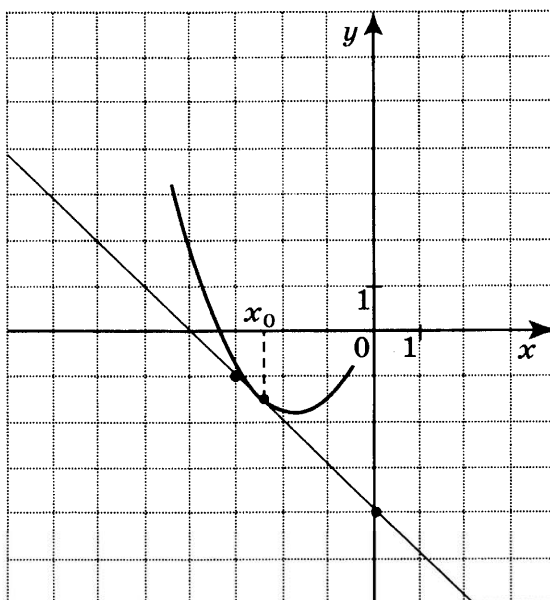
- 7 AC и BD — диаметры окружности с центром O . Угол ACB равен 32° . Найдите угол AOD . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

8

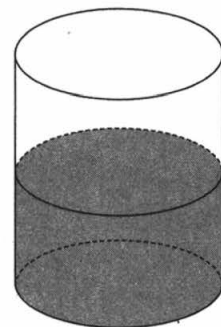
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

9

В цилиндрический сосуд налили 3000 см^3 воды. Уровень воды при этом достиг высоты 10 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 5 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в кубических сантиметрах.



Ответ: _____.

Часть 2

10

Найдите значение выражения $\left(-4\frac{3}{4} + 4\frac{1}{2}\right) \cdot 32,0$.

Ответ: _____.

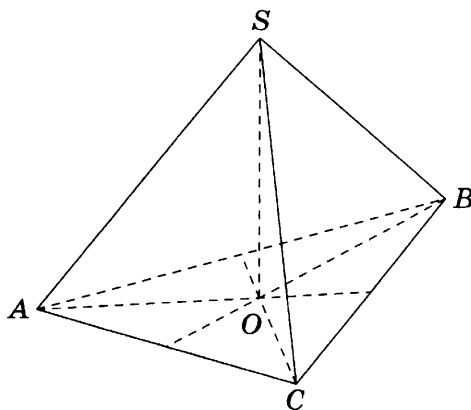
11

Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,2 + 11t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 6 м?

Ответ: _____.

12

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O . Площадь треугольника ABC равна 4; объём пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS .



Ответ: _____.

13

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 780 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 28 км/ч, стоянка длится 4 ч, а в пункт отправления теплоход возвращается через 60 ч после отплытия из него. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

14

Найдите точку максимума функции $y = (2x - 3) \cos x - 2 \sin x + 10$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

а) Решите уравнение $5 \sin 2x + 5 \cos x - 8 \sin x - 4 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

16

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1.

- Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки B , C_1 и F .
- Найдите расстояние от точки B до прямой $C_1 F$.

17

Решите неравенство $\log_{\log_x 2x} (5x - 2) \geq 0$.

18

Прямая, параллельная основаниям BC и AD трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB и CD в точках M и N . Диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Прямая MN пересекает стороны OA и OD треугольника AOD в точках K и L соответственно.

- Докажите, что $MK = NL$.
- Найдите MN , если известно, что $BC = 6$, $AD = 9$ и $MK : KL = 1 : 2$.

19

31 декабря 2014 года Степан взял в банке 4 004 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Степан переводит в банк платёж. Весь долг Степан выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

20

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $f(x) = |3a + 5| \sqrt[3]{x}$ имеет 4 решения, где f — чётная периодическая функция с периодом $T = \frac{16}{3}$, определённая на всей числовой прямой, причём $f(x) = (3a + 1)x^2$, если $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$.

21

Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны члены последовательности $a_n = dn^n + 21$ (d — целое). В результате получается рациональное число. Найдите это число.

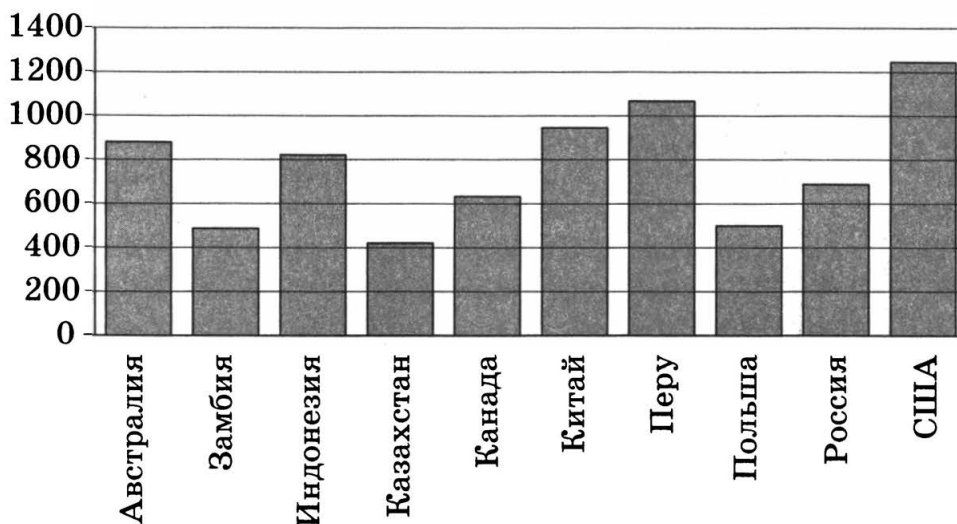
Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Для покраски потолка требуется 270 г краски на 1 м². Краска продаётся в банках по 3 кг. Сколько банок краски нужно купить для покраски потолка площадью 37 м²?

Ответ: _____.

- 2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимала Австралия?



Ответ: _____.

3

Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного $0,01$ средней цены P , показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4 . Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0,01P.$$

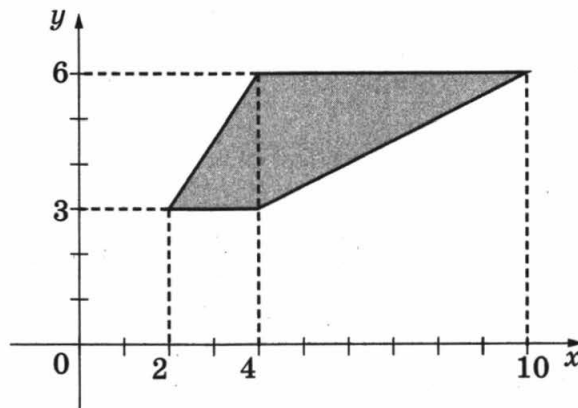
В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических мясорубок. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей электрических мясорубок.

Модель мясорубки	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	3700	4	0	2
Б	5400	1	2	2
В	3700	0	4	1
Г	5800	3	2	4

Ответ: _____.

4

Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ: _____.

5

Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 теннисистов, среди которых 9 участников из России, в том числе Тимофей Трубников. Найдите вероятность того, что в первом туре Тимофей Трубников будет играть с каким-либо теннисистом из России.

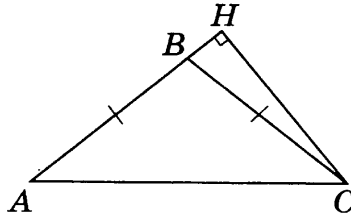
Ответ: _____.

6

Найдите корень уравнения $2^{1-3x} = 128$.

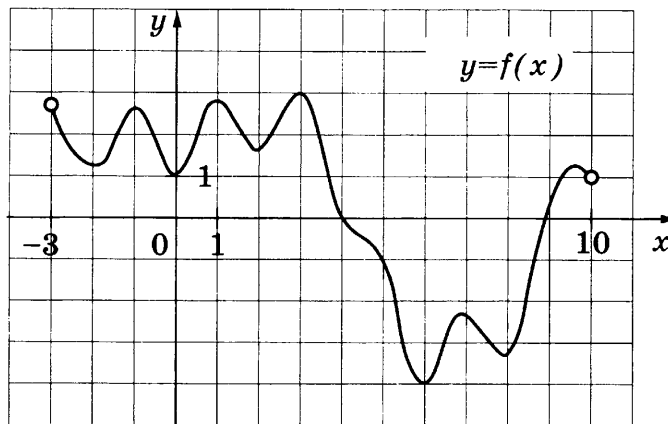
Ответ: _____.

- 7 В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 16$, высота CH равна 4. Найдите синус угла ACB .



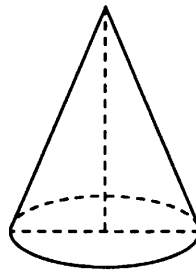
Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 10)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: _____.

- 9 Высота конуса равна 24, а длина образующей — 26. Найдите диаметр основания конуса.



Ответ: _____.

Часть 2

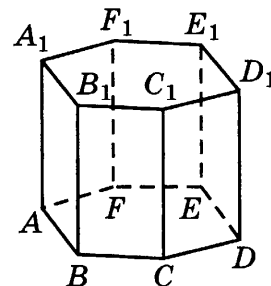
- 10 Найдите значение выражения $\log_8 144 - \log_8 2,25$.

Ответ: _____.

- 11 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 299 МГц. Скорость спуска батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f , если скорость погружения батискафа не должна превышать 5 м/с. Ответ выразите в МГц.

Ответ: _____.

- 12 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины D, E, F, D_1, E_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 10, а боковое ребро равно 12.



Ответ: _____.

- 13 Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 54 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

Ответ: _____.

- 14 Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 + 64}{x}$ на отрезке $[-18; -4]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $\cos^2 x - \cos 2x = 0,75$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.
- 16 В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 2$.
 а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и $BE D_1$.
 б) Найдите угол между плоскостями ABC и $BE D_1$.

17 Решите неравенство $\frac{x^2 + 2x - 11}{2x^2 - 3x - 5} \geq 1$.

18 Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120^\circ$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

19 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 9 282 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

20 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\left| \frac{7}{x} - 4 \right| = ax - 3$ на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

21 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{3}{10}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{5}{12}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 8 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 16 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 16 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

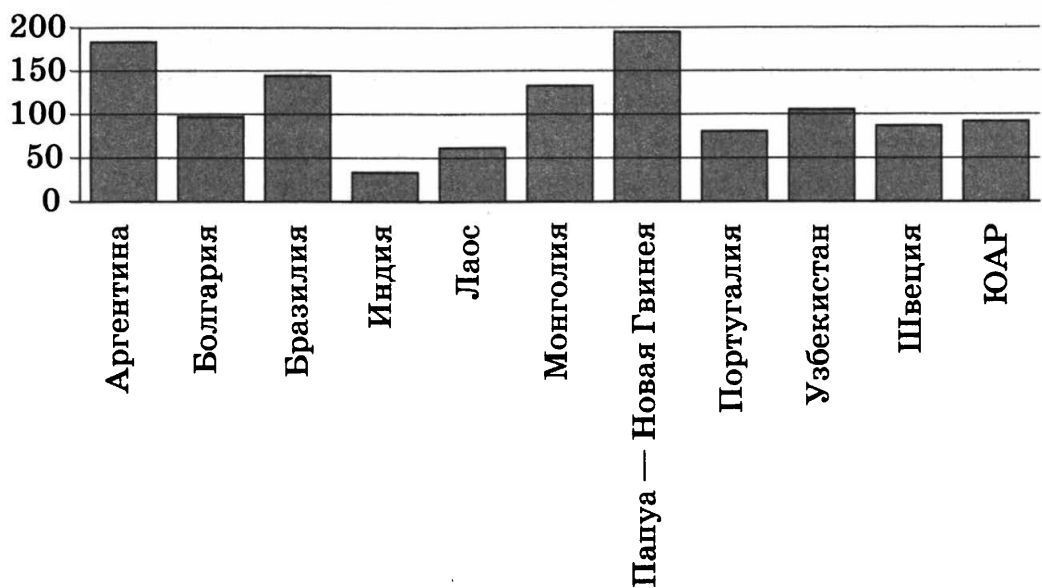
Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 В розницу один номер еженедельного журнала «Репортаж» стоит 28 руб., а полугодовая подписка на этот журнал стоит 590 руб. За полгода выходит 25 номеров журнала. Сколько рублей сэкономит г-н Иванов за полгода, если не будет покупать каждый номер журнала отдельно, а оформит подписку?

Ответ: _____.

2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа — Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимала Бразилия?



Ответ: _____.

3

Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного $0,01$ средней цены P , показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4 . Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0,01P.$$

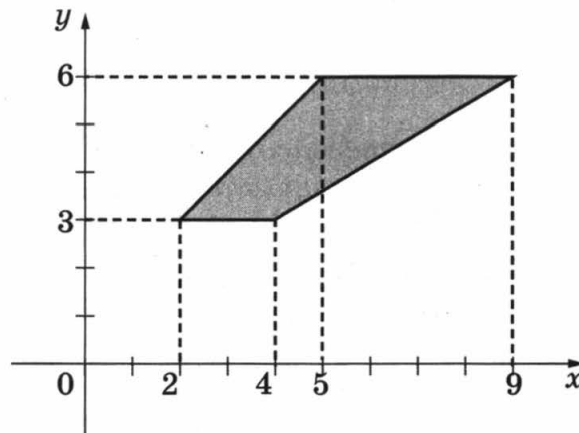
В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических мясорубок. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей электрических мясорубок.

Модель мясорубки	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	5500	0	3	0
Б	5600	3	3	4
В	5800	0	3	0
Г	4200	4	3	3

Ответ: _____.

4

Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ: _____.

5

Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 бадминтонистов, среди которых 16 участников из России, в том числе Игорь Чаев. Найдите вероятность того, что в первом туре Игорь Чаев будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

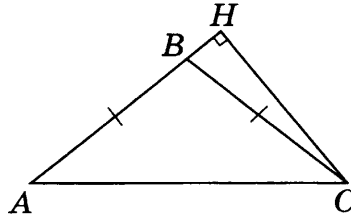
Ответ: _____.

6

Найдите корень уравнения $3^{2-x} = 27$.

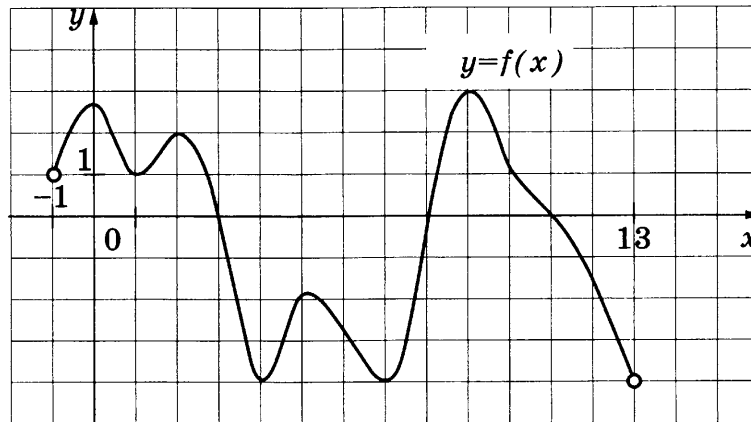
Ответ: _____.

- 7 В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 10$, высота CH равна 8. Найдите синус угла ACB .



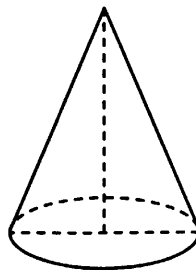
Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1; 13)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: _____.

- 9 Высота конуса равна 24, а длина образующей — 51. Найдите диаметр основания конуса.



Ответ: _____.

Часть 2

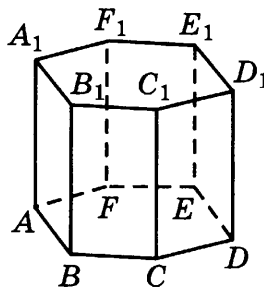
- 10 Найдите значение выражения $\log_6 63 - \log_6 1,75$.

Ответ: _____.

- 11 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 148 МГц. Скорость спуска батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f , если скорость погружения батискафа не должна превышать 20 м/с. Ответ выразите в МГц.

Ответ: _____.

- 12 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, A_1, B_1, C_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 8, а боковое ребро равно 12.



Ответ: _____.

- 13 Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 42 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

Ответ: _____.

- 14 Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 + 81}{x}$ на отрезке $[-20; -4]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0,5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

16

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ — квадрат со стороной 6, а боковое ребро равно 12. На ребре SA отмечена точка M так, что $SM = 6$.

- Постройте перпендикуляр из точки S на плоскость BCM .
- Найдите расстояние от вершины S до плоскости BCM .

17

Решите неравенство $\log_{x^2}(x+2)^2 \leq 1$.

18

Внеписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

- Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на основание.
- Известно, что радиус этой окружности в пять раз больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

19

31 декабря 2014 года Борис взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Борис переводит очередной транш. Борис выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 560 тыс. рублей, во второй — 644,1 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Борису?

20

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\left| \frac{6}{x} - 5 \right| = ax - 1$ на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более одного корня.

21

Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков

было не более $\frac{5}{16}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{7}{18}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

- Могло ли быть в группе 12 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 24 учащихся?
- Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 24 учащихся?
- Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов a и b ?

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

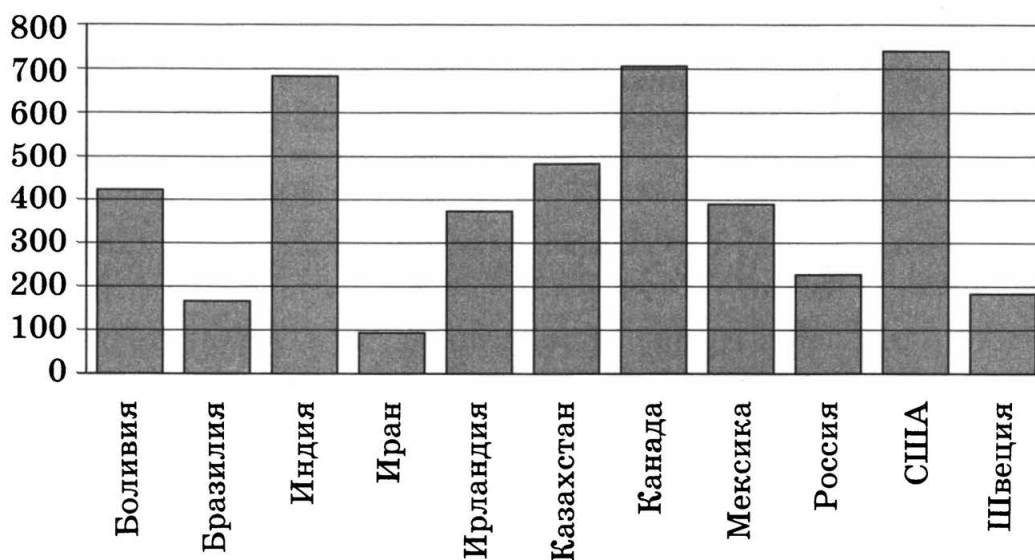
1

Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 18% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,35 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте четырёх месяцев и весом 8 кг в течение суток?

Ответ: _____.

2

На диаграмме показано распределение выплавки цинка в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке цинка занимали США, одиннадцатое место — Иран. Какое место занимала Россия?



Ответ: _____.

3

Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного $0,01$ средней цены P , показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4 . Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0,01P.$$

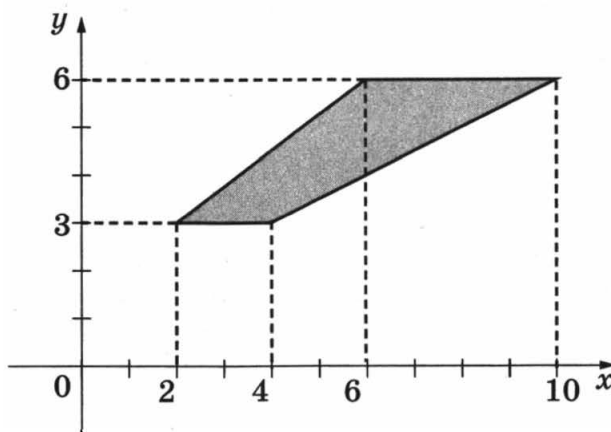
В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических мясорубок. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей электрических мясорубок.

Модель мясорубки	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4900	2	2	4
Б	4400	2	2	4
В	3600	1	0	0
Г	5500	0	1	1

Ответ: _____.

4

Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ: _____.

5

Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шашкистов, среди которых 15 участников из России, в том числе Геннадий Горьков. Найдите вероятность того, что в первом туре Геннадий Горьков будет играть с каким-либо шашкистом из России.

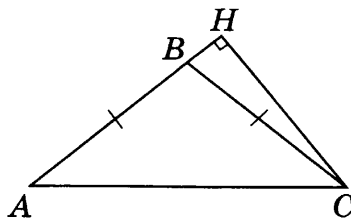
Ответ: _____.

6

Найдите корень уравнения $5^{1-x} = 125$.

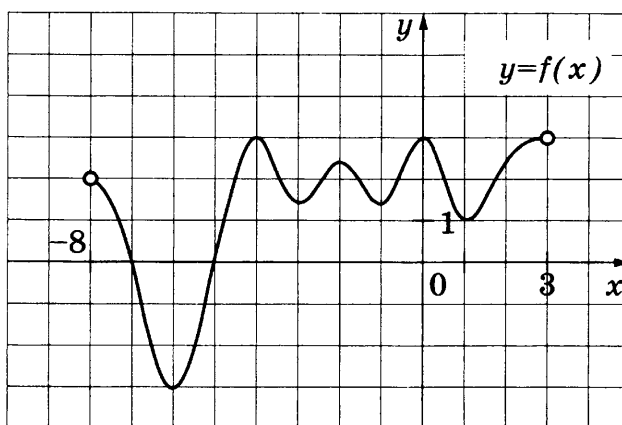
Ответ: _____.

7 В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 8$, высота CH равна 6. Найдите синус угла ACB .



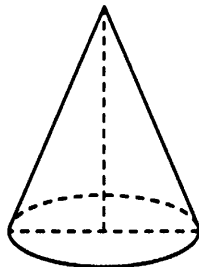
Ответ: _____.

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 3)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: _____.

9 Высота конуса равна 12, а длина образующей — 37. Найдите диаметр основания конуса.



Ответ: _____.

Часть 2

10 Найдите значение выражения $\log_4 40 - \log_4 2,5$.

Ответ: _____.

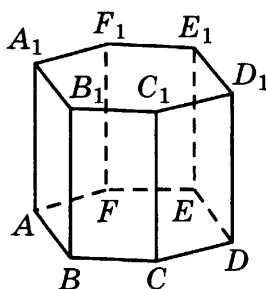
11

Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 499 МГц. Скорость спуска батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f , если скорость погружения батискафа не должна превышать 3 м/с. Ответ выразите в МГц.

Ответ: _____.

12

Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, A_1, B_1, C_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 5.



Ответ: _____.

13

Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 58 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

Ответ: _____.

14

Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 + 400}{x}$ на отрезке $[-28; -2]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

а) Решите уравнение $\cos^2 x - \cos 2x = 0,5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

16

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 4. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 3$.

- Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1 .
- Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

17

Решите неравенство $\frac{567 - 9^{-x}}{81 - 3^{-x}} \geq 7$.

18

Прямая, параллельная основаниям BC и AD трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB и CD в точках M и N . Диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Прямая MN пересекает стороны OA и OD треугольника AOD в точках K и L соответственно.

- Докажите, что $MK = NL$.
- Найдите MN , если известно, что $BC = 3$, $AD = 8$ и $MK : KL = 1 : 3$.

19

31 декабря 2014 года Сергей взял в банке некоторую сумму в кредит под 12% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12%), затем Сергей переводит в банк 3512320 рублей. Какую сумму взял Сергей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

20

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений

неравенства $\frac{a - (a^2 - 2a)\cos 2x + 2}{3 - \cos 4x + a^2} < 1$ содержит отрезок $\left[-2\pi; -\frac{7\pi}{6}\right]$.

21

Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков

было не более $\frac{1}{3}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино

мальчиков было не более $\frac{7}{19}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

- Могло ли быть в группе 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 26 учащихся?
- Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 26 учащихся?
- Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов a и b ?

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

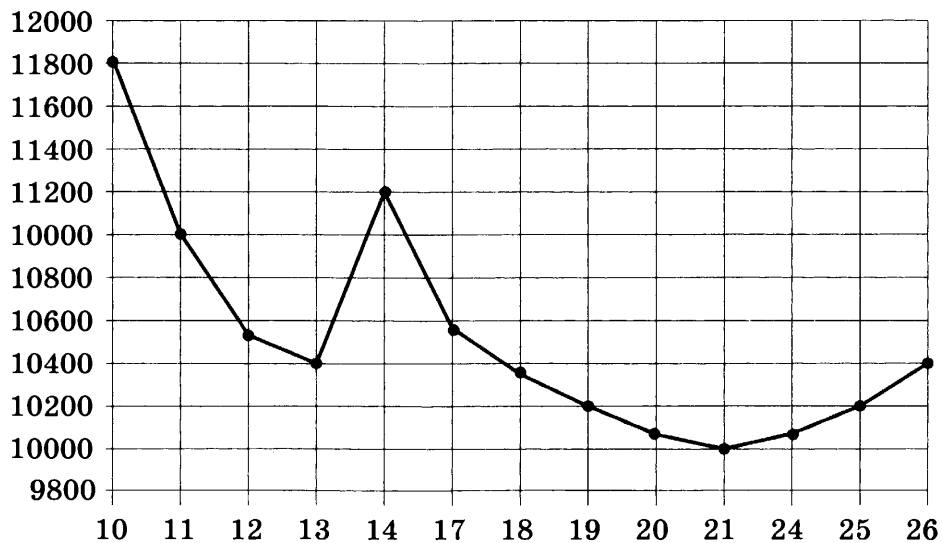
1

Поезд Саратов — Москва отправляется в 18:40, а прибывает в 10:40 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

Ответ: _____.

2

На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 10 по 26 ноября 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



Ответ: _____.

3

В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 50 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

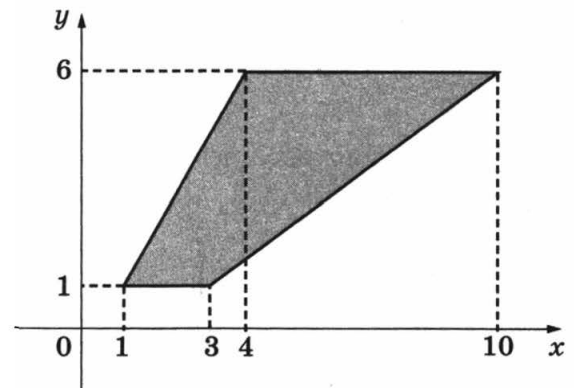
Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки*	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (в руб.)
А	300 руб.	Нет	11
Б	Бесплатно	20 мин — 300 руб.	18
В	120 руб.	10 мин — 150 руб.	12

* Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

Ответ: _____.

4

Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ: _____.

5

В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 7 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

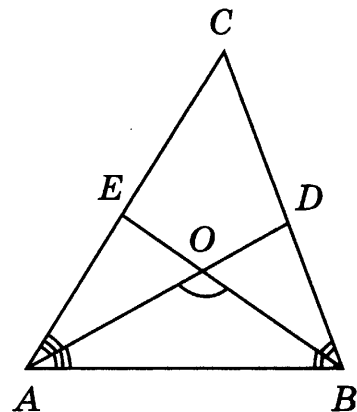
Ответ: _____.

6

Найдите корень уравнения $\log_2(5 + x) = 2$.

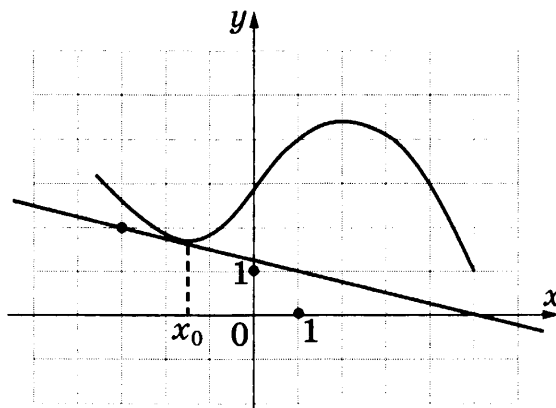
Ответ: _____.

- 7 В треугольнике ABC угол C равен 36° , биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 9 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 63 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 3 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: _____.

Часть 2

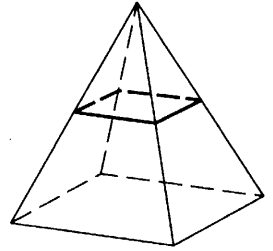
- 10 Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: _____.

- 11 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 140 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = pq$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит 400 тыс. руб. Ответ приведите в тысячах рублей.

Ответ: _____.

- 12 В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 28. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.



Ответ: _____.

- 13 На изготовление 252 деталей первый рабочий затрачивает на 9 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 420 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Ответ: _____.

- 14 Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 10)^2(x + 1) + 3$ на отрезке $[5; 14]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $\frac{7}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)} - 6 = 0$.

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

16

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 5, боковые рёбра равны 2, точка D — середина ребра CC_1 .

- Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и ADB_1 .
- Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1 .

17

Решите неравенство $\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2 + x - 1) \geq \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x - 6 - 3x^2)$.

18

Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 26 и 38 соответственно.

- Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.
- Найдите длину отрезка этой средней линии, заключённого внутри окружности.

19

31 декабря 2014 года Иван взял в банке 4 230 000 рублей в кредит под 11,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 11,5%), затем Иван переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Иван выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

20

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $a|x - 2| = \frac{5}{x + 1}$ на промежутке $[0; +\infty)$ имеет ровно три корня.

21

- Приведите пример числа-палиндрома, который делится на 15.
- Сколько существует пятизначных чисел-палиндромов, делящихся на 15?
- Найдите 37е по величине число-палиндром, которое делится на 15.

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

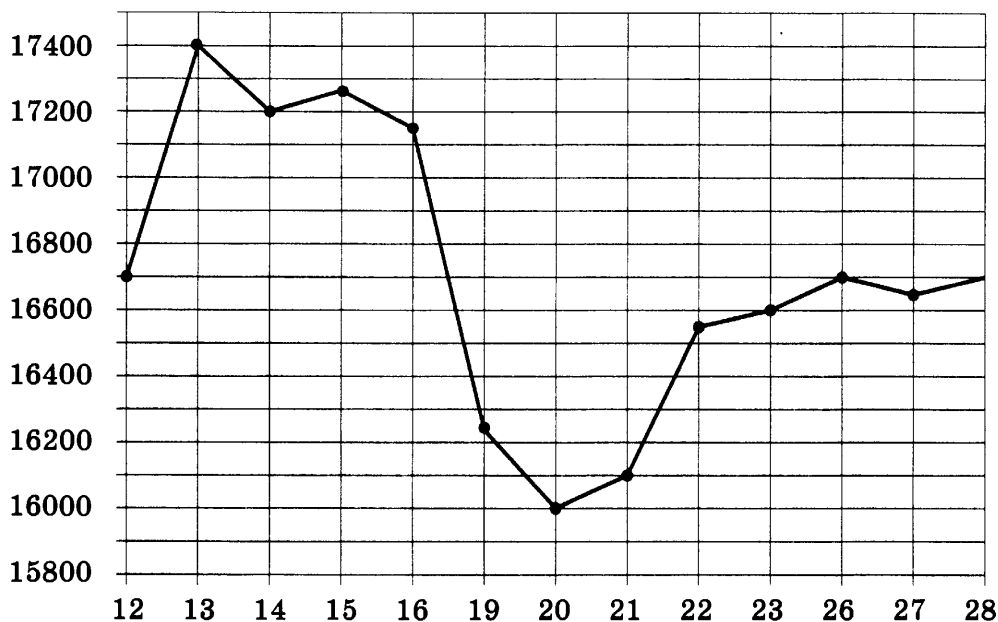
1

Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 7%. Книга стоит 300 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

Ответ: _____.

2

На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 12 по 28 ноября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой олова на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



Ответ: _____.

3

В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

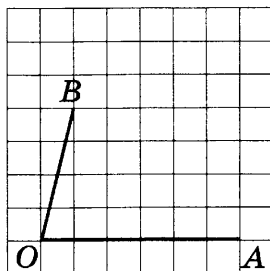
Салон	Цена телефона	Первоначальный взнос (в процентах от цены)	Срок кредита (мес.)	Сумма ежемесячного платежа
Эпсилон	23 600	30	12	1650
Дельта	25 300	20	6	3600
Омикрон	26 500	30	6	3140

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дешевле всего (с учётом переплаты), и в ответе напишите эту наименьшую сумму в рублях.

Ответ: _____.

4

Найдите тангенс угла AOB .



Ответ: _____.

5

В среднем из 700 садовых насосов, поступивших в продажу, 7 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Ответ: _____.

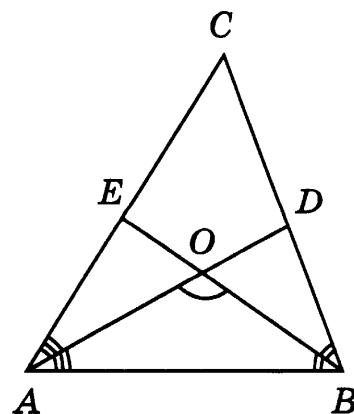
6

Найдите корень уравнения $\log_3(5 + x) = 3$.

Ответ: _____.

7

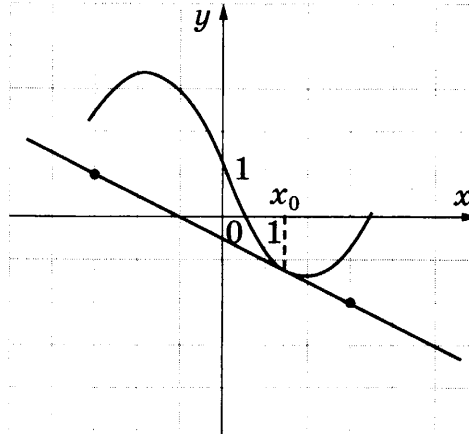
В треугольнике ABC угол C равен 52° , биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

8

На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

9

В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: _____.

Часть 2

10

Найдите значение выражения $46\sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

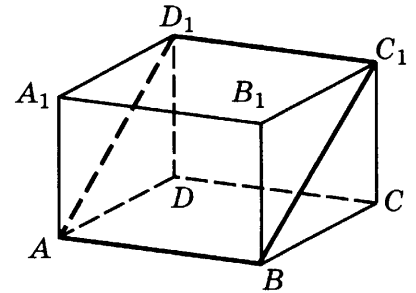
Ответ: _____.

11

Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 170 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = pq$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит 520 тыс. руб. Ответ приведите в тысячах рублей.

Ответ: _____.

- 12 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 6$, $AD = 5$, $AA_1 = 12$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , B и C_1 .



Ответ: _____.

- 13 На изготовление 522 деталей первый рабочий затрачивает на 11 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 609 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 8 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Ответ: _____.

- 14 Найдите наименьшее значение функции $y = (x + 4)^2(x + 8) + 9$ на отрезке $[-5; -1]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $\frac{5}{\sin^2 x} - \frac{3}{\cos\left(\frac{11\pi}{2} + x\right)} - 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

- 16 В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ стороны основания равны 3, боковые рёбра равны 1, точка D — середина ребра CC_1 .

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и ADB_1 .

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1 .

- 17 Решите неравенство $-2\log_{\frac{x}{3}} 27 \geq \log_3 27x + 1$.

18

На отрезке BD взята точка C . Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD .

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos \angle ABC = \frac{1}{5}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB ?

19

31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 3 689 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк платёж. Весь долг Алексей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

20

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $a|x - 5| = \frac{2}{x + 3}$ на промежутке $[0; +\infty)$ имеет ровно два корня.

21

Моток верёвки режут без остатка на куски длиной не меньше 80 см, но не больше 85 см (назовём такие куски стандартными).

а) Некоторый моток верёвки разрезали на 16 стандартных кусков, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток верёвки?

б) Найдите такое наименьшее число l , что любой моток верёвки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

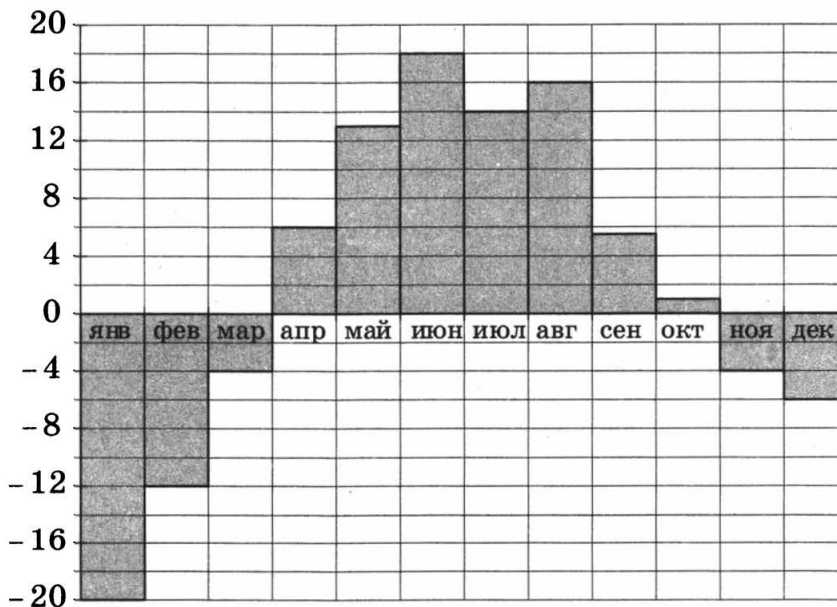
1

На счету Ленинского мобильного телефона было 54 рубля, а после разговора с Серёжей осталось 28 рублей. Сколько минут длился разговор с Серёжей, если одна минута разговора стоит 2 рубля.

Ответ: _____.

2

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Свердловске (ныне — Екатеринбург) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько месяцев в 1973 году средняя температура была ниже, чем 6 °С.



Ответ: _____.

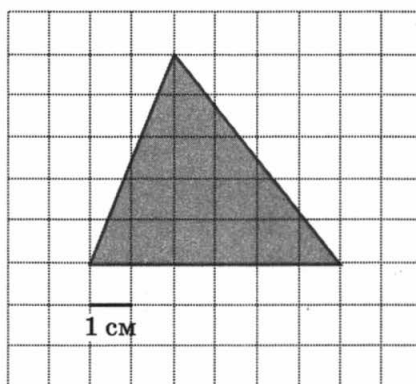
- 3 Рейтинговое агентство определяет рейтинги автомобилей на основе оценок безопасности S , комфорта C , функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый показатель оценивается читателями журнала по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле $R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}$.

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите, какой автомобиль имеет наивысший рейтинг. В ответе запишите значение этого рейтинга.

Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4	2	3	4	4
Б	4	3	3	4	3
В	3	5	2	5	3

Ответ: _____.

- 4 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

- 5 При изготовлении подшипников диаметром 69 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не более чем, на 0,01 мм, равна 0,975. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше, чем 68,99 мм, или больше, чем 69,01 мм.

Ответ: _____.

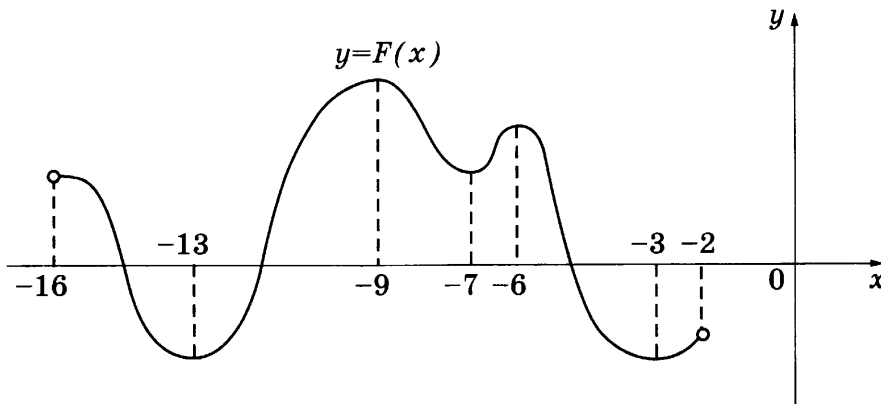
- 6 Найдите корень уравнения $2^{2x-14} = \frac{1}{64}$.

Ответ: _____.

7 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 12$, $\cos A = \frac{\sqrt{51}}{10}$. Найдите высоту CH .

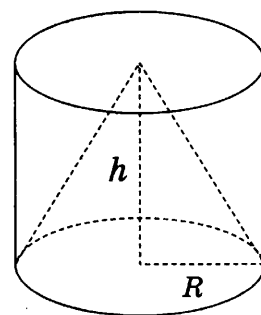
Ответ: _____.

8 На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ некоторой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-16; -2)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-10; -4]$.



Ответ: _____.

9 Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 20.



Ответ: _____.

Часть 2

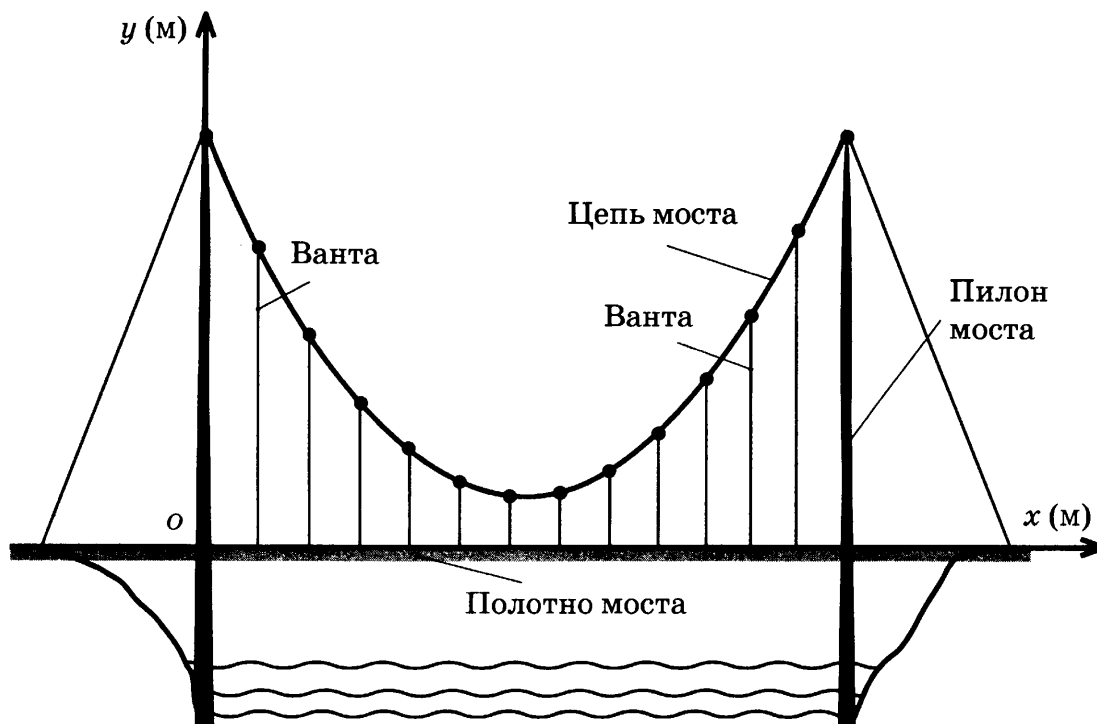
10 Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{1,2} \cdot \sqrt{1,4}}{\sqrt{0,42}}$.

Ответ: _____.

11

Самые красивые мосты — вантовые. Вертикальные **пилоны** связаны огромной провисающей **цепью**. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают **полотно моста**, называются **вантами**.

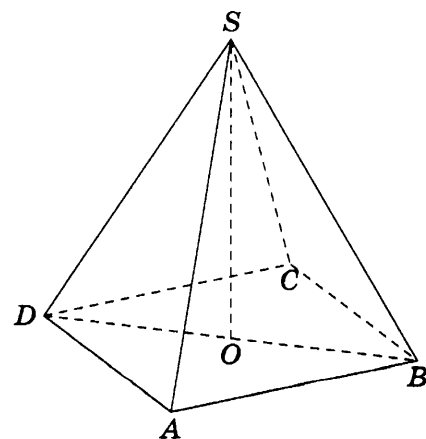
На рисунке изображена схема одного вантового моста. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат цепь моста имеет уравнение $y = 0,0061x^2 - 0,854x + 33$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 100 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



Ответ: _____.

12

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 15$, $BD = 16$. Найдите боковое ребро SA .



Ответ: _____.

- 13 Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 12 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 72 км/ч, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 45 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 14 Найдите точку минимума функции $y = 19 + 4x - \frac{x^3}{3}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

- 16 Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки B , A_1 , и D_1 .
б) Найдите угол между плоскостями $BA_1 C_1$ и $BA_1 D_1$.

- 17 Решите неравенство $3^{\log_2 x^2} + 2 \cdot |x|^{\log_2 9} \leq 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)}$.

- 18 Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC касается его сторон AB , AC и BC в точках C_1 , B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q , лежащей внутри треугольника $AB_1 C_1$.

- а) Докажите, что $C_1 Q$ — биссектриса угла $AC_1 B_1$.
б) Найдите расстояние от точки O до центра окружности, вписанной в треугольник $AC_1 B_1$, если известно что $BC = 15$, $AB = 13$, $AC = 14$.

19

31 декабря 2014 года Арсений взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Арсений переводит очередной транш. Арсений выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 550 тыс. рублей, во второй 638,4 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Арсению?

20

Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 3|x - a^2| - 5x$$

имеет более двух точек экстремума.

21

Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 5, -6, 7, -8, 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 5, -6, 7, -8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

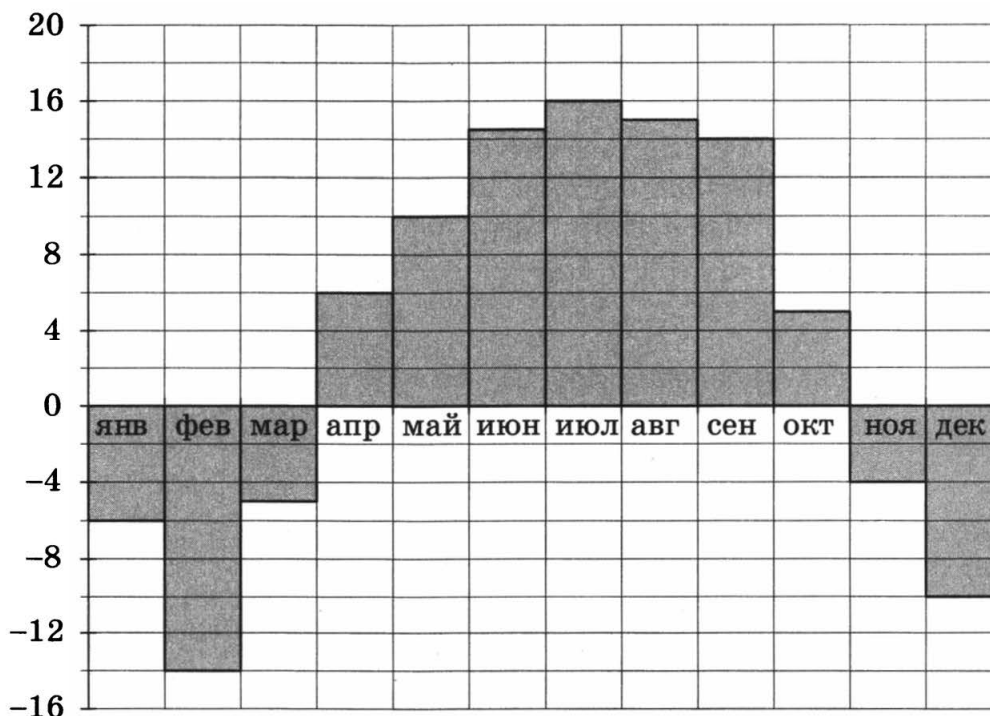
1

Диагональ экрана телевизора равна 32 дюймам. Выразите диагональ экрана в сантиметрах, если в одном дюйме 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

Ответ: _____.

2

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько месяцев в 1994 году средняя температура была ниже, чем 8 °С.



Ответ: _____.

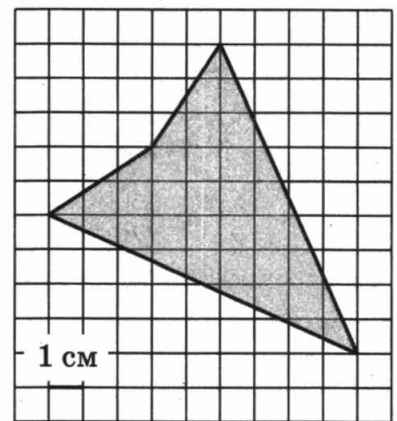
- 3 Для группы иностранных гостей требуется купить 20 путеводителей. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Цена путеводителя и условия доставки всей покупки приведены в таблице.

Интернет-магазин	Цена одного путеводителя (руб.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	283	200	Нет
Б	271	300	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 6000 руб.
В	302	250	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 5000 руб.

Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвый вариант покупки с доставкой?

Ответ: _____.

- 4 Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

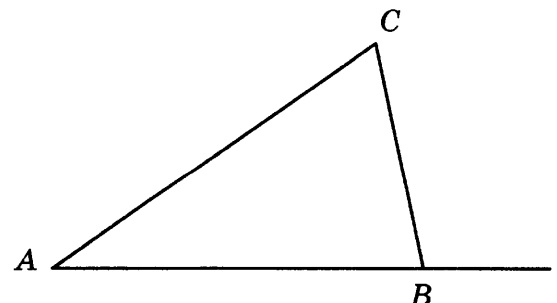
- 5 В фирме такси в данный момент свободно 16 машин: 4 чёрных, 3 синих и 9 белых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет чёрное такси.

Ответ: _____.

- 6 Найдите корень уравнения $\log_4(2 - x) = \log_{16} 25$.

Ответ: _____.

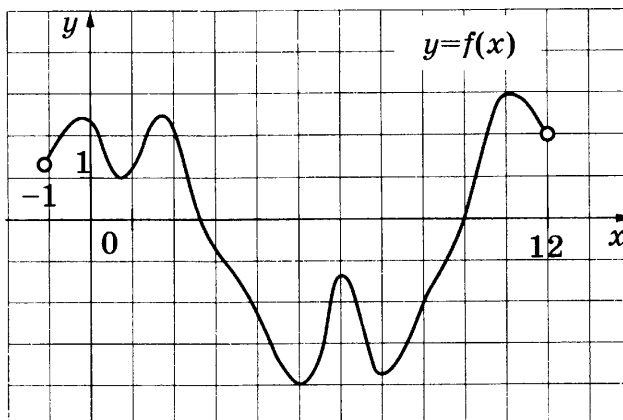
- 7 В треугольнике ABC угол A равен 41° , угол C равен 91° . Найдите внешний угол при вершине B .



Ответ: _____.

8

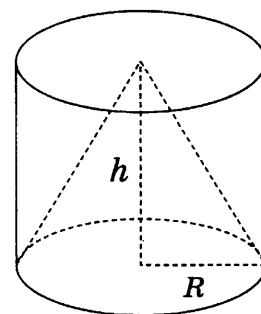
На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1; 12)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: _____.

9

Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 19.



Ответ: _____.

Часть 2

10

Найдите значение выражения $\frac{42}{2^{\log_2 3}}$.

Ответ: _____.

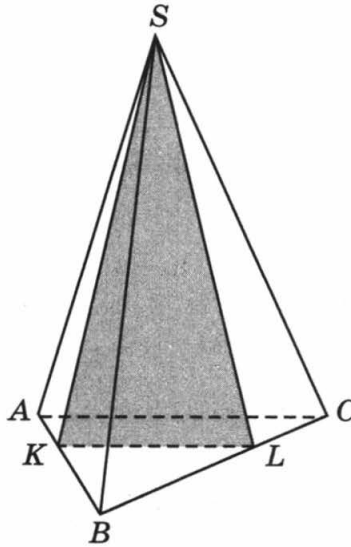
11

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t (мин) — прошедшее от начального момента время, T (мин) — период полураспада. В лаборатории получили вещество, содержащее в начальный момент времени $m_0 = 156$ мг изотопа Z , период полураспада которого $T = 8$ мин. Через какое время после начала распада масса изотопа станет меньше 39 мг?

Ответ: _____.

12

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ рёбра BA и BC разделены точками K и L соответственно в отношении $2:1$, считая от вершины B (см. рисунок). Найдите угол между плоскостью основания ABC и плоскостью сечения SKL . Ответ выразите в градусах.



Ответ: _____.

13

Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 11 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 66 км/ч, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 42 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

14

Найдите наименьшее значение функции $y = 2\cos x - 16x + 9$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

а) Решите уравнение $\frac{4}{\sin^2\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)} - \frac{11}{\cos x} + 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

16 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ — квадрат со стороной 6, а боковое ребро равно 9. На ребре SA отмечена точка M так, что $AM = 6$.

- Постройте перпендикуляр из точки S на плоскость BCM .
- Найдите расстояние от вершины S до плоскости BCM .

17 Решите неравенство $15^x - 9 \cdot 5^x - 3^x + 9 \leq 0$.

18 Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB , AC и BC в точках C_1 , B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q , лежащей внутри треугольника AB_1C_1 .

- Докажите, что C_1Q — биссектриса угла AC_1B_1 .
- Найдите расстояние от точки O до центра окружности, вписанной в треугольник AB_1C_1 , если известно что $BC = 7$, $AB = 15$, $AC = 20$.

19 1 января 2015 года Сергей Иванович взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Сергей Иванович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Сергей Иванович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 200 тыс. рублей?

20 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество значений функции $y = \frac{\sqrt{a+1} - 2\cos 3x + 1}{\sin^2 3x + a + 2\sqrt{a+1} + 2}$ содержит отрезок $[2; 3]$.

21 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 12 раз больше, либо в 12 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 8750.

- Может ли последовательность состоять из двух членов?
- Может ли последовательность состоять из трёх членов?
- Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

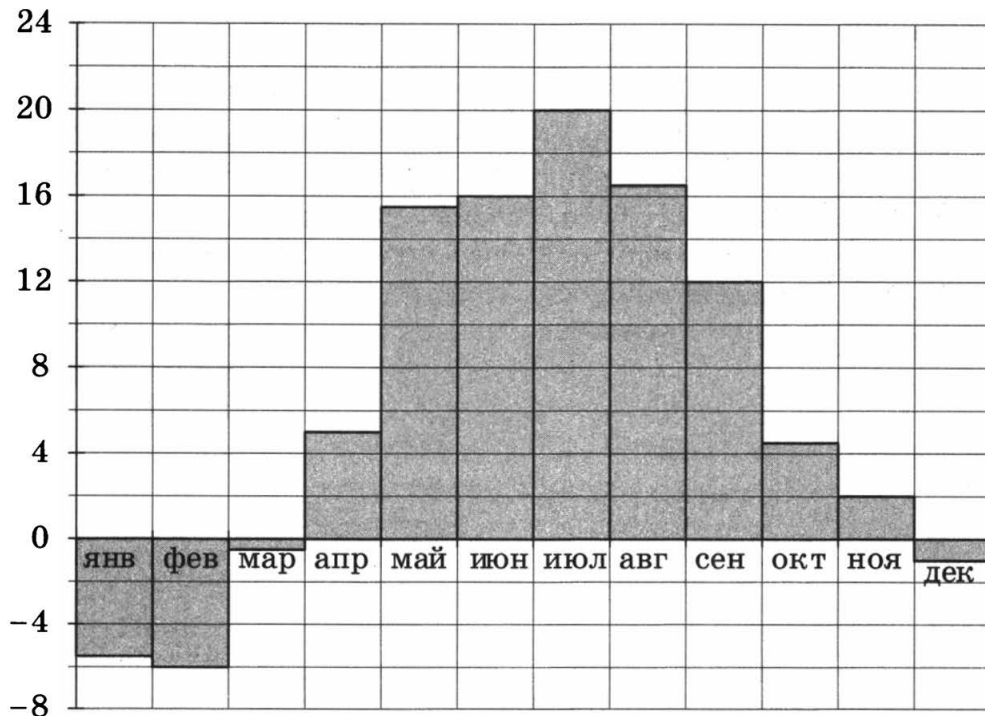
Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Аня купила проездной билет на месяц и сделала за месяц 46 поездок. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет на месяц стоит 755 руб., а разовая поездка — 21 руб.?

Ответ: _____.

- 2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько месяцев в 2003 году средняя температура была отрицательной.



Ответ: _____.

3

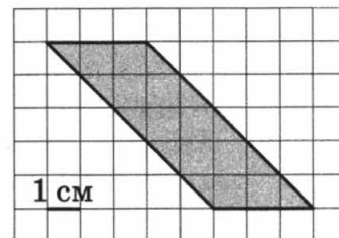
Автомобильный журнал определяет рейтинги автомобилей на основе оценок безопасности S , комфорта C , функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый показатель оценивается читателями журнала по 5-бальной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле $R = \frac{3S + C + F + 2Q + D}{40}$. В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите, какой автомобиль имеет наивысший рейтинг. В ответе запишите значение этого рейтинга.

Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4	2	3	4	4
Б	4	3	4	3	3
В	4	4	2	5	2

Ответ: _____.

4

Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

5

При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна $0,3$, а при каждом последующем — $0,9$. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее $0,96$?

Ответ: _____.

6

Найдите корень уравнения $2^{2x-14} = \frac{1}{16}$.

Ответ: _____.

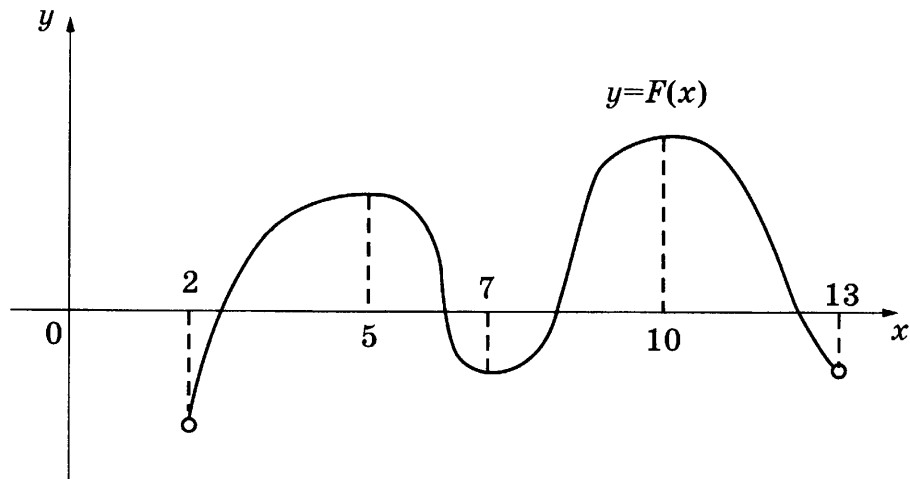
7

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 5$, $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите высоту CH .

Ответ: _____.

8

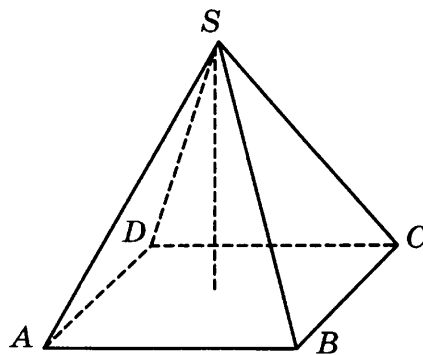
На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ некоторой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(2; 13)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[3; 9]$.



Ответ: _____.

9

В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 2, боковое ребро равно 4. Найдите её объём.



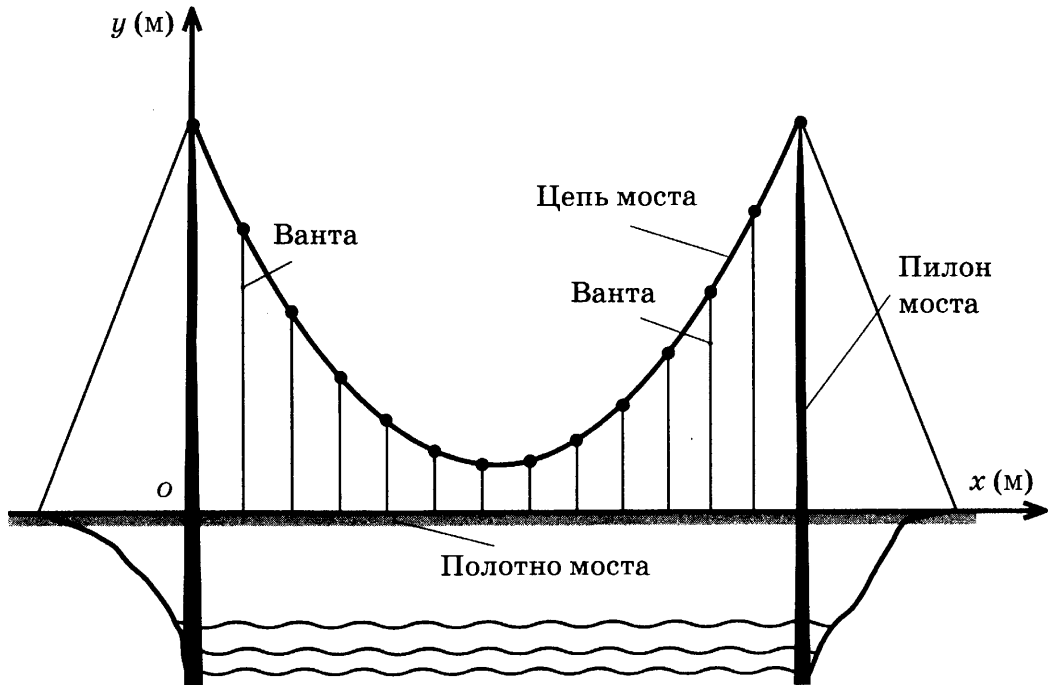
Ответ: _____.

Часть 2

10 Найдите значение выражения $34\sqrt{3} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

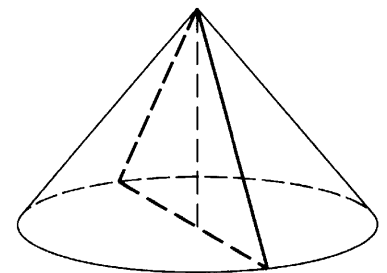
Ответ: _____.

- 11** Самые красивые мосты — вантовые. Вертикальные **пилоны** связаны огромной провисающей **цепью**. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают **полотно моста**, называются **вантами**.
 На рисунке изображена схема одного вантового моста. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат цепь моста имеет уравнение $y = 0,0056x^2 - 0,672x + 24$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 100 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



Ответ: _____.

- 12** Площадь основания конуса равна 64π , высота — 6. Найдите площадь осевого сечения конуса.



Ответ: _____.

- 13** Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 18 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 108 км/ч, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 63 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 14** Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 3x^2 + 17$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

а) Решите уравнение $\frac{3}{\cos^2\left(x - \frac{17\pi}{2}\right)} + \frac{4}{\sin x} - 4 = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

16

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки B , A_1 и D_1 .

б) Найдите угол между плоскостями $AB_1 C_1$ и $BA_1 D_1$.

17

Решите неравенство $\log_{0,25x^2}\left(\frac{x+12}{4}\right) \leq 1$.

18

Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB , AC и BC в точках C_1 , B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q , лежащей внутри треугольника $AB_1 C_1$.

а) Докажите, что $C_1 Q$ — биссектриса угла $AC_1 B_1$.

б) Найдите расстояние от точки O до центра окружности, вписанной в треугольник $AB_1 C_1$, если известно, что $BC = 9$, $AB = 10$, $AC = 17$.

19

31 декабря 2014 года Семён взял в банке 6 006 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Семён переводит в банк платёж. Весь долг Семён выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

20

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество значений

функции $y = \frac{5a + 150x - 10ax}{100x^2 + 20ax + a^2 + 25}$ содержит отрезок $[0; 1]$.

21

Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел $-1, 3, 4, -5, 7, -9, -10, 11$. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел $-1, 3, 4, -5, 7, -9, -10, 11$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

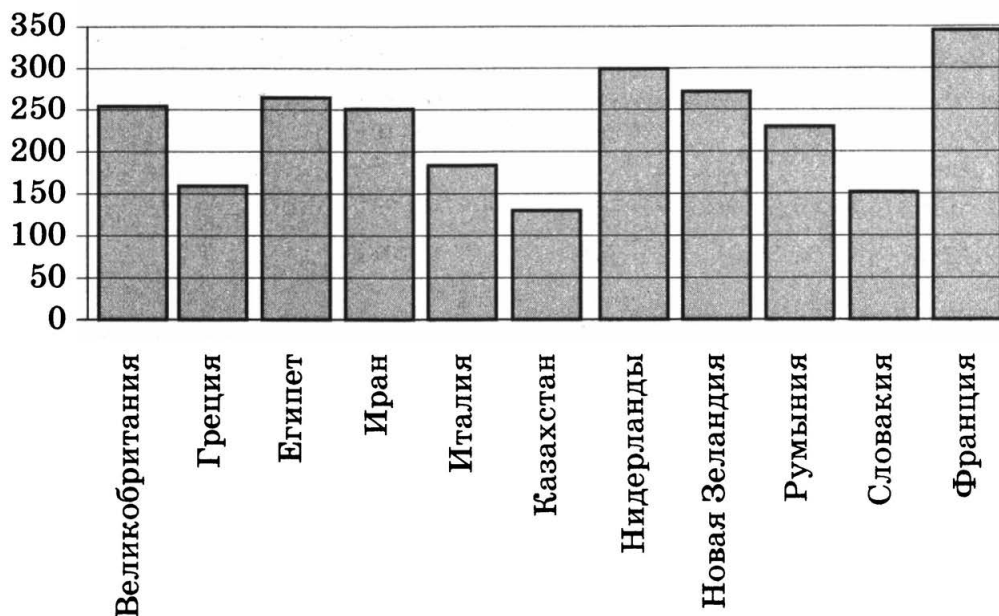
1

В летнем лагере 197 детей и 28 воспитателей. В автобус помещается не более 52 пассажира. Сколько автобусов требуется, чтобы перевезти всех из лагеря в город?

Ответ: _____.

2

На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке алюминия занимала Франция, одиннадцатое место — Казахстан. Какое место занимала Италия?



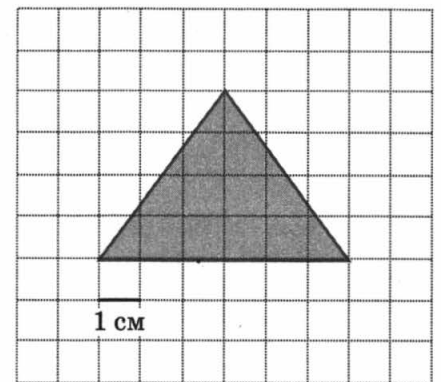
Ответ: _____.

- 3 Для изготовления книжных полок требуется заказать 30 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла — $0,35 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стёкол и шлифовку края. Сколько будет стоить самый дешёвый заказ (в рублях)?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)
А	450	80
В	470	70
С	500	60

Ответ: _____.

- 4 На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображён треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

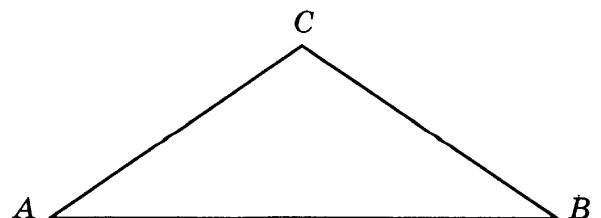
- 5 В фирме такси в данный момент свободно 35 машин: 11 красных, 17 фиолетовых и 7 зелёных. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет зелёное такси.

Ответ: _____.

- 6 Найдите корень уравнения $5^{4x-6} = \frac{1}{25}$.

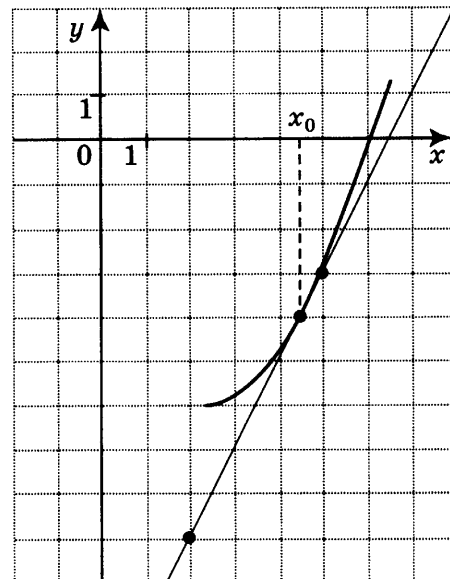
Ответ: _____.

- 7 В треугольнике ABC угол A равен 30° , $AC = BC$. Найдите угол C .



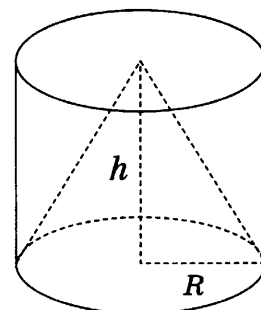
Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 9 Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 12.



Ответ: _____.

Часть 2

- 10 Найдите значение выражения $\frac{70}{4^{\log_4 5}}$.

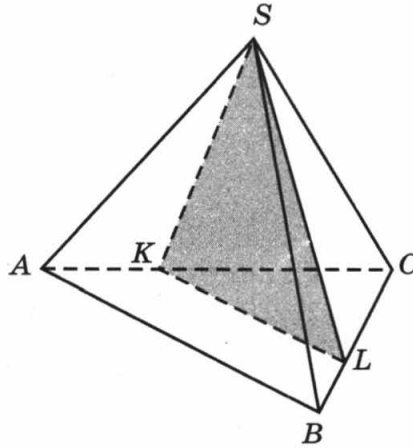
Ответ: _____.

- 11 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t (мин) — прошедшее от начального момента время, T (мин) — период полураспада. В лаборатории получили вещество, содержащее в начальный момент времени $m_0 = 4$ мг изотопа Z , период полураспада которого $T = 2$ мин. Через какое время после начала распада масса изотопа станет меньше 1 мг?

Ответ: _____.

12

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ рёбра CA и CB разделены точками K и L соответственно в отношении $2:1$, считая от вершины C (см. рисунок). Найдите угол между плоскостью основания ABC и плоскостью сечения SKL . Ответ выразите в градусах.



Ответ: _____.

13

Путешественник переплыл океан на яхте со средней скоростью 26 км/ч. Обратнo он летел на самолёте со скоростью 312 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

14

Найдите наибольшее значение функции $y = 11 + 24x - 2x\sqrt{x}$ на отрезке $[63; 65]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

а) Решите уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{3}{\sin x} + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

16 Две параллельные плоскости, находящиеся на расстоянии 8 друг от друга, пересекают шар. Получившиеся сечения одинаковы, и площадь каждого из них равна 9π .

- Постройте эти сечения.
- Найдите площадь поверхности шара.

17 Решите неравенство $\frac{x^3 - 13x^2 + 44x - 30}{x^2 - 11x + 30} \geq x - 1$.

18 Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB , AC и BC в точках C_1 , B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q , лежащей внутри треугольника AB_1C_1 .

- Докажите, что C_1Q — биссектриса угла AC_1B_1 .
- Найдите расстояние от точки O до центра окружности, вписанной в треугольник AB_1C_1 , если известно, что $BC = 10$, $AB = 17$, $AC = 21$.

19 31 декабря 2014 года Василий взял в банке некоторую сумму в кредит под 13% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 13%), затем Василий переводит в банк 5 107 600 рублей. Какую сумму взял Василий в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

20 Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 4|x - a^2| - 8x$$

имеет хотя бы одну точку максимума.

21 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 14 раз больше, либо в 14 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 7424.

- Может ли последовательность состоять из двух членов?
- Может ли последовательность состоять из трёх членов?
- Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

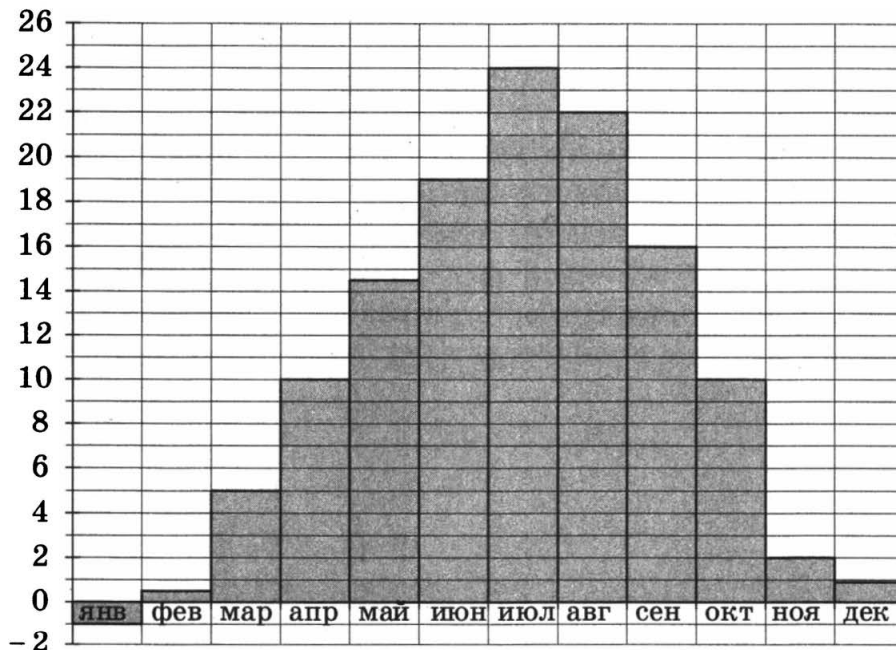
Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3700 руб. До установки счетчиков Александр платил за водоснабжение ежемесячно 1600 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 1100 руб. За сколько месяцев установка счётчиков окупится?

Ответ: _____.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, на сколько градусов в среднем сентябрь теплее апреля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

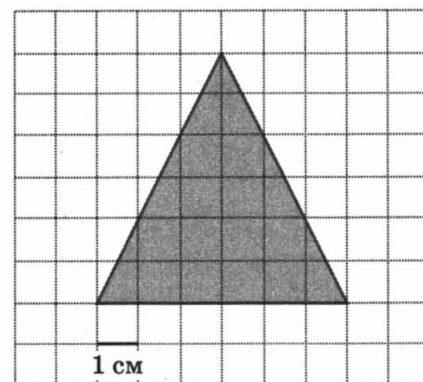
- 3 В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона (руб.)	Первоначальный взнос (в % от цены)	Срок кредита (мес.)	Сумма ежемесячного платежа (руб.)
Эпсилон	24100	15	6	3680
Дельта	24200	25	6	3280
Омикрон	25000	25	12	1620

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дешевле всего (с учётом переплаты). В ответ запишите эту сумму в рублях.

Ответ: _____.

- 4 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



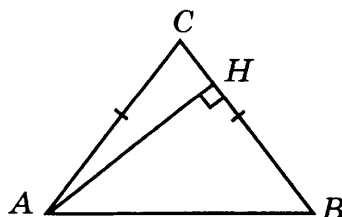
Ответ: _____.

- 5 На фабрике керамической посуды 20% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 70% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

- 6 Найдите корень уравнения $5^{2x-6} = \frac{1}{25}$.

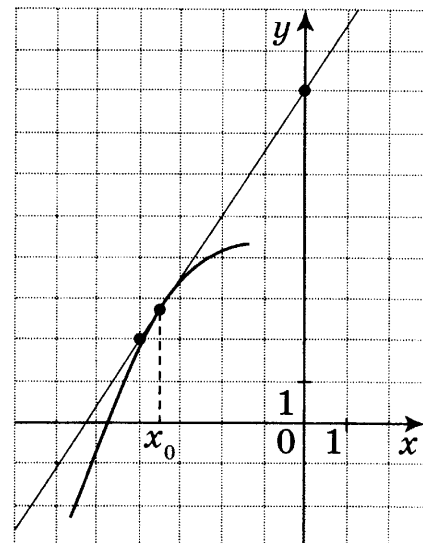
Ответ: _____.

- 7 В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 10$, высота $AH = 8$. Найдите $\cos A$.



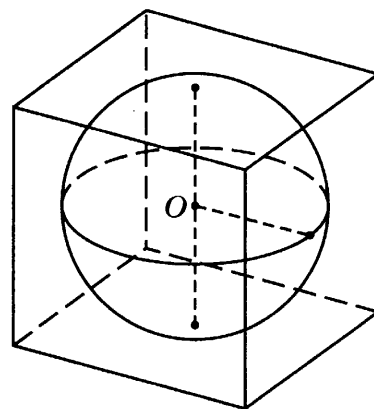
Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 9 Шар, объём которого равен 8π , вписан в куб. Найдите объём куба.



Ответ: _____.

Часть 2

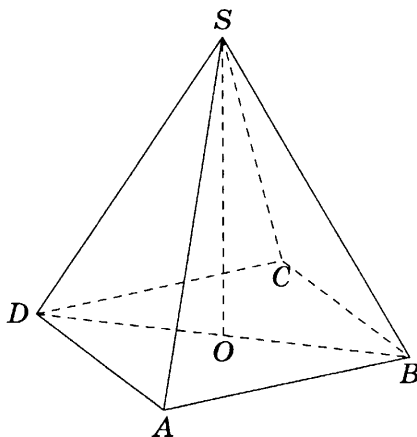
- 10 Найдите значение выражения $(\sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{75})\sqrt{3}$.

Ответ: _____.

- 11 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t (мин) — прошедшее от начального момента время, T (мин) — период полураспада. В лаборатории получили вещество, содержащее в начальный момент времени $m_0 = 12$ мг изотопа Z , период полураспада которого $T = 3$ мин. Через какое время после начала распада масса изотопа станет меньше 3 мг?

Ответ: _____.

- 12 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 12$, $BD = 18$. Найдите боковое ребро SA .



Ответ: _____.

- 13 Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 12 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 70 км/ч, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 41 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 14 Найдите наименьшее значение функции $y = 8\cos x - 17x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$.
 б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -4\pi]$.

16 Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины его рёбер AB , $B_1 C_1$, AD .
- б) Найдите угол между плоскостью $A_1 BD$ и плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , $B_1 C_1$, AD .

17 Решите неравенство $\log_{|x|}(15x - 18 - 2x^2) \leq 2$.

18 Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB , AC и BC в точках C_1 , B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q , лежащей внутри треугольника $AB_1 C_1$.

- а) Докажите, что $C_1 Q$ — биссектриса угла $AC_1 B_1$.
- б) Найдите расстояние от точки O до центра окружности, вписанной в треугольник $AB_1 C_1$, если известно, что $BC = 11$, $AB = 13$, $AC = 20$.

19 31 декабря 2014 года Владимир взял в банке некоторую сумму в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Владимир переводит в банк 3 025 000 рублей. Какую сумму взял Владимир в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

20 Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 10x$$

имеет хотя бы одну точку максимума.

21 Произведение всех делителей натурального числа N оканчивается на 333 нуля. На сколько нулей может оканчиваться число N ?

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

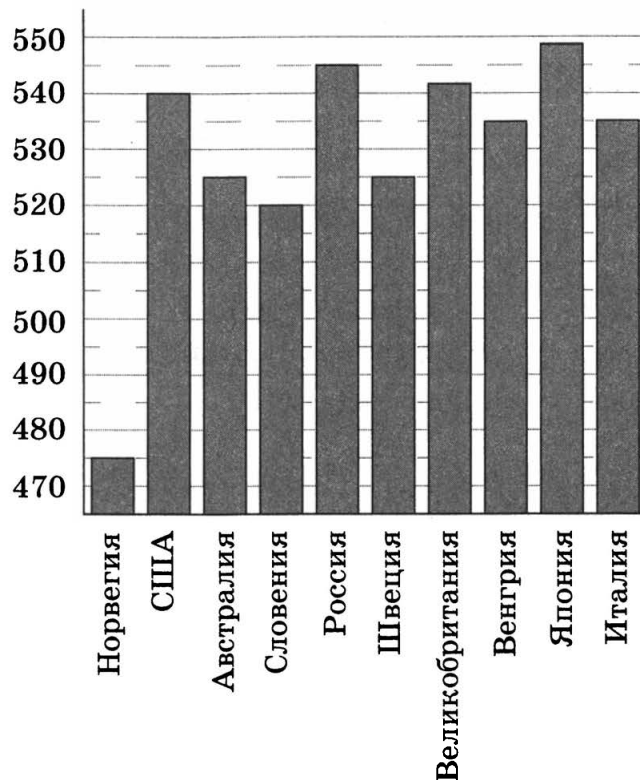
1

Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,5 г 3 раза в день в течение 21 дня. В одной упаковке 10 таблеток лекарства по 0,5 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

Ответ: _____.

2

На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 4-го класса по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл участников не меньше чем 525.



Ответ: _____.

3

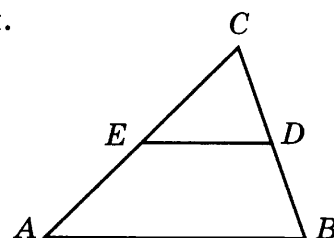
От дома до дачи можно доехать на автобусе, электричке или маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в минутах.

	1	2	3
Автобусом	От дома до остановки автобуса — 15 мин	Автобус в пути — 1 ч 55 мин	От остановки автобуса до дачи пешком — 10 мин
Электричкой	От дома до железнодорожной станции — 20 мин	Электричка в пути — 1 ч 10 мин	От железнодорожной станции до дачи пешком — 45 мин
Маршрутным такси	От дома до остановки маршрутного такси — 20 мин	Маршрутное такси в пути — 1 ч 25 мин	От остановки маршрутного такси до дачи пешком — 40 мин

Ответ: _____.

4

Площадь треугольника ABC равна 12. DE — средняя линия. Найдите площадь трапеции $ABDE$.



Ответ: _____.

5

Максим с папой решили покататься на колесе обозрения. Всего на колесе 30 кабинок, из них 11 — синие, 7 — зелёные, остальные — оранжевые. Кабинки по очереди подходят к платформе для посадки. Найдите вероятность того, что Максим прокатится в оранжевой кабинке.

Ответ: _____.

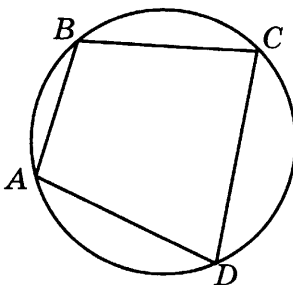
6

Найдите корень уравнения $\log_2(4-x)=8$.

Ответ: _____.

7

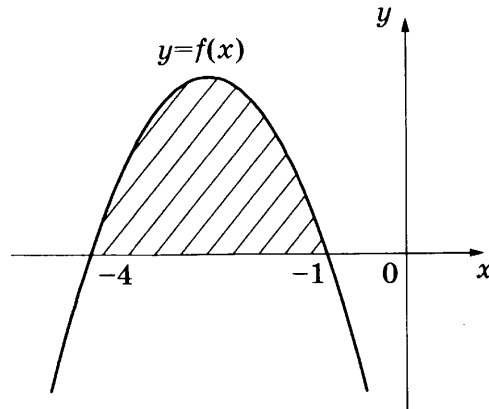
Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 98° . Найдите угол C . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

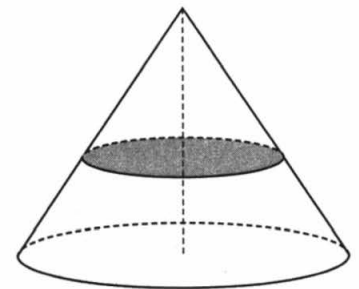
- 8 На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 4x + 2$.

Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Ответ: _____.

- 9 Объём конуса равен 32. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.



Ответ: _____.

Часть 2

- 10 Найдите значение выражения: $2^4 \cdot 7^3 : 14^2$.

Ответ: _____.

- 11 Рейтинговое агентство вычисляет рейтинг интернет-магазинов по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{\frac{0,02K}{(K+1)r_{\text{пок}} + 0,1}},$$

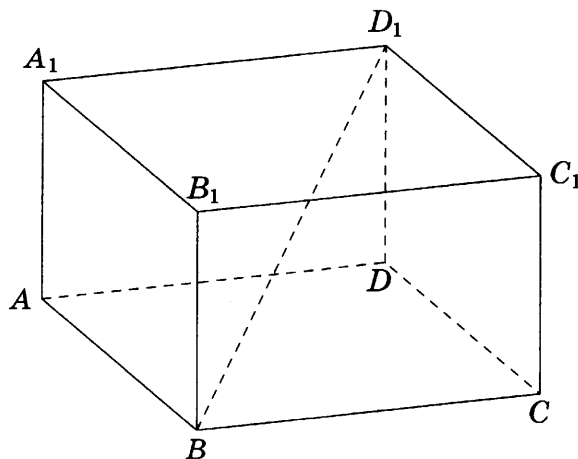
где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами компании (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин.

Найдите рейтинг интернет-магазина «Альфа», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 24, их средняя оценка равна 0,38, а оценка экспертов равна 0,13.

Ответ: _____.

12

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $BD_1 = 5$, $CC_1 = 3$, $B_1 C_1 = \sqrt{7}$. Найдите длину ребра AB .



Ответ: _____.

13

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 ч меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

14

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$ на отрезке $[-2; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

а) Решите уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{2}{\operatorname{tg} x} - 3 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

16 Вокруг куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 2 описана сфера. На ребре CC_1 взята точка M так, что плоскость, проходящая через точки A , B , и M , образует угол 15° с плоскостью ABC .

- а) Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки A , B и M .
 б) Найдите длину линии пересечения плоскости ABM и сферы.

17 Решите неравенство $9^{x+\frac{1}{9}} - 4 \cdot 3^{x+\frac{10}{9}} + 27 \geq 0$.

18 Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 34 и 49 соответственно.

- а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.
 б) Найдите длину отрезка этой средней линии, заключённого внутри окружности.

19 31 декабря 2014 года Сергей взял в банке 8 420 000 рублей в кредит под 10,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10,5%), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Сергей выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

20 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$2x^3 + 9x + 3|x + a - 2| + 2|2x - a + 2| + \sqrt[5]{2x - 3} \leq 16$$

выполняется для всех значений $x \in [-2; 1]$.

21 а) Приведите пример трёхзначного числа, у которого ровно 7 натуральных делителей.

б) Существует ли такое трёхзначное число, у которого ровно 21 натуральный делитель?

в) Сколько существует таких трёхзначных чисел, у которых ровно 18 натуральных делителей?

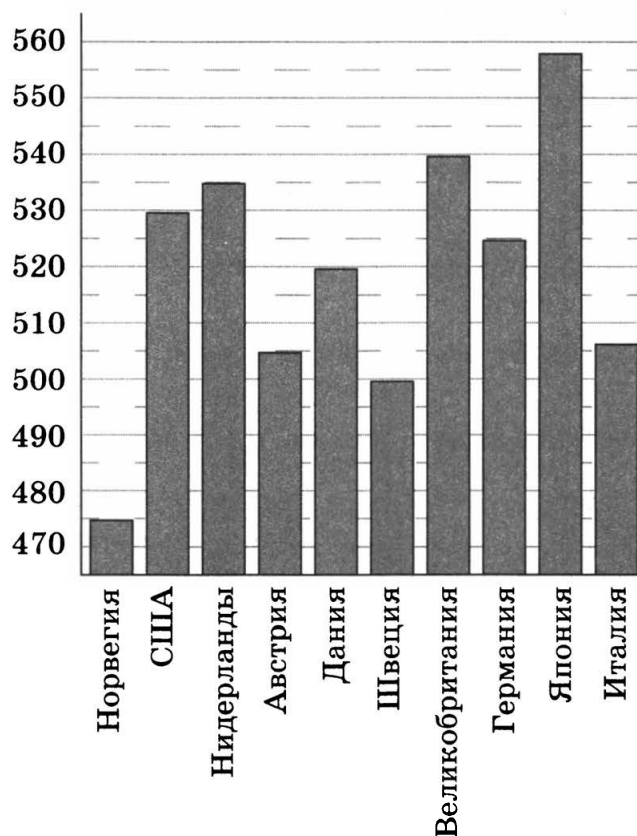
Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Бегун пробежал 100 метров за 10 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 2 На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 4-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл ниже, чем в Нидерландах.



Ответ: _____.

3

Рейтинговое агентство определяет рейтинг соотношения «цена — качество» электрических фенов для волос. Рейтинг вычисляется на основе средней цены P и оценок функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый отдельный показатель оценивается экспертами по 5-балльной шкале целыми числами от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 3(F + Q) + D - 0,01P.$$

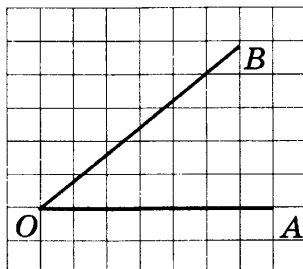
В таблице даны оценки каждого показателя для нескольких моделей фенов. Определите, какая модель имеет наименьший рейтинг. В ответе запишите значение этого рейтинга.

Модель фена	Средняя цена (руб.)	Функциональность	Качество	Дизайн
А	1950	3	3	2
Б	2100	4	3	3
В	1920	3	3	4
Г	2150	3	2	4

Ответ: _____.

4

Найдите тангенс угла AOB .



Ответ: _____.

5

Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Ответ: _____.

6

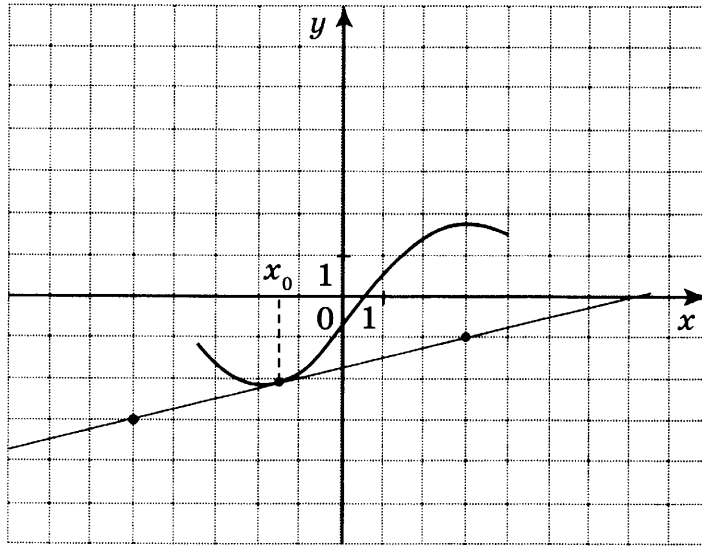
Решите уравнение $2^{3+x} = 4^{2x}$.

Ответ: _____.

7 В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 72$, $\cos A = \frac{12}{13}$. Найдите высоту CH .

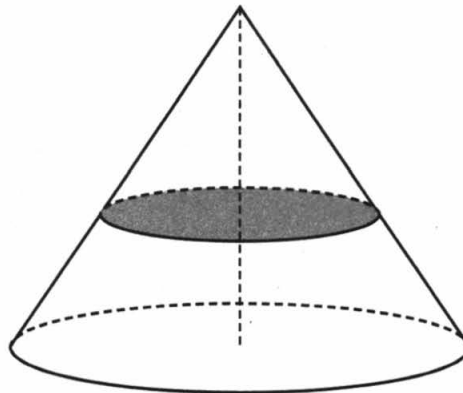
Ответ: _____.

8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

9 Объём конуса равен 40. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.



Ответ: _____.

Часть 2

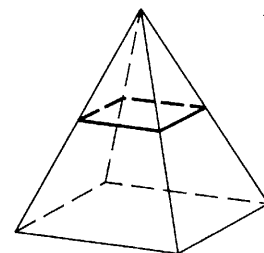
10 Найдите значение выражения $(\sqrt{3} - \sqrt{18})(\sqrt{3} + \sqrt{18})$.

Ответ: _____.

11 При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Ответ: _____.

12 В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 42. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.



Ответ: _____.

13 Моторная лодка прошла против течения реки 91 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 ч меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

14 Найдите наибольшее значение функции $y = 9 \operatorname{tg} x - 9x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15 а) Решите уравнение $7 \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

- 16** В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 2.
- Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A , C и D_1 .
 - Найдите площадь сечения, проходящего через точки A , C и D_1 .

17 Решите неравенство $\log_{8x^2 - 23x + 15} (2x - 2) \leq 0$.

- 18** В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$. Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M , N , P .
- Докажите, что треугольник MNP прямоугольный.
 - Найдите площадь треугольника MNP , если известно, что $BC = 6$.

- 19** 31 декабря 2014 года Михаил взял в банке некоторую сумму в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Михаил переводит в банк 2928200 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

- 20** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{5 - 4x - x^2} = 3a + 3$$

имеет единственный корень.

- 21** Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 5292.
- Может ли последовательность состоять из двух членов?
 - Может ли последовательность состоять из трёх членов?
 - Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

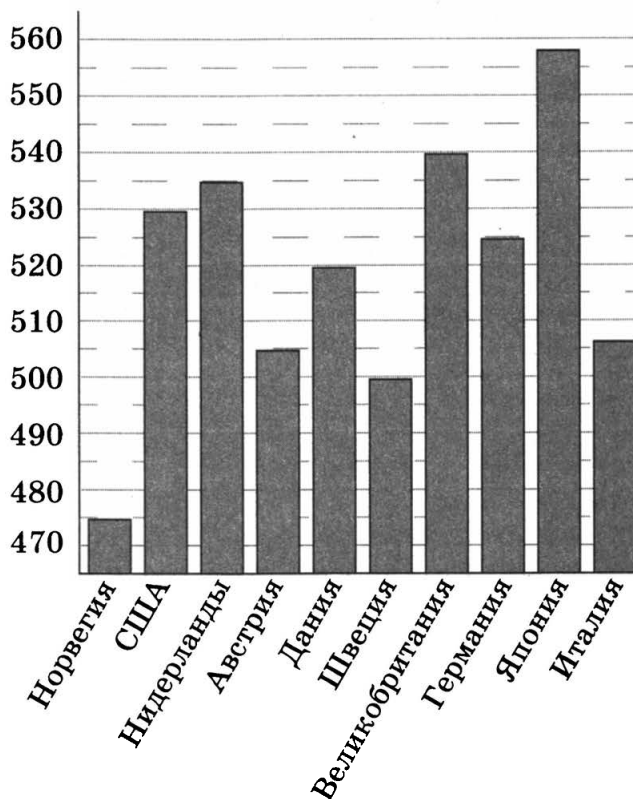
1

В доме, в котором живёт Женя, один подъезд. На каждом этаже по двенадцать квартир. Женя живёт в квартире 34. На каком этаже живёт Женя?

Ответ: _____.

2

На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран третье место принадлежит Венгрии. Определите, какое место занимает Россия.



Ответ: _____.

3

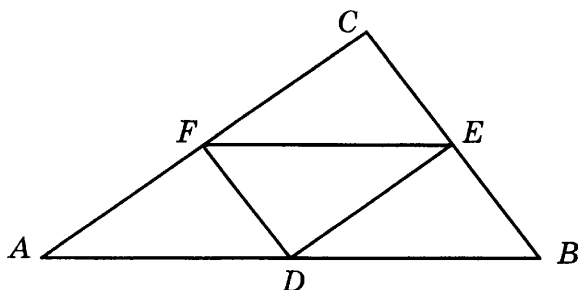
От дома до дачи можно доехать на автобусе, электричке или маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в минутах.

	1	2	3
Автобусом	От дома до остановки автобуса — 15 мин	Автобус в пути — 1 ч 55 мин	От остановки автобуса до дачи пешком — 10 мин
Электричкой	От дома до железнодорожной станции — 25 мин	Электричка в пути — 1 ч 40 мин	От железнодорожной станции до дачи пешком — 10 мин
Маршрутным такси	От дома до остановки маршрутного такси — 25 мин	Маршрутное такси в пути — 1 ч 15 мин	От остановки маршрутного такси до дачи пешком — 45 мин

Ответ: _____.

4

Периметр треугольника ABC равен 8. Найдите периметр треугольника FDE , вершинами которого являются середины сторон треугольника ABC .



Ответ: _____.

5

Кирилл с папой решили покататься на колесе обозрения. Всего на колесе 30 кабинок, из них 8 — фиолетовые, 4 — зелёные, остальные — оранжевые. Кабинки по очереди подходят к платформе для посадки. Найдите вероятность того, что Кирилл прокатится в оранжевой кабинке.

Ответ: _____.

6

Найдите корень уравнения $\log_4 2^{2x+5} = 4$.

Ответ: _____.

7

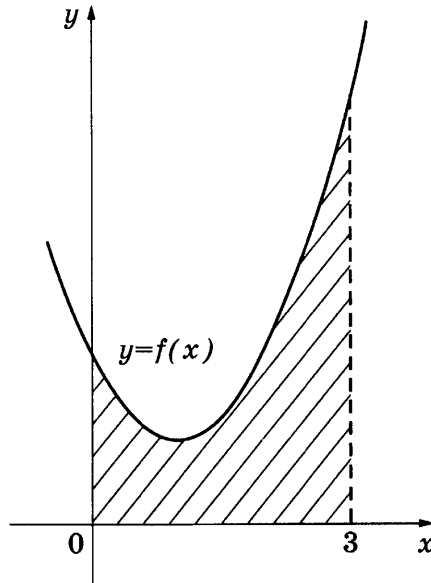
В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 10$, $\cos A = \frac{5}{13}$. Найдите высоту CH .

Ответ: _____.

8 На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна

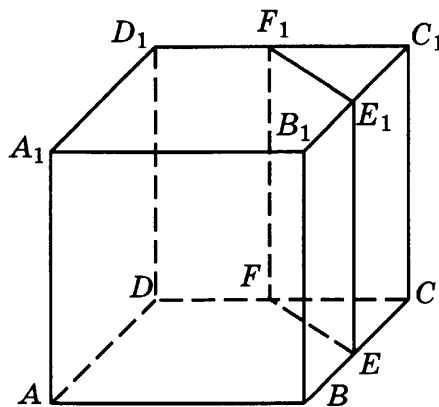
$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 3.$$

Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Ответ: _____.

9 В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E, F, E_1 и F_1 являются серединами рёбер $BC, DC, B_1 C_1$ и $D_1 C_1$ соответственно. Объём призмы, отсекаемой от куба плоскостью EFF_1 , равен 15. Найдите объём куба.



Ответ: _____.

Часть 2

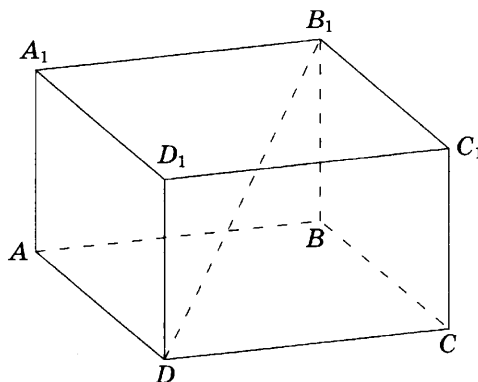
10 Найдите значение выражения $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{2}$.

Ответ: _____.

11 При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Ответ: _____.

12 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $DB_1 = \sqrt{26}$, $AA_1 = 1$, $D_1 B_1 = 3$. Найдите длину ребра CD .



Ответ: _____.

13 Моторная лодка прошла против течения реки 80 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 ч меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

14 Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x^2 + 100}{x}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

а) Решите уравнение $\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{7}{\operatorname{tg} x} + 5 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[3\pi; 4\pi]$.

16

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 1.

а) Постройте прямую пересечения плоскости SAD с плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AS .

б) Найдите угол между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AS .

17

Решите неравенство $\frac{x^3 - 7x^2 + 4x + 12}{x^2 - 7x + 12} \geq x + 1$.

18

В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$. Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M , N , P .

а) Докажите, что треугольник MNP прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника MNP , если известно, что $BC = 10$.

19

31 декабря 2014 года Аркадий взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Аркадий переводит очередной транш. Аркадий выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 530 тыс. рублей, во второй — 643,8 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Аркадию?

20

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x + a + 3| = |x - a - 3| - (a + 3)^2$$

имеет единственный корень.

21

Ученик должен был умножить двузначное число на трёхзначное и разделить их произведение на пятизначное. Однако он не заметил знака умножения и принял записанные рядом двузначное и трёхзначное числа за одно пятизначное. Поэтому полученное частное (натуральное) оказалось в два раза больше истинного. Найдите все три числа.

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

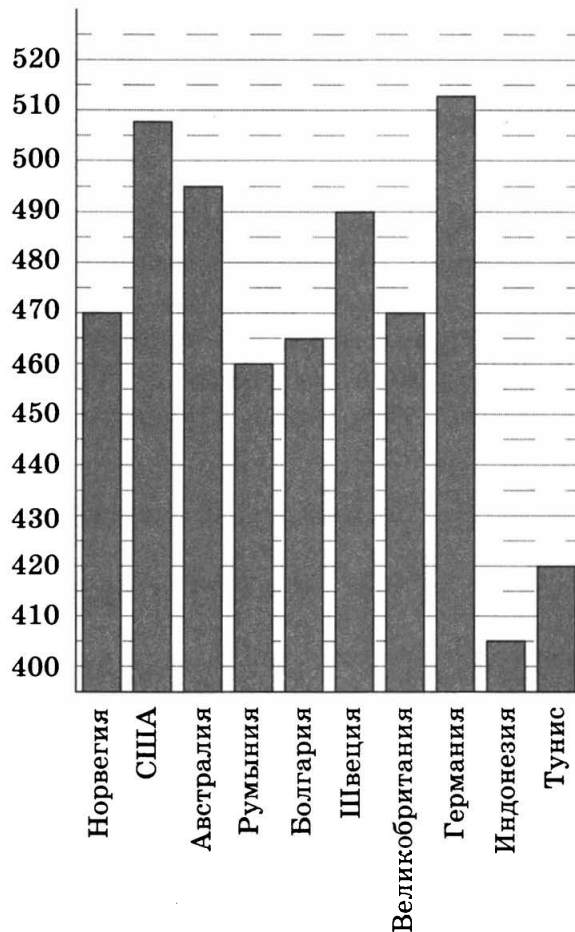
1

В книге Елены Молоховец «Подарок молодым хозяйкам» имеется рецепт пирога с черносливом. Для пирога на 6 человек следует взять $\frac{1}{5}$ фунта чернослива. Сколько граммов чернослива следует взять для пирога, рассчитанного на 9 человек? Считайте, что 1 фунт равен 0,4 кг.

Ответ: _____.

2

На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). По данным диаграммы найдите страну, в которой наименьший средний балл среди всех представленных стран Европы. В ответе напишите средний балл в этой стране.



Ответ: _____.

3

Рейтинговое агентство определяет рейтинг соотношения «цена — качество» микроволновых печей на основе средней цены P , а также оценок функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый отдельный показатель оценивается экспертами по 5-балльной шкале целыми числами от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 8(F + Q) + 4D - 0,01P.$$

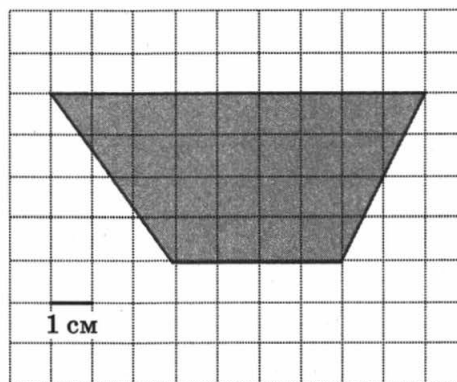
В таблице даны оценки каждого показателя для нескольких моделей печей. Определите, какая модель имеет наивысший рейтинг. В ответе запишите значение этого рейтинга.

Модель печи	Средняя цена (руб.)	Функциональность	Качество	Дизайн
А	6550	4	3	4
Б	7200	4	3	4
В	5670	3	3	4
Г	5240	3	2	3

Ответ: _____.

4

На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображена трапеция (см. рисунок). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

5

Игорь с папой решили покататься на колесе обозрения. Всего на колесе 40 кабинок, из них 21 — серые, 13 — зелёные, остальные — красные. Кабинки по очереди подходят к платформе для посадки. Найдите вероятность того, что Игорь прокатится в красной кабине.

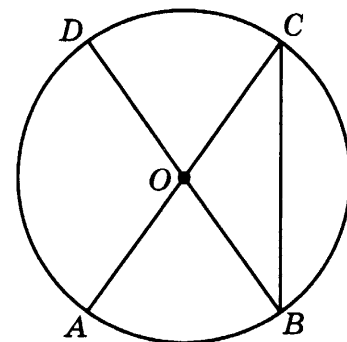
Ответ: _____.

6

Найдите корень уравнения $\log_6(5 - x) = 2$.

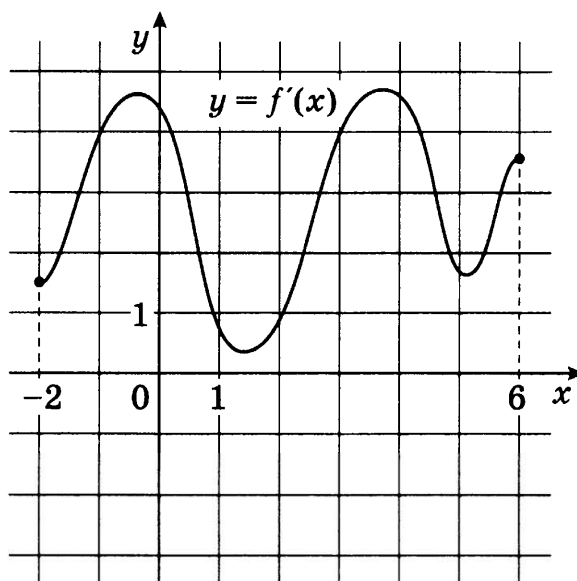
Ответ: _____.

- 7 AC и BD — диаметры окружности с центром O . Угол ACB равен 21° . Найдите угол AOD . Ответ дайте в градусах.



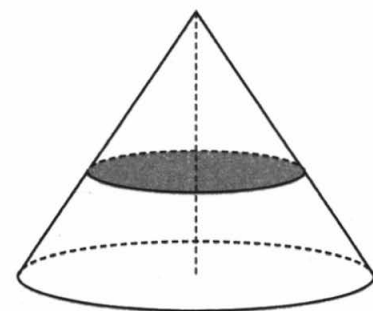
Ответ: _____.

- 8 Функция $y = f(x)$ определена на интервале $[-2; 6]$. На рисунке изображён график её производной. Определите, сколько существует касательных к графику функции $y = f(x)$, которые параллельны прямой $y = 3x + 4$ или совпадают с ней.



Ответ: _____.

- 9 Объём конуса равен 152. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.



Ответ: _____.

Часть 2

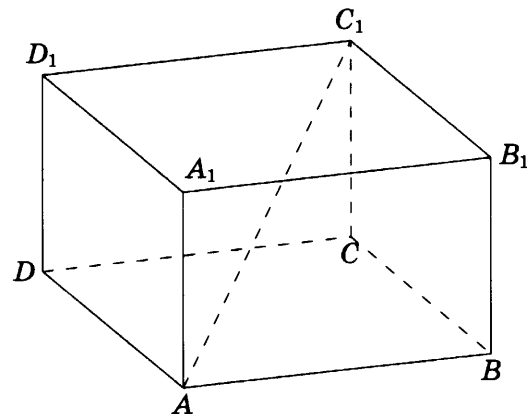
- 10 Найдите значение выражения $(\sqrt{3} - \sqrt{8})(\sqrt{3} + \sqrt{8})$.

Ответ: _____.

- 11 При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Ответ: _____.

- 12 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AC_1 = 5$, $BB_1 = \sqrt{3}$, $A_1 D_1 = \sqrt{13}$. Найдите длину ребра DC .



Ответ: _____.

- 13 Игорь и Паша красят забор за 18 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 24 часа, а Володя и Игорь — за 36 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

Ответ: _____.

- 14 Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 3$ на отрезке $[0; 13]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $\frac{1}{\text{tg}^2 x} + \frac{9}{\text{tg} x} + 8 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

16

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 1. Точка F — середина ребра AS .

- а) Постройте прямую пересечения плоскостей SAD и BCF .
 б) Найдите угол между плоскостями SAD и BCF .

17

Решите неравенство $2\log_{(x^2-4x+5)^2}(4x^2+1) \leq \log_{x^2-4x+5}(3x^2+4x+1)$.

18

Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 26 и 31 соответственно.

- а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.
 б) Найдите длину отрезка этой средней линии, заключённого внутри окружности.

19

Родион хочет взять в кредит 1,2 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Родион взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320 тысяч рублей?

20

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$3x^5 + 11x + 4|x - a + 3| + 2|3x + a - 5| + \sqrt[3]{4x + 5} \leq 25$$

выполняется для всех значений $x \in [-4; -1]$.

21

Ученик должен был умножить двузначное число на трёхзначное и разделить их произведение на четырёхзначное. Однако он не заметил знака умножения и принял записанные рядом двузначное и трёхзначное числа за одно пятизначное. Поэтому полученное частное (натуральное) оказалось в семь раз больше истинного. Найдите все три числа.

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

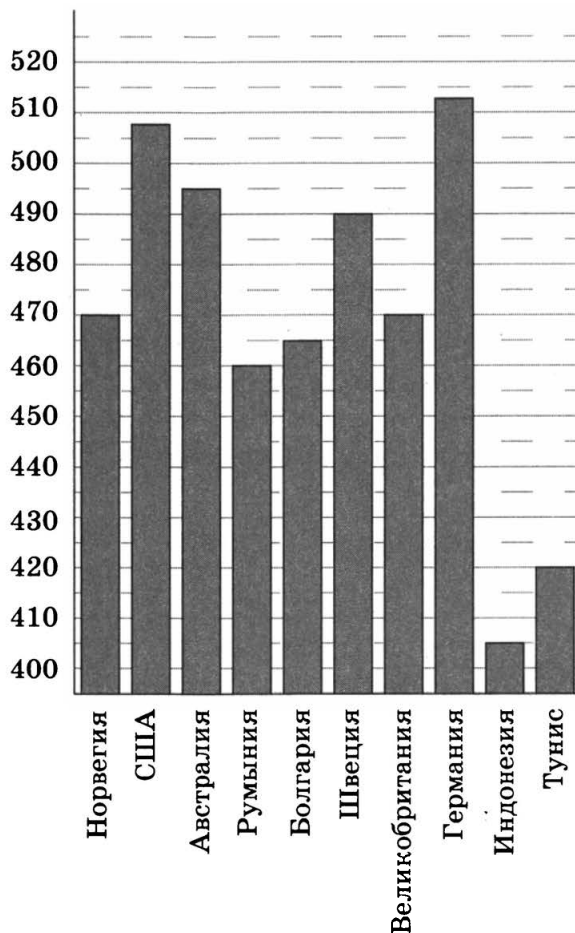
1

По тарифному плану «Просто как день» со счёта абонента компания сотовой связи каждый день снимает 22 руб. Если на счёту осталось не больше 22 руб., то на следующий день номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня Лиза положила на свой счёт 500 руб. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёта?

Ответ: _____.

2

На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран десятое место принадлежит Индонезии. Определите, какое место занимает Болгария.



Ответ: _____.

3

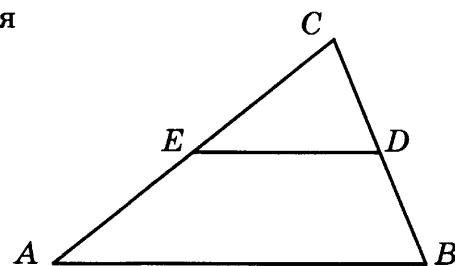
От дома до дачи можно доехать на автобусе, электричке или маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

	1	2	3
Автобусом	От дома до остановки автобуса — 5 мин	Автобус в пути — 2 ч 10 мин	От остановки автобуса до дачи пешком — 5 мин
Электричкой	От дома до железнодорожной станции — 10 мин	Электричка в пути — 1 ч 50 мин	От железнодорожной станции до дачи пешком — 15 мин
Маршрутным такси	От дома до остановки маршрутного такси — 15 мин	Маршрутное такси в пути — 1 ч	От остановки маршрутного такси до дачи пешком — 70 мин

Ответ: _____.

4

Площадь треугольника ABC равна 24. DE — средняя линия. Найдите площадь трапеции $ABDE$.



Ответ: _____.

5

Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 30% этих стёкол, вторая — 70%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стёкол, а вторая — 4%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ: _____.

6

Найдите корень уравнения $\log_2(6-x) = 5$.

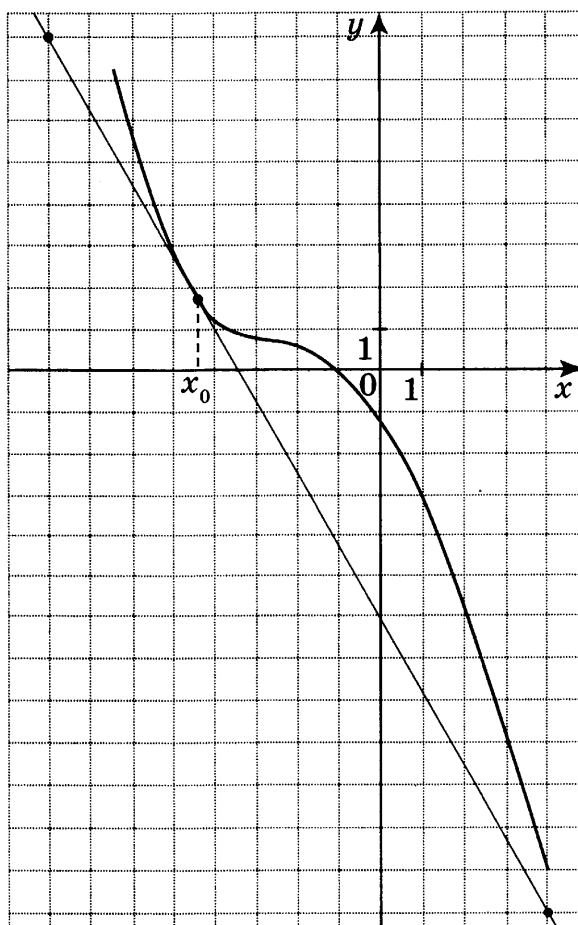
Ответ: _____.

7

Один угол параллелограмма больше другого на 12° . Найдите больший угол параллелограмма.

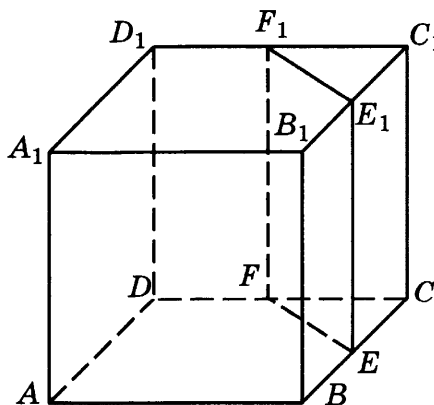
Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 9 В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ точки E, F, E_1 и F_1 являются серединами рёбер BC, DC, B_1C_1 и D_1C_1 соответственно. Объём призмы, отсекаемой от куба плоскостью EFF_1 , равен 36. Найдите объём куба.



Ответ: _____.

Часть 2

10 Найдите значение выражения $\sqrt{32} \cos^2 \frac{13\pi}{8} - \sqrt{32} \sin^2 \frac{13\pi}{8}$.

Ответ: _____.

11 Рейтинговое агентство вычисляет рейтинг интернет-магазинов по формуле

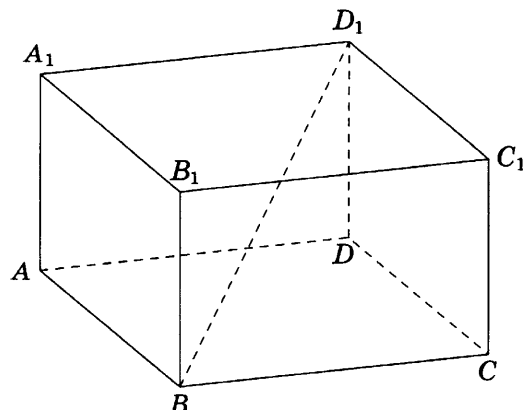
$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1)^{r_{\text{пок}} + 0,1}},$$

где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами компании (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин.

Найдите рейтинг интернет-магазина «Альфа», если число покупателей, оставивших отзывы о магазине, равно 7, их средняя оценка равна 0,32, а оценка экспертов равна 0,5.

Ответ: _____.

12 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $BD_1 = 6$, $CC_1 = 2$, $AD = \sqrt{7}$. Найдите длину ребра $D_1 C_1$.



Ответ: _____.

13 Моторная лодка прошла против течения реки 55 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 ч меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

14 Найдите наибольшее значение функции $y = 13 \operatorname{tg} x - 13x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

а) Решите уравнение $4 \operatorname{tg}^2 x - \frac{3}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

16

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 1. Точка F — середина ребра SB , G — середина ребра SC .

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABG и GDF .

б) Найдите угол между плоскостями ABG и GDF .

17

Решите неравенство $9^x - 10 \cdot 3^{x+1} + 81 \geq 0$.

18

Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120^\circ$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если известно, что $BE = 12$ и $CE = 20$.

19

1 января 2015 года Иван Сергеевич взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем Иван Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Иван Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 200 тыс. рублей?

20

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$10a + \sqrt{-7 + 8x - x^2} = ax + 3$$

имеет единственный корень.

21

Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 6075.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

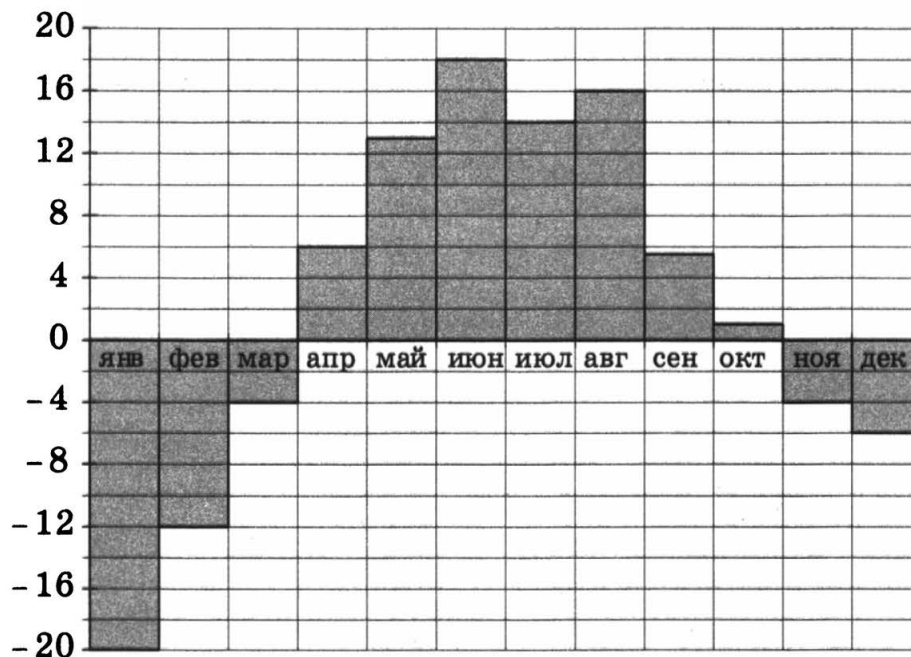
1

В квартире, где проживает Валерий, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 июня счётчик показывал расход 147 куб. м воды, а 1 июля — 158 куб. м. Какую сумму должен заплатить Валерий за холодную воду за июнь, если цена за 1 куб. м холодной воды составляет 20 руб. 70 коп.? Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____.

2

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Свердловске (ныне — Екатеринбург) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 1973 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

3

Керамическая плитка одной и той же торговой марки выпускается трёх разных размеров. Плитки упакованы в пачки. Требуется купить плитку, чтобы облицевать пол квадратной комнаты со стороной 2 м 40 см. Размеры плитки, количество плиток в пачке и стоимость пачки приведены в таблице.

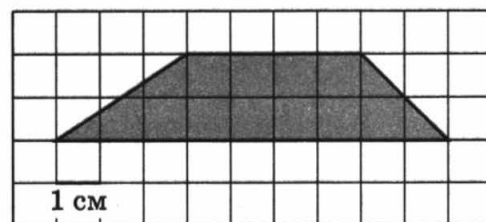
Размер плитки	Количество плиток в пачке	Цена пачки (руб. за пачку)
30 см × 30 см	14	774,9
40 см × 40 см	7	700
20 см × 20 см	31	744

Во сколько рублей обойдётся самый дешёвый вариант покупки?

Ответ: _____.

4

Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

5

По отзывам покупателей Михаил Михайлович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,81. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,93. Михаил Михайлович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

Ответ: _____.

6

Найдите корень уравнения $\sqrt{29-4x} = 3$.

Ответ: _____.

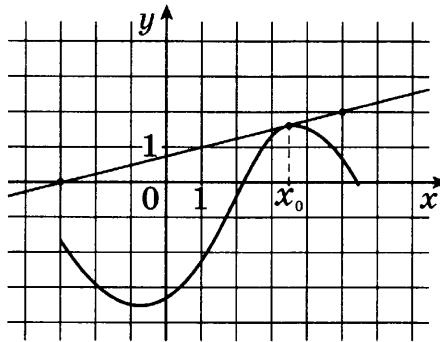
7

В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 53° , угол CAD равен 39° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

8

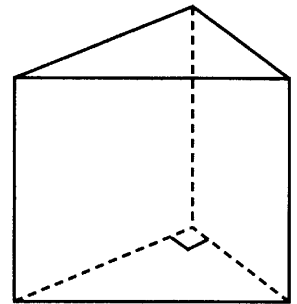
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

9

Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 6, боковое ребро равно 4. Найдите объём призмы.



Ответ: _____.

Часть 2

10

Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha \in (\pi; 1,5\pi)$.

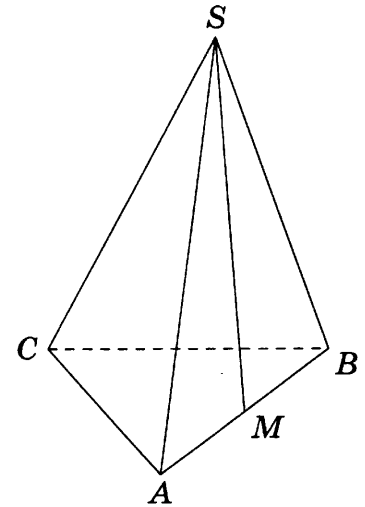
Ответ: _____.

11

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 92$ мг. Период его полураспада $T = 4$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 23 мг?

Ответ: _____.

- 12 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ M — середина ребра AB , S — вершина. Известно, что $BC = 3$, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 45. Найдите длину отрезка SM .



Ответ: _____.

- 13 Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 25 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 2 часа 30 минут позже автомобилиста. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 14 Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 10x + 29}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $4^x - 2^{x+3} + 7 = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1; 4]$.

- 16 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра которой равны 2.
а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки B , A_1 и F_1 .
б) Найдите расстояние от точки B до прямой $A_1 F_1$.

17 Решите неравенство $\log_{\frac{3x-4}{x+1}}(2x^2 - 3x) \geq \log_{\frac{3x-4}{x+1}}(17x - 20 - 3x^2)$.

18 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E , а окружность — в точке F , причём H — середина AE .

а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 5$ и $AH = 4$.

19 31 декабря 2014 года Антон взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Антон переводит очередной транш. Антон выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 510 тыс. рублей, во второй — 649 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Антону?

20 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для любой пары $(u; v)$ действительных чисел u и v выполнено неравенство

$$13\sin u - 7|\sin u + v - 2a| + 3|\sin u - 2v - a - 1| \leq 16.$$

21 На доске написано более 35, но менее 49 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 14, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -7 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

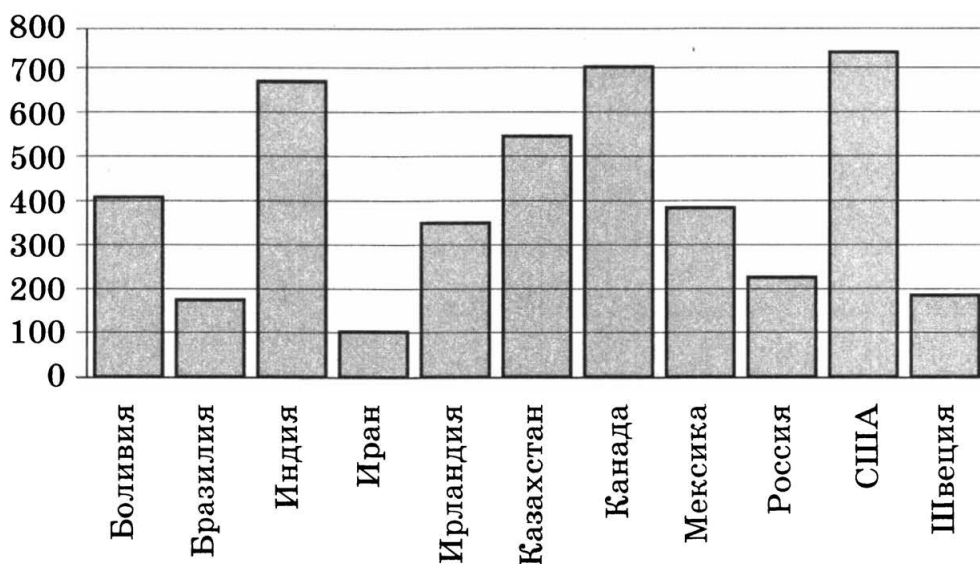
1

Система навигации, встроенная в спинку самолётного кресла, информирует пассажира о том, что полёт проходит на высоте 33 000 футов. Выразите высоту полёта в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.

Ответ: _____.

2

На диаграмме показано распределение выплавки цинка в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке цинка занимали США, одиннадцатое место — Иран. Какое место занимала Россия?



Ответ: _____.

3

В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трёх городах России (по данным на начало 2010 года).

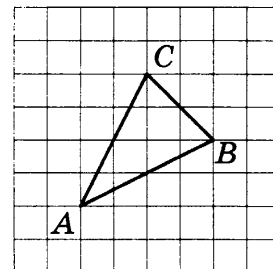
Наименование продукта	Белгород	Ярославль	Воронеж
Пшеничный хлеб (батон)	11	15	14
Молоко (1 л)	23	26	20
Картофель (1 кг)	10	9	13
Сыр (1 кг)	205	240	270
Говядина (1 кг)	240	230	240
Подсолнечное масло (1 л)	44	58	52

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 3 л молока, 1 кг говядины, 1 л подсолнечного масла. В ответе запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

Ответ: _____.

4

Найдите длину медианы треугольника ABC , проведённой из вершины C , если стороны квадратных клеток равны 1.



Ответ: _____.

5

На тарелке 16 пирожков: 8 с мясом, 3 с яблоками и 5 с луком. Настя наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с мясом.

Ответ: _____.

6

Найдите корень уравнения $x^2 + 9 = (x - 1)^2$.

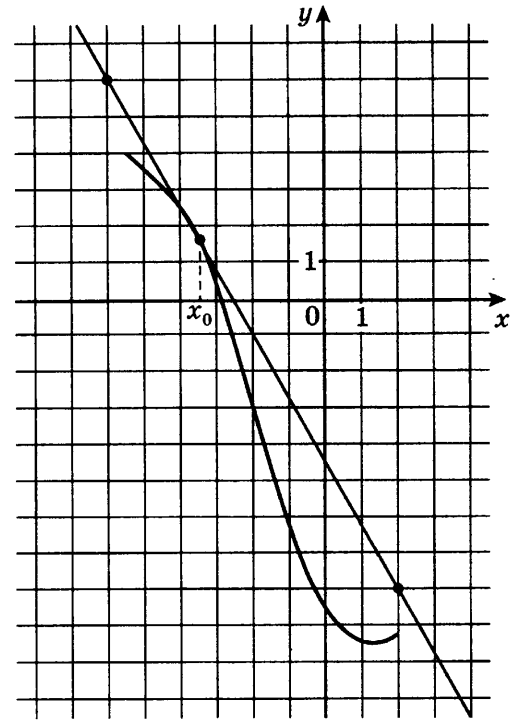
Ответ: _____.

7

В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 23° , угол CAD равен 49° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.

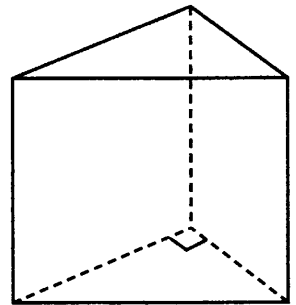
Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 9 Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Объем призмы равен 120. Найдите её боковое ребро.



Ответ: _____.

Часть 2

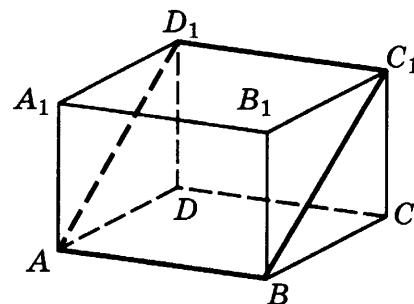
- 10 Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ и $\alpha \in (1,5\pi; 2\pi)$.

Ответ: _____.

- 11 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 140$ мг. Период его полураспада $T = 6$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 35 мг?

Ответ: _____.

- 12 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 7$, $AD = 10$, $AA_1 = 24$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , B и C_1 .



Ответ: _____.

- 13 Игорь и Паша красят забор за 12 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 15 часов, а Володя и Игорь — за 20 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

Ответ: _____.

- 14 Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 20x^2 + 100x + 23$ на отрезке $[-13; -9]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15 а) Решите уравнение $2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sqrt{3}\cos x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-6\pi; -5\pi]$.

16 Высота цилиндра равна 3, а радиус основания равен 13.

а) Постройте сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра, так, чтобы площадь этого сечения равнялась 72.

б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания цилиндра.

17 Решите неравенство $2^{1+\log_3 x^2} + 2 \cdot |x|^{\log_3 4} \leq 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\log_1(3x+4)}{3}}$.

18

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E , а окружность — в точке F , причём H — середина AE .

а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 6$ и $AH = 2\sqrt{5}$.

19

31 декабря 2014 года Павел взял в банке 6 327 000 рублей в кредит под 12% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12%), затем Павел переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Павел выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

20

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество значений

функции $y = \frac{3x + 3 - 2ax}{x^2 + 2(2a + 1)x + 4a^2 + 4a + 2}$ содержит отрезок $[0; 1]$.

21

а) Приведите пример натурального числа, которое в 15 раз больше суммы своих цифр.

б) Существует ли натуральное число, которое в 21 раз больше суммы своих цифр?

в) Найдите все натуральные числа, которые в 15873 раза больше суммы своих цифр.

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

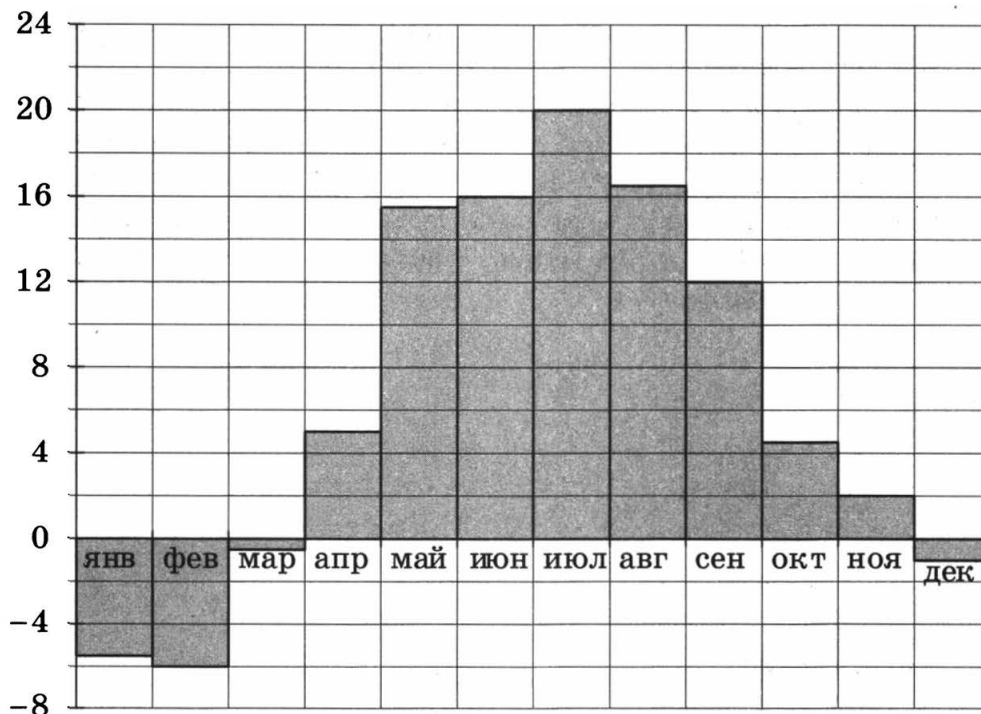
1

На бензоколонке «Бета» один литр бензина стоит 32 руб. 20 коп. Водитель залил в бак 30 литров бензина и купил бутылку воды за 22 рубля. Сколько рублей сдачи он получит с 1000 рублей?

Ответ: _____.

2

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в осенние месяцы 2003 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

3

В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трёх городах России (по данным на начало 2010 года).

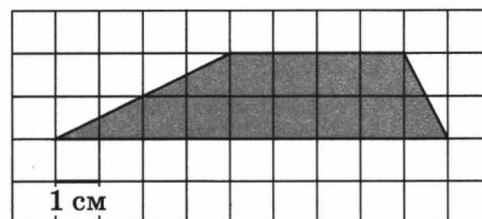
Наименование продукта	Владивосток	Омск	Хабаровск
Пшеничный хлеб (батон)	12	16	12
Молоко (1 л)	25	24	25
Картофель (1 кг)	18	16	14
Сыр (1 кг)	250	260	260
Говядина (1 кг)	300	295	260
Подсолнечное масло (1 л)	58	50	65

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 1 батон пшеничного хлеба, 4 кг картофеля, 1 кг сыра. В ответе запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

Ответ: _____.

4

Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

5

Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,02. Известно, что 66% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Ответ: _____.

6

Найдите корень уравнения $\sqrt{19-3x} = 5$.

Ответ: _____.

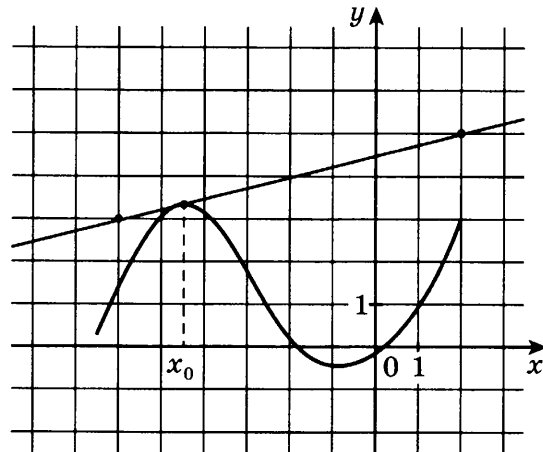
7

В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 38° , угол CAD равен 44° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

8

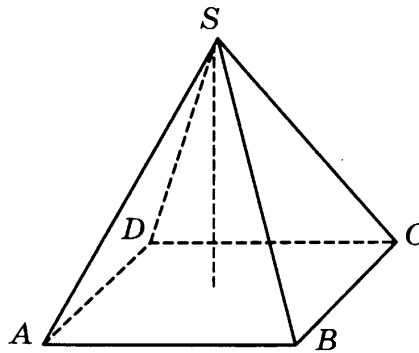
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

9

В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 8. Найдите её объём.



Ответ: _____.

Часть 2

10

Найдите значение выражения $-17\sqrt{2}\sin(-45^\circ)$.

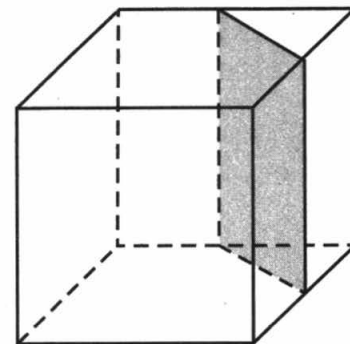
Ответ: _____.

11

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 96$ мг. Период его полураспада $T = 3$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 3 мг?

Ответ: _____.

- 12 Объем куба равен 12. Найдите объем треугольной призмы, отсекаемой от него плоскостью, проходящей через середины двух ребер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.



Ответ: _____.

- 13 Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 50 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 110 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 4 часа 35 минут позже автомобилиста. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 14 Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 12x + 40}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $(2x^2 - 5x - 12)(2\cos x + 1) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

- 16 Вокруг куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 3 описана сфера. На ребре CC_1 взята точка M так, что плоскость, проходящая через точки A , B и M , образует угол 15° с плоскостью ABC .

- а) Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки A , B и M .
- б) Найдите длину линии пересечения плоскости сечения и сферы.

17 Решите неравенство $2 \cdot 16^{-x} - 17 \cdot 4^{-x} + 8 \leq 0$.

18 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E , а окружность — в точке F , причём H — середина AE .

а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 5$ и $AH = 3$.

19 31 декабря 2014 года Валерий взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Валерий переводит очередной транш. Валерий выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 660 тыс. рублей, во второй — 484 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Валерию?

20 Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет хотя бы один корень уравнение $x^{10} + (a - 2x)^5 + x^2 + a = 2x$.

21 На доске написано более 50, но менее 60 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 5, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -10 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

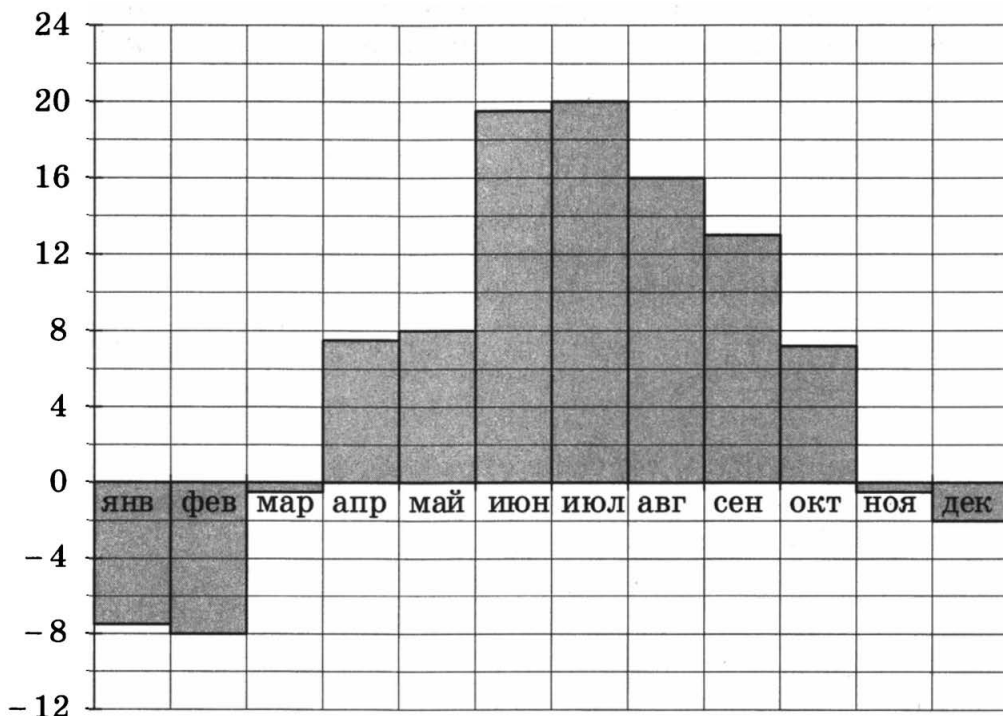
1

Когда на русский язык переводили фантастический роман Жюль Верна «20 000 льё под водой», перевели и единицы расстояния тоже. Переводчики использовали почтовое льё, в котором примерно 4 километра. В результате получился роман «80 000 километров под водой». Но в 1 морском льё не 4 километра, а примерно 5,557 км. На сколько километров больше получилось бы у переводчиков, если бы они использовали не почтовое льё, а морское?

Ответ: _____.

2

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 1999 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

3

В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трёх городах России (по данным на начало 2010 года).

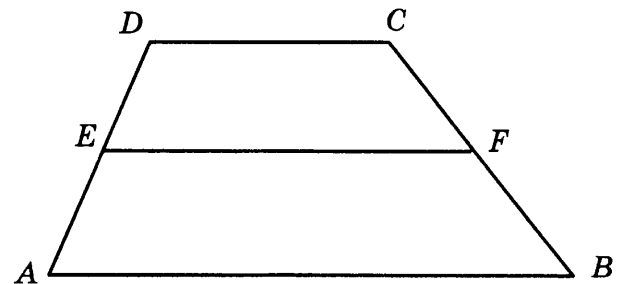
Наименование продукта	Вологда	Челябинск	Краснодар
Пшеничный хлеб (батон)	16	18	14
Молоко (1 л)	25	27	23
Картофель (1 кг)	9	16	12
Сыр (1 кг)	240	260	265
Говядина (1 кг)	280	300	280
Подсолнечное масло (1 л)	65	60	44

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 2 кг картофеля, 1 кг сыра, 1 л подсолнечного масла. В ответе запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

Ответ: _____.

4

Средняя линия трапеции равна 18, а меньшее основание равно 10. Найдите большее основание трапеции.



Ответ: _____.

5

На тарелке 16 пирожков: 7 с рыбой, 5 с вареньем и 4 с вишней. Юля наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с вишней.

Ответ: _____.

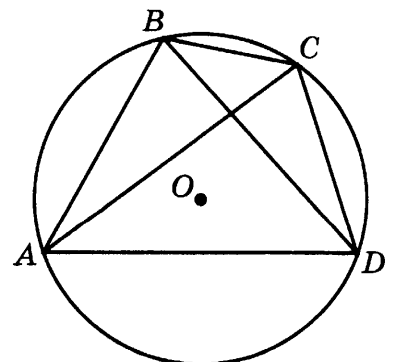
6

Найдите корень уравнения $\sqrt{16-4x} = 2$.

Ответ: _____.

7

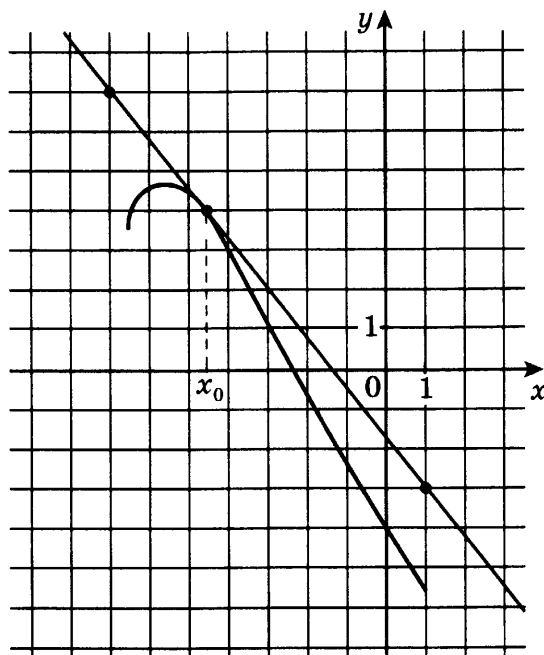
Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 116° , угол CAD равен 72° . Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

8

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

9

Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1,5. Найдите объём параллелепипеда.

Ответ: _____.

Часть 2

10

Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha \in (0; 0,5\pi)$.

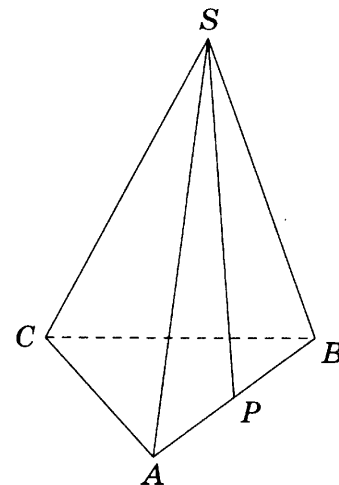
Ответ: _____.

11

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 80$ мг. Период его полураспада $T = 2$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг?

Ответ: _____.

- 12 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ P — середина ребра AB , S — вершина. Известно, что $BC = 5$, а $SP = 6$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



Ответ: _____.

- 13 Валя и Галя пропалывают грядку за 8 минут, а одна Галя — за 10 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Валя?

Ответ: _____.

- 14 Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ на отрезке $[0,5; 2]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $14 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 1 = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4; -2]$.

- 16 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 3.
а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки D , A_1 и B_1 .
б) Найдите расстояние от точки D до прямой $A_1 B_1$.

- 17 Решите неравенство $2^{\log_5 x^2} + |x|^{\log_5 4} \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{0,2}(x+6)}$.

18 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E , а окружность — в точке F , причём H — середина AE .

а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 3$ и $AH = 2\sqrt{2}$.

19 1 января 2015 года Дмитрий Алексеевич взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 3 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 3%), затем Дмитрий Алексеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Дмитрий Алексеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 250 тыс. рублей?

20 Найдите все значения b , при каждом из которых уравнение $\frac{\sin x - b \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{b + 2}$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

21 На доске написано более 55, но менее 65 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 7, среднее арифметическое всех положительных из них равно 15, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -5 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

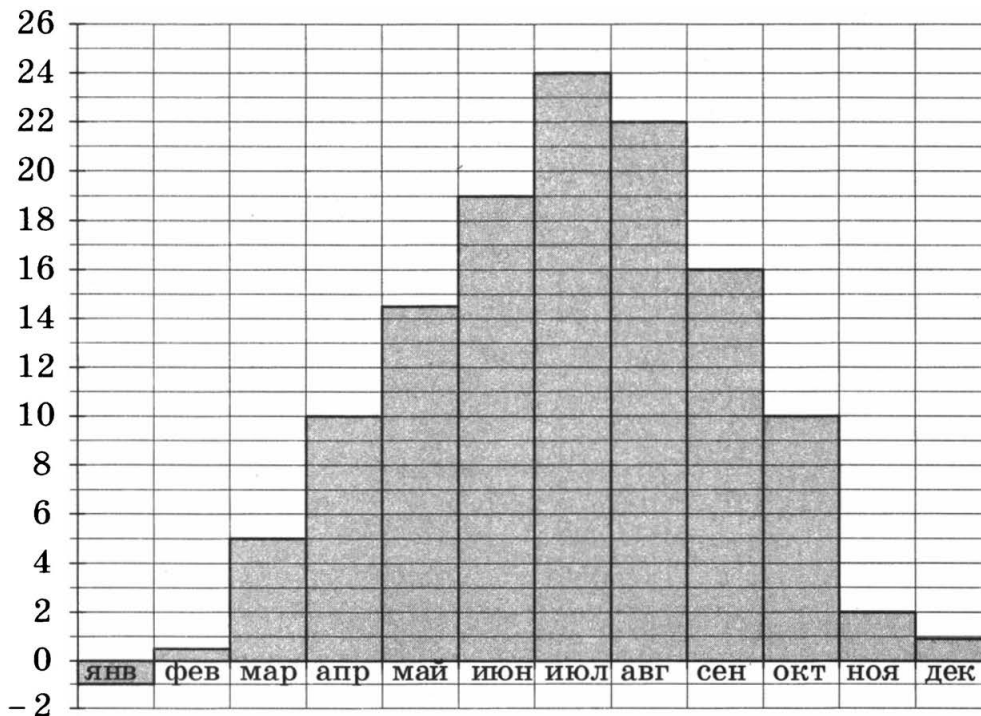
1

Теплоход рассчитан на 900 пассажиров и 25 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 50 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

Ответ: _____.

2

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в осенние месяцы 1988 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

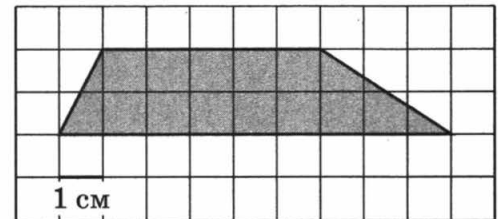
- 3 В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трёх городах России (по данным на начало 2010 года).

Наименование продукта	Воронеж	Ставрополь	Ярославль
Пшеничный хлеб (батон)	14	11	15
Молоко (1 л)	20	20	26
Картофель (1 кг)	13	13	9
Сыр (1 кг)	270	215	240
Говядина (1 кг)	240	230	230
Подсолнечное масло (1 л)	52	44	58

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 2 батона пшеничного хлеба, 3 кг говядины, 1 л подсолнечного масла. В ответе запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

Ответ: _____.

- 4 Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

- 5 В некоторой местности наблюдения показали:

1. Если июньское утро ясное, то вероятность дождя в этот день 0,1.
 2. Если июньское утро пасмурное, то вероятность дождя в течение дня равна 0,4.
 3. Вероятность того, что утро в июне будет пасмурным, равна 0,3.
- Найдите вероятность того, что в случайно взятый июньский день дождя не будет.

Ответ: _____.

- 6 Найдите корень уравнения $\sqrt{16-4x} = 6$.

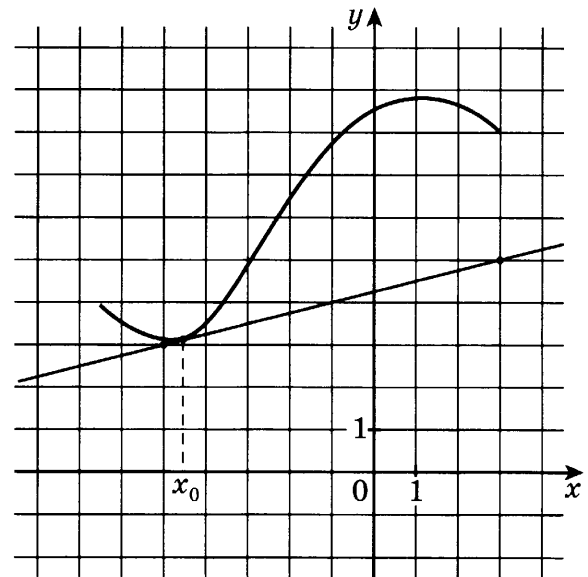
Ответ: _____.

- 7 В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 36° , угол CAD равен 25° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

8

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

9

Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 3,5. Найдите объём параллелепипеда.

Ответ: _____.

Часть 2

10

Найдите значение выражения $16\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: _____.

11

Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности I , оперативности S , объективности публикаций T , а также качества сайта Q . Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 5-балльной шкале целыми числами от 0 до 4.

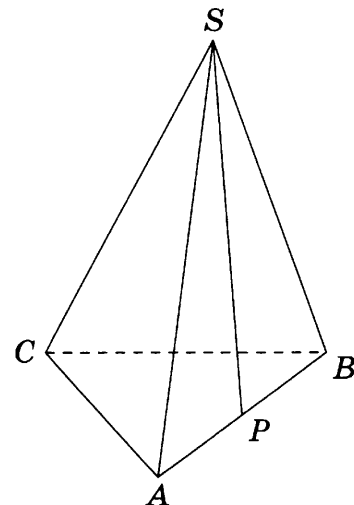
Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — вдвое дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{3I + S + 2T + Q}{A}.$$

Каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все оценки наибольшие, получило рейтинг 100?

Ответ: _____.

- 12 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ Q — середина ребра AB , S — вершина. Известно, что $BC = 7$, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 42. Найдите длину отрезка SQ .



Ответ: _____.

- 13 Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 30 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 2 часа 40 минут позже автомобилиста. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 14 Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 16x^2 + 64x + 7$ на отрезке $[7; 11]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos x = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-4\pi; -3\pi]$.

- 16 Радиус основания конуса равен 12, а высота конуса равна 5.

- а) Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и взаимно перпендикулярные образующие.
б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания конуса.

17 Решите неравенство $4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 64 \geq 0$.

18 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E , а окружность — в точке F , причём H — середина AE .

а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$ если известно, что $AB = 4$ и $AH = \sqrt{15}$.

19 Никита хочет взять в кредит 1,3 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Никита взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 300 тысяч рублей?

20 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$9a + \sqrt{15 + 2x - x^2} = ax + 4$$

имеет ровно два решения.

21 На доске написано более 45, но менее 63 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 18, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -9 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

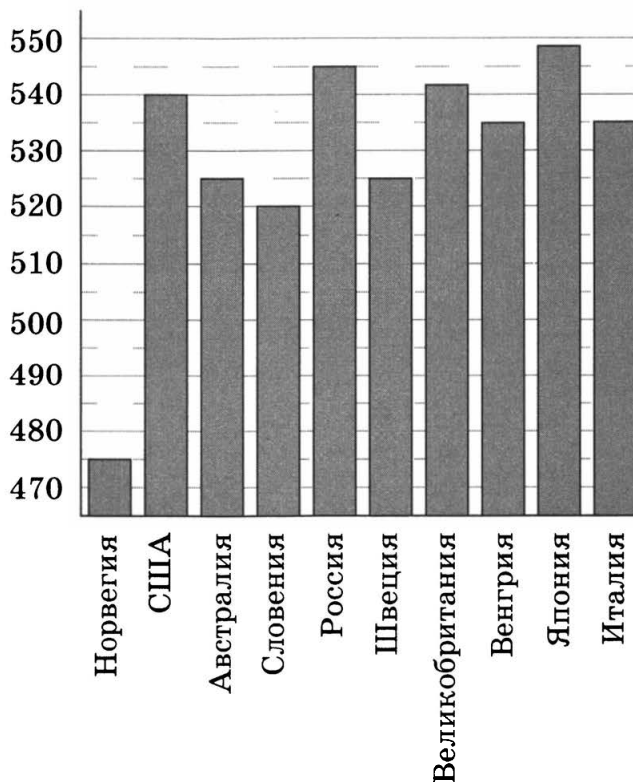
1

Чайные клиперы — самые быстрые парусные корабли. Некоторые из них могли развивать скорость до 20 узлов. Переведите в километры в час скорость клипера, который делает 15 узлов. 1 узел равняется 1 морской миле в час. 1 морская миля равняется 1852 метрам. Результат округлите до целого числа километров в час.

Ответ: _____.

2

На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 4-го класса по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл участников выше, чем в Венгрии.



Ответ: _____.

3

Независимое агентство определяет рейтинги новостных изданий на основе оценок информативности In , оперативности Op и объективности и правдивости Tr публикаций. Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 5-балльной шкале целыми числами от -2 до 2 . Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = \left(\frac{2In + Op + 3Tr}{6} + 2 \right) \cdot 25.$$

В таблице даны оценки каждого показателя для нескольких новостных сайтов. Определите, какой из сайтов имеет наивысший рейтинг. В ответе запишите значение этого рейтинга, округлённое до целого числа.

Сайт	Информативность	Оперативность	Объективность и правдивость
XYZ-news.ru	-2	1	2
bezvrak.com	2	-1	1
okak.ru	1	-2	1
Zhizni.net	-1	2	0

Ответ: _____.

4

Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

5

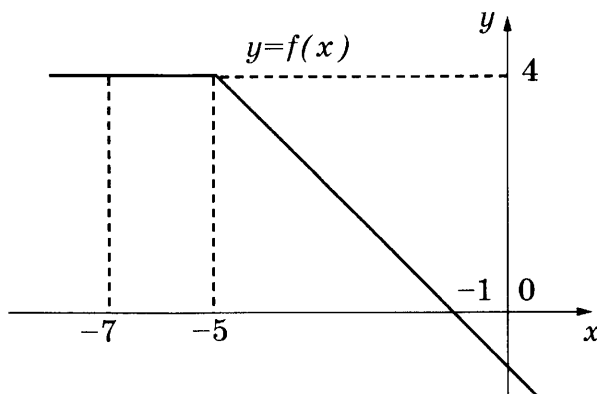
Родительский комитет закупил 30 пазлов для подарков детям на окончание учебного года, из них 12 с картинками известных художников и 18 с изображениями животных. Подарки распределяются случайным образом. Найдите вероятность того, что Вове достанется пазл с изображением животного.

Ответ: _____.

6 Найдите корень уравнения $\sqrt{x+15} = 2$.

Ответ: _____.

7 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = \frac{11}{14}$, $AC = 10\sqrt{3}$. Найдите AB .

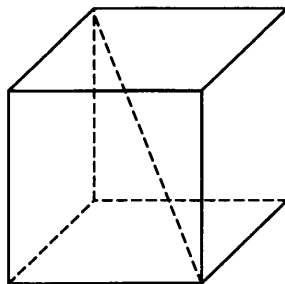


Ответ: _____.

8 На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определённый интеграл $\int_{-7}^{-1} f(x) dx$.

Ответ: _____.

9 Диагональ куба равна $\sqrt{48}$. Найдите его объём.



Ответ: _____.

Часть 2

10 Найдите значение выражения $6\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{7\pi}{3}$.

Ответ: _____.

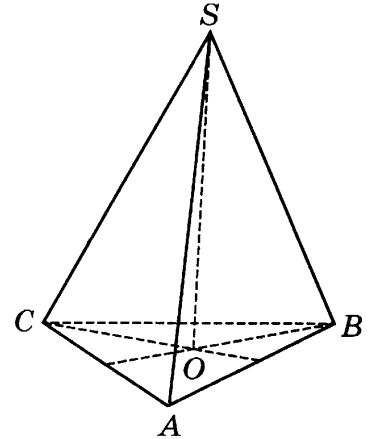
11

Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение (в вольтах), R — сопротивление электроприбора (в омах). В электросеть включён предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 5 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 В, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

12

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке O . Объём пирамиды равен 28, $OS = 12$. Найдите площадь треугольника ABC .



Ответ: _____.

13

Первая труба пропускает на 1 л воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 110 л она заполняет на 1 мин быстрее, чем первая труба?

Ответ: _____.

14

Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{-12 - 8x - x^2}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

а) Решите уравнение $\cos 2x - \cos x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

16 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 8. На ребре AC находится точка D , на ребре AB находится точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $CD = BE = AL = 2$.

- а) Докажите, что отрезок DE содержит центр основания пирамиды.
 б) Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E , D и L .

17 Решите $\log_{|x-1|}(x-2)^2 \leq 2$.

18 Внеписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

- а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на основание.
 б) Известно, что радиус этой окружности в 6 раз больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

19 Матвей хочет взять в кредит 1,4 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Матвей взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320 тысяч рублей?

20 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a + 5)^2 = |x + a + 5| + |x - a - 5|$$

имеет ровно три корня.

21 Назовём натуральное число палиндромом, если в его десятичной записи все цифры расположены симметрично (совпадают первая и последняя цифры, вторая и предпоследняя, и т.д.). Например, числа 121 и 953359 являются палиндромами, а числа 10 и 953953 не являются палиндромами.

- а) Приведите пример числа-палиндрома, которое делится на 45.
 б) Сколько существует пятизначных чисел-палиндромов, делящихся на 45?
 в) Найдите десятое по величине число-палиндром, которое делится на 45.

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

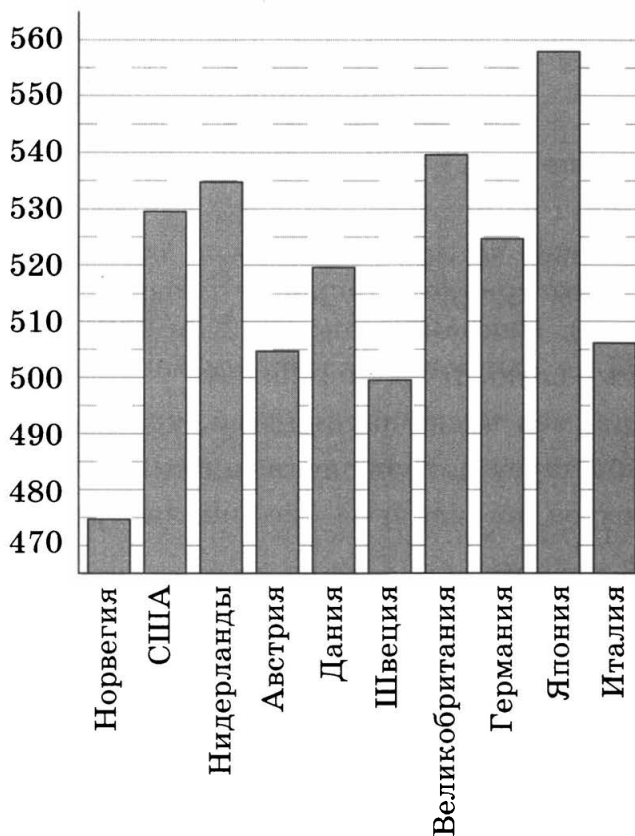
1

В летнем лагере на каждого участника полагается 40 г сахара в день. В лагере 160 человек. Сколько килограммовых пачек сахара понадобится на весь лагерь на 6 дней?

Ответ: _____.

2

На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 4-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран первое место принадлежит Японии, десятое место — Норвегии. Определите, какое место занимает Дания.



Ответ: _____.

3

Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяжённостью 600 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

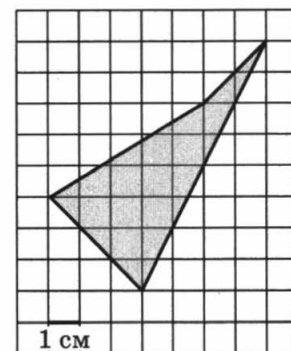
Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	5	3600
Б	Бензин	7	3200
В	Газ	8	3200

Цена дизельного топлива — 19 руб. за литр, бензина — 20,5 руб. за литр, газа — 16,5 руб. за литр.

Ответ: _____.

4

Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

5

В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,2. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Ответ: _____.

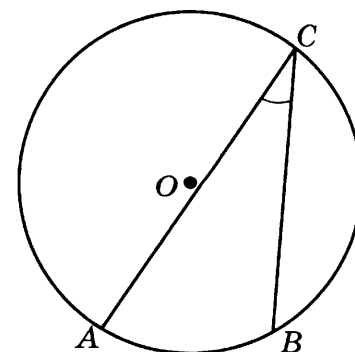
6

Найдите корень уравнения $\sqrt{2x + 29} = 13$.

Ответ: _____.

7

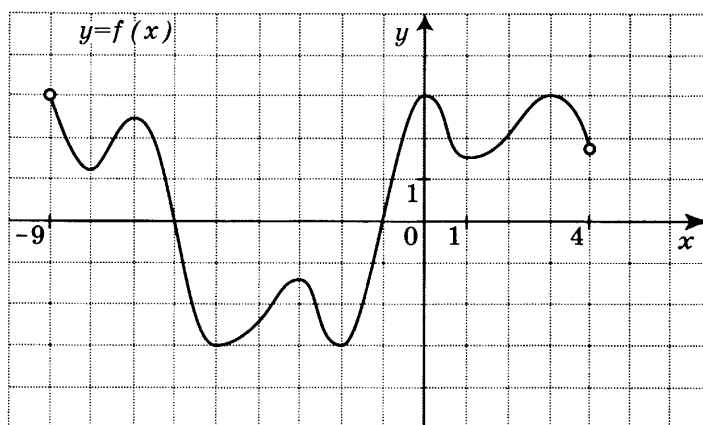
Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{2}{5}$ окружности.



Ответ: _____.

8

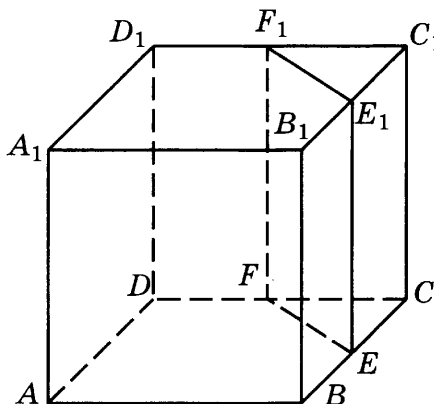
На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 4)$. Найдите сумму абсцисс точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ: _____.

9

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E , F , E_1 и F_1 являются серединами рёбер BC , DC , $B_1 C_1$ и $D_1 C_1$ соответственно. Объём призмы, отсекаемой от куба плоскостью EFF_1 равен 8. Найдите объём куба.



Ответ: _____.

Часть 2

10

Найдите значение выражения $\frac{\log_3 13}{\log_{81} 13}$.

Ответ: _____.

11

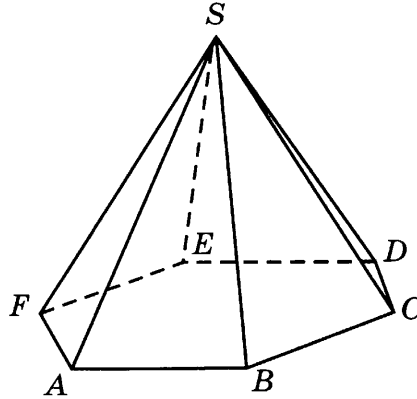
Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение (в вольтах), R — сопротивление электроприбора (в омах).

В электросеть включён предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 16 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 В, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

12

Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно 12 и наклонено к плоскости основания под углом 60° . Найдите сторону основания пирамиды.



Ответ: _____.

13

Первая труба пропускает на 4 л воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 1020 л она заполняет на 4 мин быстрее, чем первая труба?

Ответ: _____.

14

Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 8)^3 - 3x$ на отрезке $[-7,5; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

а) Решите уравнение $\cos 4x + \cos 2x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right]$.

16

Вокруг единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ описана сфера. На ребре $B_1 C_1$ взята точка M так, что плоскость, проходящая через точки A , B , и M , образует угол 75° с плоскостью ABC .

а) Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки A , B и M .

б) Найдите длину линии пересечения плоскости сечения и сферы.

17

Решите неравенство $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 \geq 0$.

18 Отрезок, соединяющий середины M и N оснований соответственно BC и AD трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 2, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 6. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

19 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 9 599 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Дмитрий выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

20 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$\|x + 2a| - 3a| + \|3x - a| + 4a| \leq 7x + 24$$

выполняется для всех значений $x \in [0; 7]$.

21 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 12 раз больше, либо в 12 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 4900.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

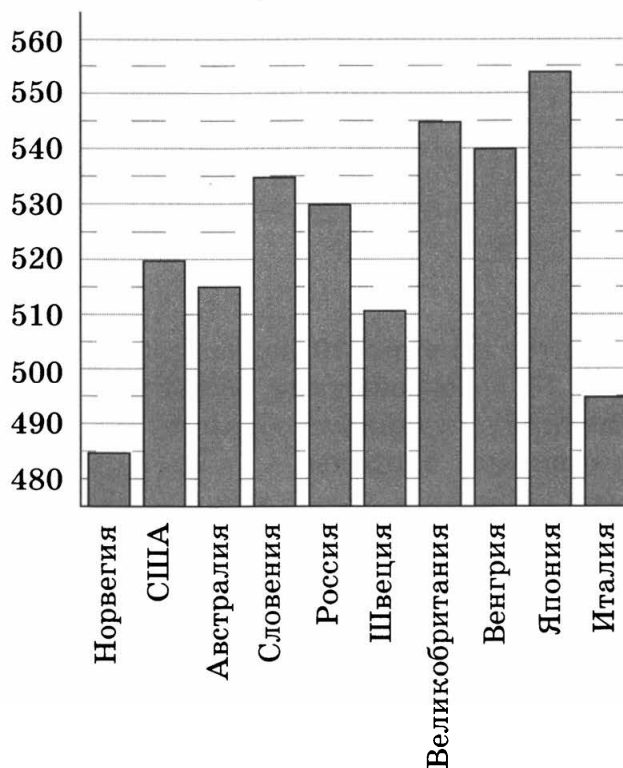
1

Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 14% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,05 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку весом 8 кг в течение суток?

Ответ: _____.

2

На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл отличается от среднего балла российских участников не больше чем на 15 (саму Россию не считайте).



Ответ: _____.

3

Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяжённостью 600 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

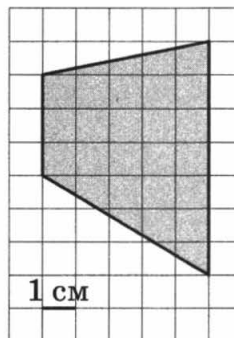
Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	4	3600
Б	Бензин	9	3000
В	Газ	10	3300

Цена дизельного топлива — 16 руб. за литр, бензина — 21 руб. за литр, газа — 14,5 руб. за литр.

Ответ: _____.

4

Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

5

Родительский комитет закупил 30 пазлов для подарков детям на окончание учебного года, из них 15 с персонажами мультфильмов и 15 с видами природы. Подарки распределяются случайным образом. Найдите вероятность того, что Вите достанется пазл с видами природы.

Ответ: _____.

6

Решите уравнение $\sqrt{\frac{1}{6-5x}} = \frac{1}{6}$.

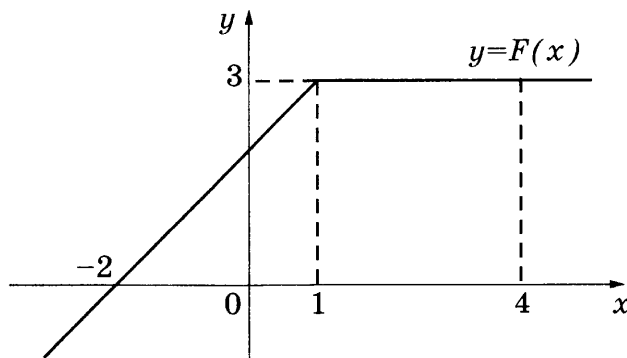
Ответ: _____.

7 Сумма трёх углов выпуклого четырёхугольника равна 325° . Найдите его четвёртый угол.

Ответ: _____.

8 На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком,

вычислите определённый интеграл $\int_{-2}^4 f(x)dx$.



Ответ: _____.

9 В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 5. Боковые рёбра равны $\frac{9}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

Ответ: _____.

Часть 2

10 Найдите значение выражения $\frac{2\sqrt{7} + \sqrt{63} - \sqrt{175}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$.

Ответ: _____.

11 Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности I , оперативности S , объективности публикаций T , а также качества сайта Q . Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 5-балльной шкале целыми числами от 0 до 4.

Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — вдвое дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

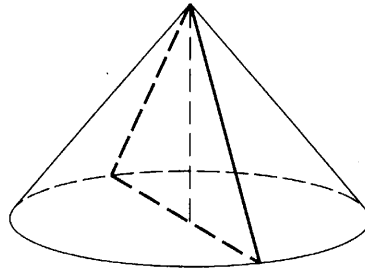
$$R = \frac{3I + S + 2T + Q}{A}.$$

Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

Ответ: _____.

12

Высота конуса равна 15, а длина образующей — 17. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.



Ответ: _____.

13

Первая труба пропускает на 1 л воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 870 л она заполняет на 1 мин быстрее, чем первая труба?

Ответ: _____.

14

Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+3)^7 - 7x$ на отрезке $[-2,5; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

а) Решите уравнение $\left((0,04)^{\sin x}\right)^{\cos x} = 5^{-\sqrt{3}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

16

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC все рёбра равны 6.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину S и перпендикулярной отрезку, соединяющему середины рёбер AB и BC .

б) Найдите расстояние от плоскости этого сечения до центра грани SAB .

17

Решите $\log_{|x|}(x-1)^2 \leq 2$.

18

Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 10 и 13 соответственно.

- а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.
- б) Найдите длину отрезка этой средней линии, заключённого внутри окружности.

19

1 января 2015 года Павел Витальевич взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Павел Витальевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Павел Витальевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 125 тыс. рублей?

20

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{24 - 2x - x^2} = 5a + 5$$

имеет более одного решения.

21

Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 15 раз больше, либо в 15 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 8959.

- а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
- б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
- в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

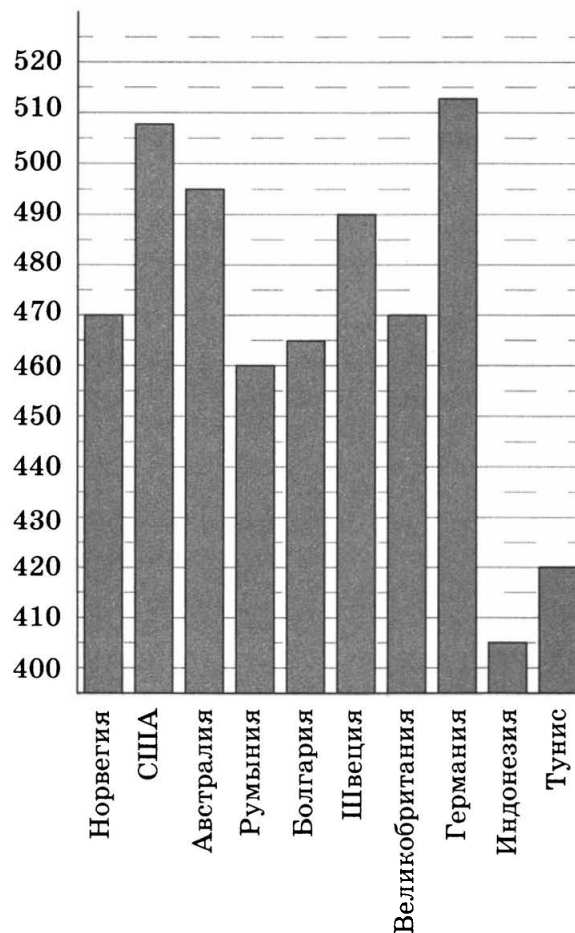
1

Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 8%. Книга стоит 575 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

Ответ: _____.

2

На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл отличается от среднего балла норвежских участников менее чем на 15 (саму Норвегию не считайте).



Ответ: _____.

3

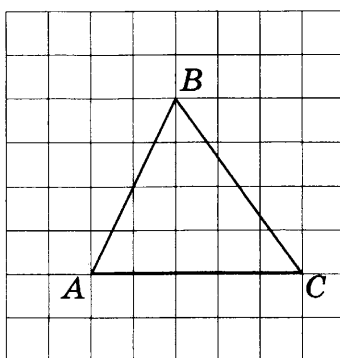
В среднем гражданин А. в дневное время расходует 110 кВт·ч электроэнергии в месяц, а в ночное время — 155 кВт·ч электроэнергии. Раньше у А. в квартире был установлен одностарифный счётчик, и всю электроэнергию он оплачивал по тарифу 2,2 руб. за 1 кВт·ч. Год назад А. установил двухтарифный счётчик, при этом дневной расход электроэнергии оплачивается по тарифу 2,2 руб. за 1 кВт·ч, а ночной расход оплачивается по тарифу 0,8 руб. за 1 кВт·ч.

В течение 12 месяцев режим потребления и тарифы оплаты электроэнергии не менялись. На сколько больше заплатил бы А. за этот период, если бы не поменял счётчик? Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____.

4

На клетчатой бумаге с размером клеток 1 см × 1 см изображён треугольник ABC . Найдите высоту, проведённую из вершины A .



Ответ: _____.

5

В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,4. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Ответ: _____.

6

Найдите корень уравнения $\sqrt{5x+10} = 10$.

Ответ: _____.

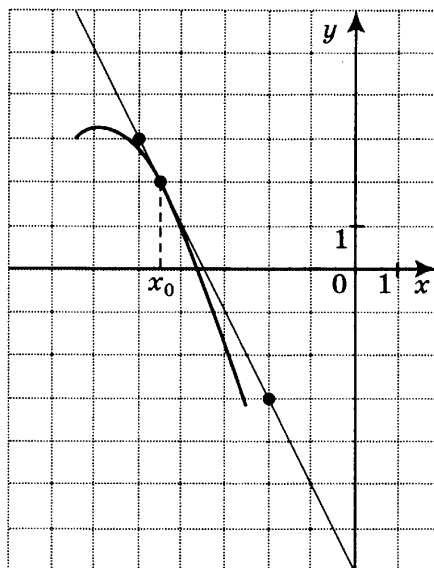
7

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = \frac{8}{21}$, $AC = \sqrt{377}$. Найдите AB .

Ответ: _____.

8

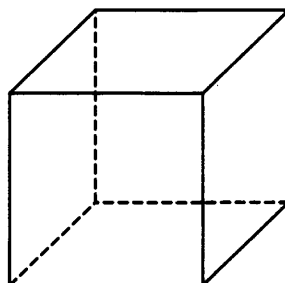
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

9

Если каждое ребро куба увеличить на 3, то его объём увеличится на 387. Найдите ребро куба.



Ответ: _____.

Часть 2

10

Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{392^2 - 388^2}}{\sqrt{195}}$.

Ответ: _____.

11

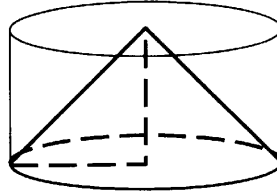
Автомобиль разгоняется с места с постоянным ускорением $a = 0,2 \text{ м/с}^2$ и через некоторое время достигает скорости $v = 10 \text{ м/с}$. Какое расстояние к этому моменту прошёл автомобиль? Ответ выразите в метрах.

Скорость v , пройденный путь l , время разгона t и ускорение a связаны соотношениями

$$v = at, l = \frac{at^2}{2}.$$

Ответ: _____.

- 12 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $22\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



Ответ: _____.

- 13 Первая труба пропускает на 4 л воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 672 л она заполняет на 4 мин быстрее, чем первая труба?

Ответ: _____.

- 14 Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+3)^2 - 2x$ на отрезке $[-2,5; 0]$.

Ответ: _____.

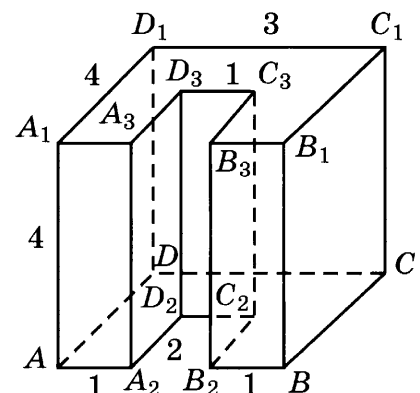
Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $\cos 4x - \sin 2x = 0$.
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

- 16 На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы которого прямые.

- а) Постройте сечение многогранника плоскостью, проходящей через точки A , B и C_1 .
б) Найдите площадь этого сечения.



17 Решите неравенство $3^x + 8 \cdot 3^{-x} \geq 9$.

18 Отрезок, соединяющий середины M и N оснований соответственно BC и AD трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 4, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 14. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

19 31 декабря 2014 года Ярослав взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Ярослав переводит в банк 2 132 325 рублей. Какую сумму взял Ярослав в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

20 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$\|x - 2a| + 3a| + \|3x + a| - 4a| \leq 5x + 24$$

выполняется для всех значений $x \in [0; 6]$.

21 Первый набор чисел состоит из чисел 2, 4, 8, ... 2^{10} . Второй набор состоит из чисел 3, 9, 27, ... 3^{10} . Числа разбили на пары. В каждой паре на первом месте — число из первого набора, а на втором — какое-то число из второго. В каждой паре два числа умножили друг на друга и полученные произведения сложили. Найдите наименьшее возможное значение полученной суммы.

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

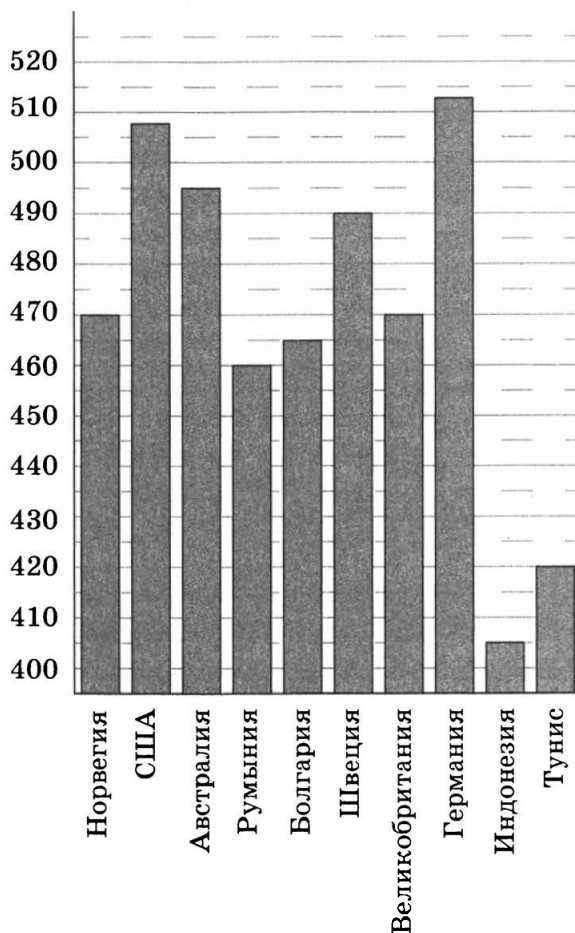
1

На счету Ленинского мобильного телефона было 72 рубля, а после разговора с Русланом осталось 9 рублей. Сколько минут длился разговор с Русланом, если одна минута разговора стоит 3 рубля.

Ответ: _____.

2

На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран первое место принадлежит Германии. Определите, какое место занимает Швеция.



Ответ: _____.

3

Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяжённостью 600 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

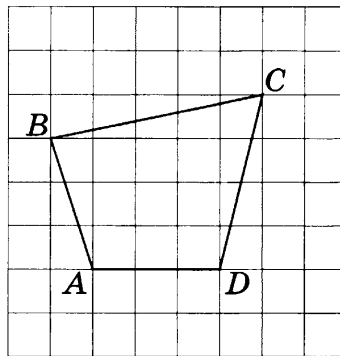
Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	4	3500
Б	Бензин	7	3000
В	Газ	11	3000

Цена дизельного топлива — 18 руб. за литр, бензина — 18,5 руб. за литр, газа — 14,5 руб. за литр.

Ответ: _____.

4

На клетчатой бумаге с размером клеток 1 см × 1 см изображён четырёхугольник $ABCD$. Найдите диагональ BD .



Ответ: _____.

5

Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,6. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,4. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

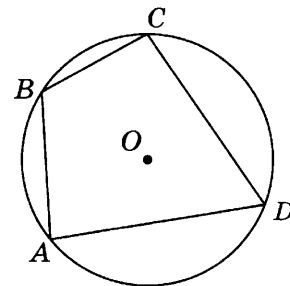
Ответ: _____.

6

Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{4}{3x-17}} = \frac{1}{2}$.

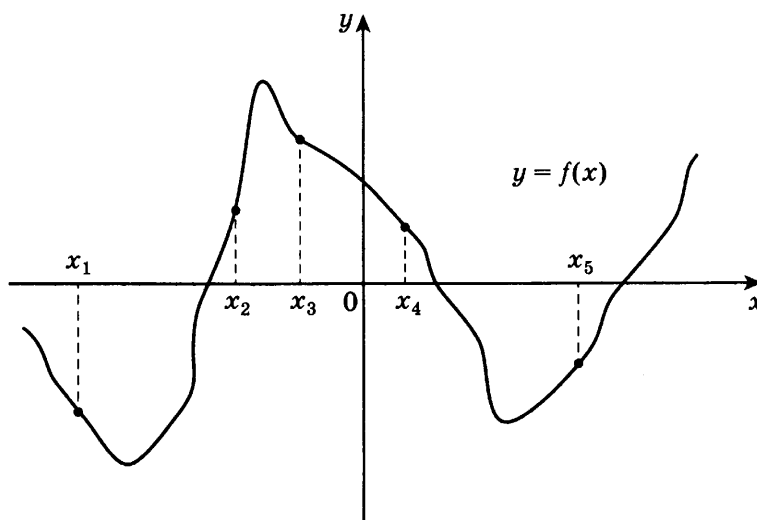
Ответ: _____.

- 7 Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 103° и 131° . Найдите меньший из оставшихся углов.



Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди пяти точек x_1 , x_2 , x_3 , x_4 и x_5 те, в которых производная функции $f(x)$ положительна. В ответе запишите количество найденных точек.



Ответ: _____.

- 9 В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 3. Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

Ответ: _____.

Часть 2

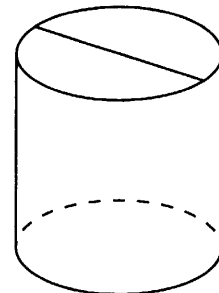
- 10 Найдите значение выражения $\frac{\log_4 11}{\log_{64} 11}$.

Ответ: _____.

- 11 Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение (в вольтах), R — сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включён предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 11 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 В, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

- 12 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 15π , а диаметр основания равен 5. Найдите высоту цилиндра.



Ответ: _____.

- 13 Путешественник переплыл океан на яхте со средней скоростью 30 км/ч. Обрато он летел на самолёте со скоростью 570 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 14 Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+6)^9 - 9x$ на отрезке $[-5,5; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $\left((0,25)^{\sin x}\right)^{\cos x} = 2^{-\sqrt{2}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

- 16 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 5. На ребре AC находится точка D , на ребре AB находится точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $AD = AE = AL = 4$.

а) Докажите, что отрезок DE содержит центр основания пирамиды.

б) Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E , D и L .

- 17 Решите неравенство $\log_2(4^x + 81^x - 4 \cdot 9^x + 3) \geq 2x$.

18 Отрезок, соединяющий середины M и N оснований соответственно BC и AD трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 4, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 10. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

19 Олег хочет взять в кредит 1,2 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Олег взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 280 тысяч рублей?

20 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x - a + 3| = |x + a - 3| - (a - 3)^2$$

имеет нечётное число корней.

21 Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны все члены последовательности $a_n = 20^{bn}$, где b — целое неотрицательное. В результате получается рациональное число. Найдите это число.

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

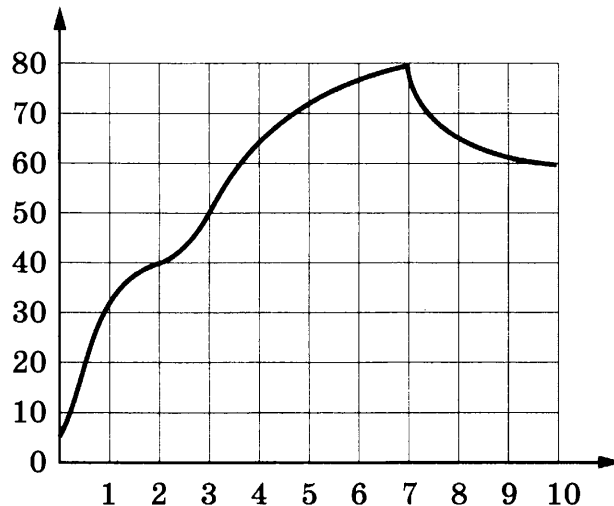
1

Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3300 рублей. До установки счётчиков за воду платили 800 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 400 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

Ответ: _____.

2

На графике показано изменение температуры в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На горизонтальной оси отмечено время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на вертикальной оси — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, до скольких градусов Цельсия двигатель нагрелся за первые 3 минуты с момента запуска.



Ответ: _____.

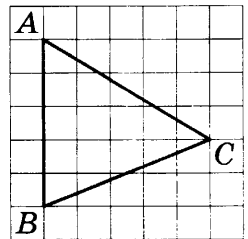
- 3 Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата (в месяц)	Плата за 1 минуту разговора
«Повременный»	Нет	0,5 руб.
«Комбинированный»	170 руб. за 360 мин.	0,4 руб. (сверх 360 мин. в месяц)
«Безлимитный»	295 руб.	Нет

Абонент предполагает, что общая длительность разговоров составит 500 минут в месяц, и, исходя из этого, выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей должен будет заплатить абонент за месяц, если общая длительность разговоров действительно будет равна 500 минутам?

Ответ: _____.

- 4 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB .



Ответ: _____.

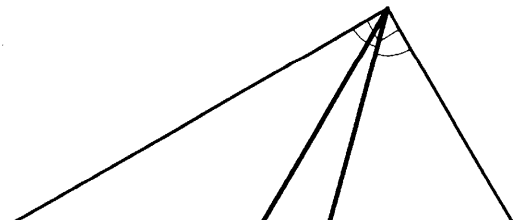
- 5 В сборнике билетов по химии всего 15 билетов, в 6 из них встречается вопрос по теме «Кислоты». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Кислоты».

Ответ: _____.

- 6 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} = 8^x$.

Ответ: _____.

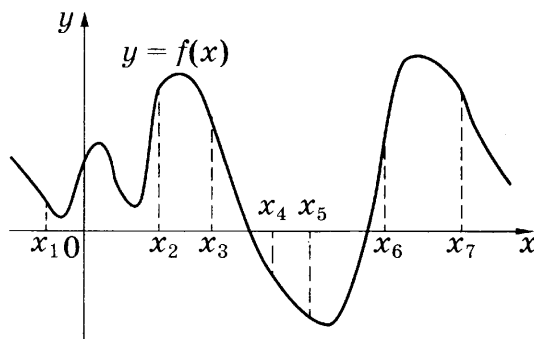
- 7 Угол между биссектрисой и медианой прямо-угольного треугольника, проведёнными из вершины прямого угла, равен 19° . Найдите меньший угол прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

8

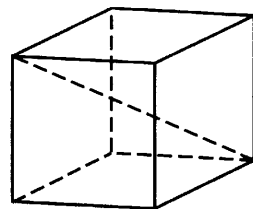
На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены семь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Ответ: _____.

9

Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 1,5. Найдите объём куба.



Ответ: _____.

Часть 2

10

Найдите значение выражения $\log_5 2 \cdot \log_2 125$.

Ответ: _____.

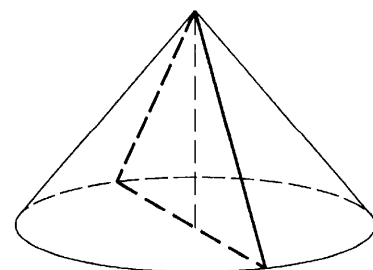
11

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 3000$ км/ч². Скорость v вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь. Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 60 км/ч.

Ответ: _____.

12

Площадь основания конуса равна 36л, высота — 10. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.



Ответ: _____.

- 13 Имеется два сплава. Первый содержит 5% никеля, второй — 25% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 250 кг, содержащий 20% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Ответ: _____.

- 14 Найдите наименьшее значение функции $y = (x^2 - 39x + 39) \cdot e^{2-x}$ на отрезке $[0; 6]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

- 16 Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 7. На окружности основания конуса выбраны точки A и B , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1:2.

- а) Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через точки A , B и P .
б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP .

- 17 Решите неравенство $4^{x-\frac{1}{2}} - 17 \cdot 2^{x-2} + 2 \leq 0$.

- 18 Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O . На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$.

- а) Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.
б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$, если $\cos \angle BAC = \frac{5}{13}$, а $BC = 72$.

19

31 декабря 2014 года Тимофей взял в банке 7 007 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг Тимофей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

20

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\left((a-1)x^2+3x\right)^2-2\left((a-1)x^2+3x\right)+1-a^2=0$$

имеет ровно два решения.

21

На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 15 посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным 41?

б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трёх футболистов. Могло ли быть так, что все три футболиста получили разное число голосов, но их рейтинги одинаковы?

в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 3. Это число не изменилось и после того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста. При каком наименьшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

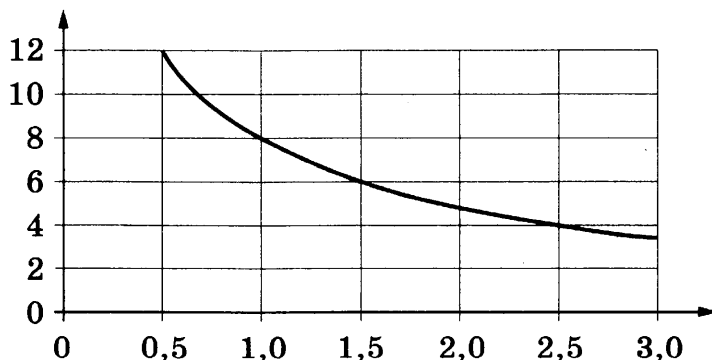
1

Больному прописано лекарство, которое нужно принимать по 0,25 г 5 раз в день в течение 14 дней. В одной упаковке 20 таблеток лекарства по 0,25 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

Ответ: _____.

2

Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя: чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На графике показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На горизонтальной оси отмечено сопротивление в омах, на вертикальной оси — сила тока в амперах. Определите по графику, сколько ампер составляет сила тока в цепи при сопротивлении 1,5 Ом.



Ответ: _____.

3

От дома до дачи можно добраться одним из трёх видов транспорта: автобусом, электричкой или маршрутным такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути для каждого вида транспорта.

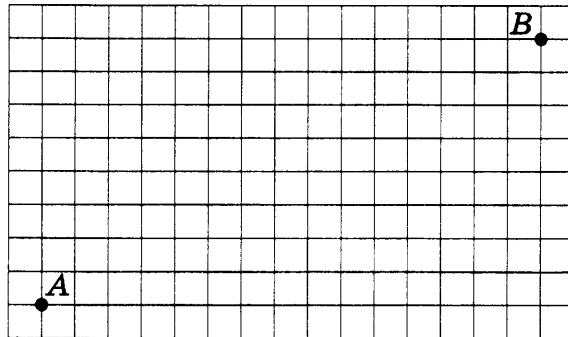
Транспорт	От дома до остановки (станции)	В пути	От остановки (станции) до дачи
Автобус	10 мин.	1 ч 20 мин.	30 мин.
Электричка	20 мин.	55 мин.	45 мин.
Маршрутное такси	5 мин.	1 ч 10 мин.	35 мин.

Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в минутах.

Ответ: _____.

4

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A и B . Найдите длину отрезка AB .



Ответ: _____.

5

Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 бадминтонистов, среди которых 22 спортсмена из России, в том числе Виктор Поляков. Найдите вероятность того, что в первом туре Виктор Поляков будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

Ответ: _____.

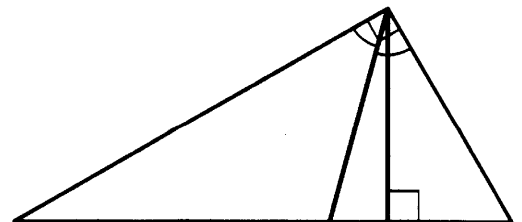
6

Найдите корень уравнения $\sqrt{34-9x} = 4$.

Ответ: _____.

7

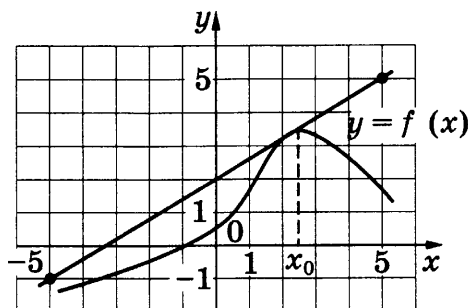
В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 14° . Найдите меньший угол прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

8

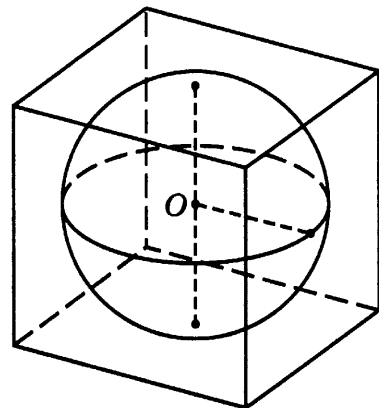
На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

9

Куб описан около сферы радиуса 2. Найдите объём куба.



Ответ: _____.

Часть 2

10

Найдите значение выражения $\sqrt{32} - \sqrt{128} \sin^2 \frac{9\pi}{8}$.

Ответ: _____.

11

Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R = r_{\text{пок}} \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)^m}$, где

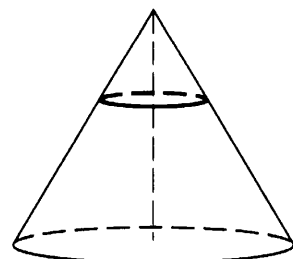
$m = \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}$, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка мага-

зина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 8, их средняя оценка равна 0,22, а оценка экспертов равна 0,28.

Ответ: _____.

12

Площадь основания конуса равна 48. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 4 и 12, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.



Ответ: _____.

- 13 Смешали некоторое количество 11-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 15-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: _____.

- 14 Найдите наибольшее значение функции $y = (x - 27) \cdot e^{28 - x}$ на отрезке $[23; 40]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

- 16 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 8. На ребре AC находится точка D , на ребре AB находится точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $CD = BE = LA = 2$.

- а) Докажите, что отрезок DE содержит центр основания пирамиды.
б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E , D и L .

- 17 Решите неравенство $\log_{3x-5}(2x^2 - 9x + 10) \geq 0$.

- 18 В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH . Из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры NK и NM соответственно.

- а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC .
б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 3$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 4.

19

31 декабря 2014 года Александр взял в банке 5 916 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Александр переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Александр выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

20

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(\log_5(x+3) - \log_5(x-3))^2 - 7(\log_5(x+3) - \log_5(x-3)) - 4a^2 - 6a + 10 = 0$$

имеет ровно два решения.

21

Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

- а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{30}$?
- б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{35}$?
- в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

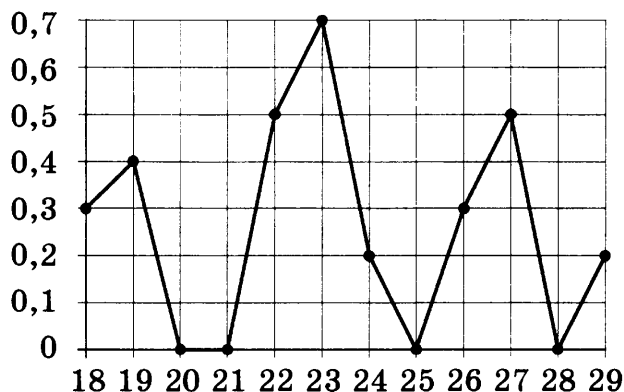
1

Иван Павлович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 22 мили в час? Считайте, что 1 миля равна 1609 м. Ответ округлите до целого числа.

Ответ: _____.

2

На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Якутске с 18 по 29 октября 1986 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода в Якутске выпало более 0,1 миллиметра осадков.

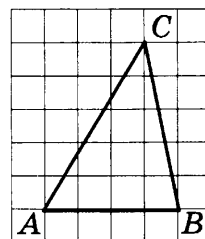


Ответ: _____.

- 3 При строительстве сельского дома можно использовать один из двух типов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 9 тонн природного камня и 13 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 8 тонн щебня и 57 мешков цемента. Тонна камня стоит 1700 рублей, щебень стоит 700 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 220 рублей. Сколько рублей будет стоить материал для фундамента, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

Ответ: _____.

- 4 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB .



Ответ: _____.

- 5 В среднем из 1500 садовых насосов, поступивших в продажу, 6 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Ответ: _____.

- 6 Найдите корень уравнения $\sqrt{54+3x} = 6$.

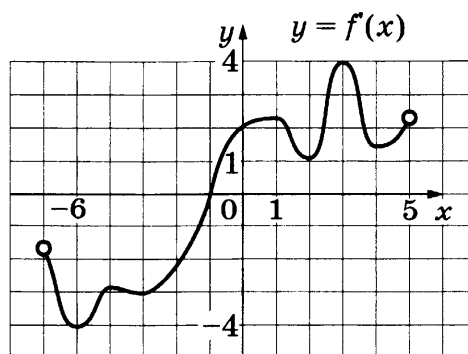
Ответ: _____.

- 7 Один угол параллелограмма больше другого на 52° . Найдите больший угол. Ответ дайте в градусах.



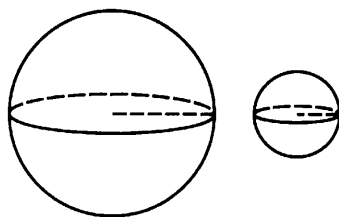
Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-5; -1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: _____.

- 9 Дано два шара. Радиус первого шара в 2 раза больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



Ответ: _____.

Часть 2

- 10 Найдите значение выражения $7\sqrt{2} \sin \frac{15\pi}{8} \cdot \cos \frac{15\pi}{8}$.

Ответ: _____.

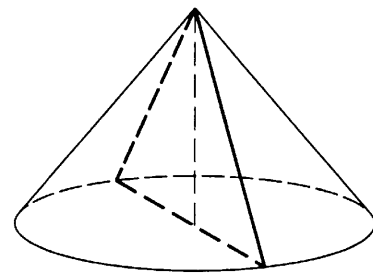
- 11 Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)^m}$, где

$$m = \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}, \quad r_{\text{пок}} \text{ — средняя оценка магазина покупателями, } r_{\text{экс}} \text{ — оценка мага-$$

зина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 26, их средняя оценка равна 0,68, а оценка экспертов равна 0,41.

Ответ: _____.

- 12 Высота конуса равна 40, а длина образующей — 58. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.



Ответ: _____.

- 13 Дорога между пунктами А и В состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 25 км. Путь из А в В занял у туриста 6 часов, из которых 1 час ушёл на спуск. Найдите скорость туриста на спуске, если она больше скорости на подъёме на 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

14 Найдите точку минимума функции $y = 15x - 2\ln(x-3)^3 + 6$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15 а) Решите уравнение $2\sin^2(x+\pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

16 Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1:3.

а) Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через точки A , B и P .

б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP .

17 Решите неравенство $25^{x-\frac{1}{2}} - 26 \cdot 5^{x-1} + 5 \geq 0$.

18 Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

а) Докажите, что $\angle ANB_1 = \angle ACB$.

б) Найдите BC , если $AH = 8\sqrt{3}$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

19 31 декабря 2014 года Виктор взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Виктор переводит очередной транш. Виктор выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 620 тыс. рублей, во второй — 560 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Виктору?

20 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(|x+1|+|x-a|)^2 - 2(|x+1|+|x-a|) + 4a(1-a) = 0$$

имеет ровно два решения.

21

На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

- а) Всего проголосовало 13 посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным 29?
- б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трёх футболистов. Могла ли сумма рейтингов быть больше 100?
- в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 7. Это число не изменилось и после того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста. При каком наименьшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

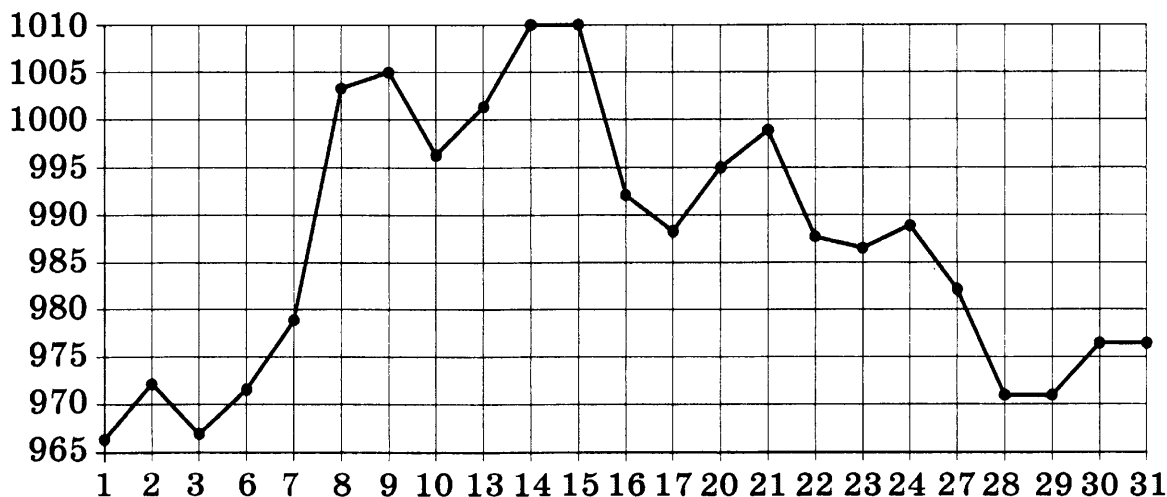
1

В пачке 250 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 900 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 8 недель?

Ответ: _____.

2

На рисунке жирными точками показана цена золота, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2009 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена золота в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена золота впервые поднялась выше 1000 рублей за грамм.



Ответ: _____.

3

Для группы иностранных гостей требуется купить 10 путеводителей. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Цена путеводителя и условия доставки всей покупки приведены в таблице.

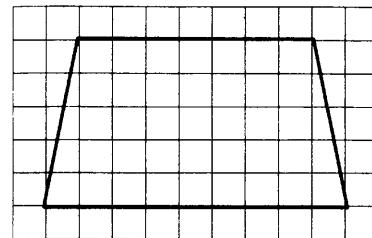
Интернет-магазин	Цена путеводителя (руб. за шт.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	281	250	Нет
Б	302	200	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 2000 руб.
В	292	300	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 4000 руб.

Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвый вариант покупки с доставкой?

Ответ: _____.

4

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



Ответ: _____.

5

Фабрика выпускает сумки. В среднем 19 сумок из 160 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов. Результат округлите до сотых.

Ответ: _____.

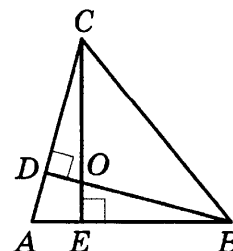
6

Найдите корень уравнения $\frac{1}{5x+8} = \frac{1}{3}$.

Ответ: _____.

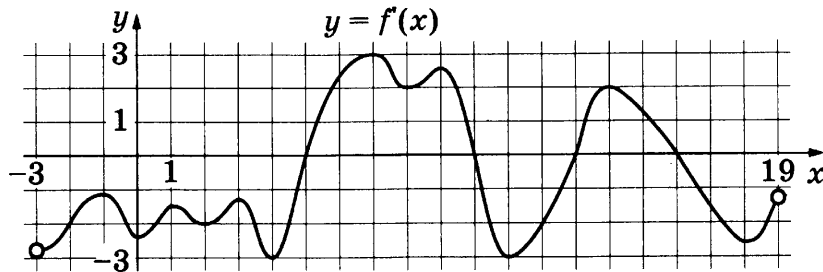
7

В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 78° , BD и CE — высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.



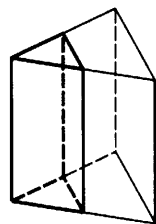
Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 19)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 17]$.



Ответ: _____.

- 9 Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 48, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.



Ответ: _____.

Часть 2

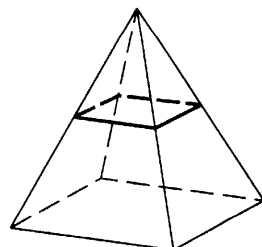
- 10 Найдите значение выражения $\sqrt{128} \cos^2 \frac{7\pi}{8} - \sqrt{32}$.

Ответ: _____.

- 11 Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\text{п}} = 25^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_{\text{в}} = 57^\circ\text{C}$. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается до температуры T , причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$, где $c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,4$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 56 м.

Ответ: _____.

- 12 В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 2. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.



Ответ: _____.

- 13 Имеется два сплава. Первый содержит 5% меди, второй — 11% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 8 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: _____.

- 14 Найдите точку максимума функции $y = x^2 - 28x + 96 \ln x - 3$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $2\sin^2 x - \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

- 16 В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC , ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MA равно 5. На ребре AC находится точка D , на ребре AB находится точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $AD = AL = 2$ и $BE = 1$.

а) Постройте сечение пирамиды $LAED$ плоскостью, проходящей через точку L и перпендикулярное ребру DE .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E , D и L .

- 17 Решите неравенство $x \cdot \log_5(3 + x - x^2) \geq 0$.

- 18 Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

а) Докажите, что $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$.

б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC , до стороны BC , если $B_1C_1 = 10\sqrt{3}$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

19

1 января 2015 года Александр Дмитриевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем Александр Дмитриевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Дмитриевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

20

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(ax^2 - 2x)^2 + (a^2 - a + 2)(ax^2 - 2x) - a^2(a - 2) = 0$$

имеет ровно два решения.

21

На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 7 до 27 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?

б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?

в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k ?

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

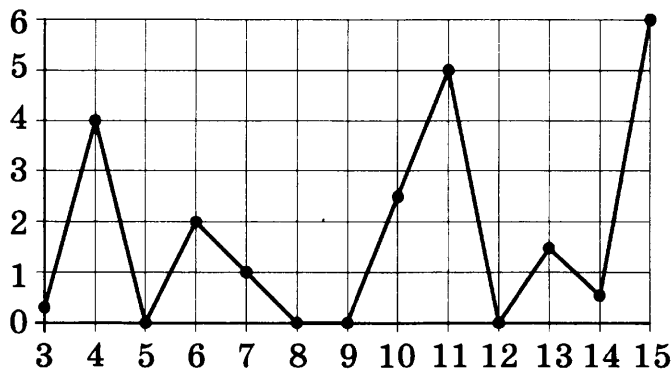
1

Пачка сливочного масла стоит 46 рублей. Пенсионерам магазин делает скидку 5%. Сколько рублей стоит пачка масла для пенсионера?

Ответ: _____.

2

На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшее суточное количество осадков, выпадавших в Казани в период с 6 по 13 февраля. Ответ дайте в миллиметрах.



Ответ: _____.

- 3 Клиент хочет арендовать автомобиль на двое суток для поездки протяжённостью 800 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды.

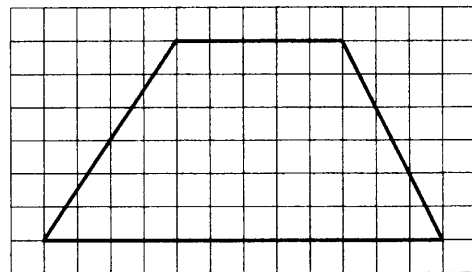
Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	7	3100
Б	Бензин	8	3300
В	Газ	9	2700

Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Цена дизельного топлива — 21 рубль за литр, бензина — 25 рублей за литр, газа — 16 рублей за литр.

Сколько рублей заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

Ответ: _____.

- 4 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



Ответ: _____.

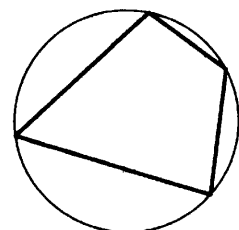
- 5 Научная конференция проводится в 3 дня. Всего запланировано 40 докладов — в первый день 8 докладов, остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Ответ: _____.

- 6 Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x-6} = 2$.

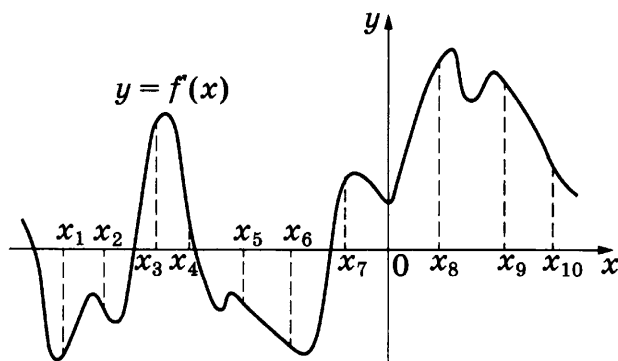
Ответ: _____.

- 7 Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 56° и 77° . Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



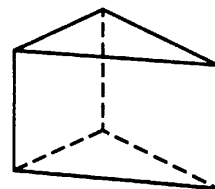
Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечено десять точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



Ответ: _____.

- 9 Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник с катетами 5 и 2, боковое ребро призмы равно 12. Найдите объём призмы.



Ответ: _____.

Часть 2

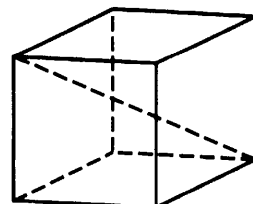
- 10 Найдите значение выражения $\frac{\left(4^{\frac{4}{7}} \cdot 9^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{36^{12}}$.

Ответ: _____.

- 11 Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому $P = \sigma ST^4$, где P — мощность излучения звезды, $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды, а T — температура. Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{625} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а мощность её излучения равна $5,7 \cdot 10^{25} \text{ Вт}$. Найдите температуру этой звезды в градусах Кельвина.

Ответ: _____.

- 12 Диагональ куба равна $\sqrt{12}$. Найдите его объём.



Ответ: _____.

- 13 Имеется два сплава. Первый содержит 5% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 100 кг, содержащий 20% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Ответ: _____.

- 14 Найдите точку максимума функции $y = 1,5x^2 - 51x + 216 \ln x + 3$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $2 \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

- 16 Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1:5.

- а) Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через точки A , B и P .
б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP .

- 17 Решите неравенство $4^{x^2+x-3} - 0,5^{2x^2-6x-2} \leq 0$.

- 18 Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

- а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.
б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 4 и 36.

19

31 декабря 2014 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14%), затем Андрей переводит в банк 3703860 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

20

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(|x - 9| - |x - a|)^2 - 9a(|x - 9| - |x - a|) + 8a^2 + 28a - 16 = 0$$

имеет ровно два решения.

21

Из 40 последовательных нечётных чисел $1, 3, 5, \dots, 79$ выбрали 7 различных чисел, которые записали в порядке возрастания. Пусть A — четвёртое по величине среди этих чисел, а B — среднее арифметическое выбранных семи чисел.

а) Может ли $B - A$ равняться $\frac{2}{7}$?

б) Может ли $B - A$ равняться $\frac{3}{7}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение $B - A$.

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

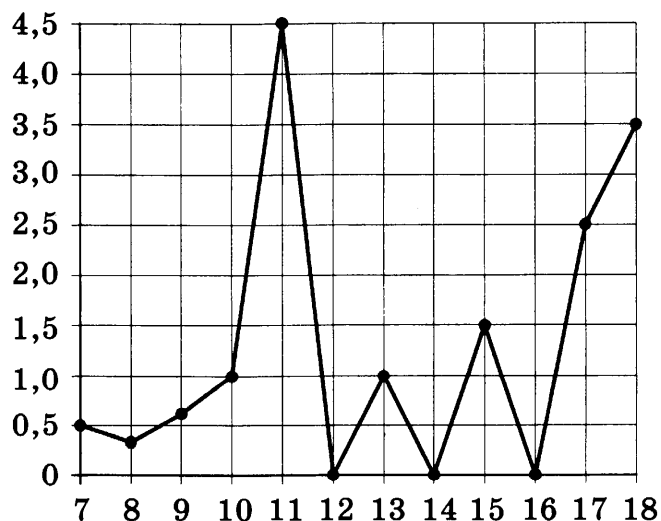
1

Теплоход рассчитан на 550 пассажиров и 15 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 60 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

Ответ: _____.

2

На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Элисте с 7 по 18 декабря 2001 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода в Элисте выпадало более 2 миллиметров осадков.



Ответ: _____.

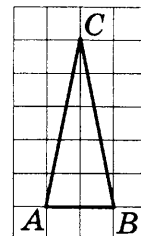
3

При строительстве сельского дома можно использовать один из двух типов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 8 тонн природного камня и 7 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 6 тонн щебня и 43 мешка цемента. Тонна камня стоит 1600 рублей, щебень стоит 750 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 230 рублей. Сколько рублей будет стоить материал для фундамента, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

Ответ: _____.

4

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне.



Ответ: _____.

5

В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 18 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Ответ: _____.

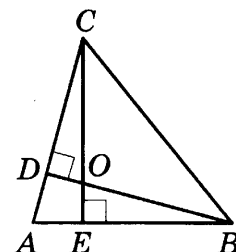
6

Найдите корень уравнения $\frac{1}{2x+7} = 5$.

Ответ: _____.

7

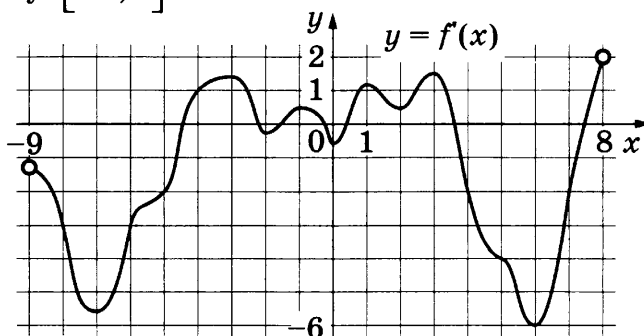
В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 72° , BD и CE — высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

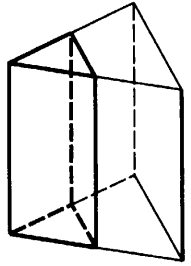
8

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-7; 5]$.



Ответ: _____.

- 9 Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 52, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.



Ответ: _____.

Часть 2

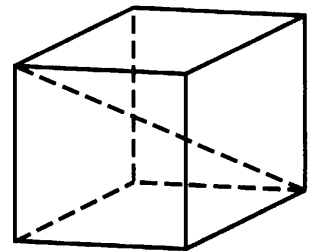
- 10 Найдите значение выражения $\frac{4^{6,2} \cdot 3^{9,2}}{12^{4,2}}$.

Ответ: _____.

- 11 Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому $P = \sigma ST^4$, где P — мощность излучения звезды, $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды, а T — температура. Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{512} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а мощность её излучения равна $4,56 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$. Найдите температуру этой звезды в градусах Кельвина.

Ответ: _____.

- 12 Диагональ куба равна $\sqrt{3}$. Найдите его объём.



Ответ: _____.

- 13 Имеется два сосуда. Первый содержит 80 кг, а второй — 70 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 63% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 65% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Ответ: _____.

14 Найдите наибольшее значение функции $y = (x^2 - 3x + 3) \cdot e^{3-x}$ на отрезке $[2; 5]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15 а) Решите уравнение $4^{\cos x} + 4^{-\cos x} = \frac{5}{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

16 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 10. На ребре AC находится точка D , на ребре AB находится точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $AD = AE = LM = 4$.

а) Докажите, что отрезок DE содержит центр основания пирамиды.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E , D и L .

17 Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0$.

18 Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

а) Докажите, что $\angle BB_1C_1 = \angle BAN$.

б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC до стороны BC , если $B_1C_1 = 9\sqrt{3}$ и $\angle BAC = 30^\circ$.

19 31 декабря 2014 года Савелий взял в банке 7 378 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Савелий переводит в банк платёж. Весь долг Савелий выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

20 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 + (a + 3)^4} = |x + a + 3| + |x - a - 3|$$

имеет ровно два решения.

21 Про некоторый набор, состоящий из 11 различных натуральных чисел, известно, что сумма любых двух различных чисел этого набора меньше суммы любых трёх различных чисел этого набора.

а) Может ли одним из этих чисел быть число 3000?

б) Может ли одним из этих чисел быть число 16?

в) Какое наименьшее возможное значение может принимать сумма чисел такого набора?

ОТВЕТЫ

Каждое правильно выполненное задание 1–14 оценивается 1 баллом. Задания 1–14 считаются выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Вариант 1

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	6
2	8
3	11 060
4	36
5	0,95
6	19
7	36
8	5
9	90

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	200
11	1,8
12	18
13	1
14	-8
15	а) $\arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k, \pi - \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k,$ $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{2\pi}{3}; \pi - \arcsin \frac{2}{3}; \frac{4\pi}{3}$
16	$\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$
17	$(-\infty; 0]; \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$
18	$24\sqrt{3}$
19	6
20	$a = -\frac{25}{11}, a = -\frac{25}{9}$
21	3

Вариант 2

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	870
2	6
3	213 750
4	36
5	0,62
6	23
7	0,31
8	0,5
9	850

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	1,24
11	0,8
12	204
13	4
14	-1
15	а) $-\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k, \pi + \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k,$ $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $3\pi; 3\pi + \arcsin \frac{1}{4}$
16	$\frac{\sqrt{7}}{2}$
17	$(-2, 1]; \left(\frac{3}{2}, 2\right]$
18	15
19	6
20	0
21	а) 5225; б) 10; в) 52525

Вариант 3

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	9500
2	3
3	197 850
4	33

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	5
11	1
12	7,5
13	4

Окончание табл.

№ задания	Ответ
5	0,8
6	32
7	0,55
8	-2
9	2175

Окончание табл.

№ задания	Ответ
14	-4
15	а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \pi - \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k,$ $\arccos \frac{1}{3} + \pi + 2\pi k, \quad k \in Z;$ б) $-\frac{11\pi}{6}; -\pi - \arccos \frac{1}{3}; -\frac{7\pi}{6}$
16	$\sqrt{\frac{7}{2}}$
17	$\left(-\frac{1}{2}; 0\right]; [1; 4)$
18	78,8
19	6
20	1
21	$\frac{2}{9}$

Вариант 4

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	140
2	10
3	6930
4	49
5	0,55

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	-6,56
11	0,6
12	6
13	5
14	-1

Окончание табл.

№ задания	Ответ
6	-1
7	0,41
8	-3
9	216

Окончание табл.

№ задания	Ответ
15	а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \pi - \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k,$ $\arccos \frac{3}{4} + \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $\pi + \arccos \frac{3}{4}; \frac{5\pi}{2}$
16	$\sqrt{2}$
17	$[-1; \log_5 3]$
18	1:2
19	375 100
20	$-\frac{18}{41}$
21	а) 625; б) да; 324; в) 11

Вариант 5

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	8
2	5
3	216 000
4	80
5	0,95
6	9
7	116

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	-8
11	1
12	4,5
13	2
14	1,5

Окончание табл.

№ задания	Ответ
8	-1
9	1500

Окончание табл.

№ задания	Ответ
15	а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \arccos \frac{4}{5} + 2\pi k,$ $-\arccos \frac{4}{5} + 2\pi k, \quad k \in Z;$ б) $-2\pi - \arccos \frac{4}{5}; -\frac{13\pi}{6}; -2\pi + \arccos \frac{4}{5}$
16	$\sqrt{\frac{6}{5}}$
17	$(0,4; 0,5); (1; +\infty)$
18	8
19	460 800
20	$\frac{13}{69}; -\frac{77}{123}$
21	$\frac{7}{33}$

Вариант 6

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	4
2	4
3	3
4	12
5	0,32
6	-2

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	2
11	301
12	20
13	513
14	-16

Окончание табл.

№ задания	Ответ
7	0,25
8	10
9	20

Окончание табл.

№ задания	Ответ
15	а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$; б) $-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}$
16	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$
17	$(-1; 2]; \left(\frac{5}{2}; 3\right]$
18	113
19	2928 200
20	$\frac{12}{7} < a < \frac{7}{4}$
21	а) да; б) 8; в) $\frac{7}{15}$

Вариант 7

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	110
2	3
3	26
4	9
5	0,2
6	-1
7	0,8
8	7
9	16

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	2
11	152
12	90
13	399
14	-18
15	а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$; б) $\frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}$
16	$\frac{6\sqrt{14}}{\sqrt{23}}$
17	$(-\infty; -2); (-2; -1); (-1; 0); (0; 1)$
18	1:3

Окончание табл.

№ задания	Ответ
19	13
20	$\frac{5}{6} \leq a \leq \frac{3}{2}$
21	а) да; б) 12; в) $\frac{11}{23}$

Вариант 8

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	3
2	8
3	4
4	9
5	0,56
6	-2
7	0,75
8	7
9	10

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	2
11	501
12	70
13	551
14	-40
15	а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}$
16	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{10}}{3}$
17	$(-\infty; -4); [-\log_3 7; +\infty)$
18	6
19	8 436 000
20	$(1,5; +\infty)$
21	а) да; б) 13; в) $\frac{12}{25}$

Вариант 9

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	16
2	1800
3	750
4	20
5	0,993
6	-1
7	108
8	-0,25
9	7

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	5
11	10
12	196
13	21
14	3
15	а) $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) -2π
16	$\arctg \frac{2}{5}$
17	$1; \left(\frac{3}{2}, 3\right)$
18	5
19	2 486 450
20	$\frac{20}{9} < a \leq \frac{5}{2}$
21	а) 5115; б) 33; в) 59295

Вариант 10

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	279
2	1400
3	26 660
4	4
5	0,99
6	22
7	116
8	-0,5
9	4

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	-23
11	13
12	78
13	29
14	9
15	а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$ б) $\frac{5\pi}{2}$
16	$\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$
17	$\left(0; \frac{1}{9}\right]; \left[\frac{1}{3}; 3\right)$
18	25 : 24
19	253 125
20	$a = \frac{1}{8}; a > \frac{2}{15}$
21	а) 16; б) 1280

Вариант 11

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	13
2	7
3	0,72
4	15
5	0,025
6	4
7	8,4
8	3
9	60

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	2
11	8,6
12	17
13	48
14	-2
15	а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z;$ $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z;$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z;$ б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}$
16	$\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$
17	$[-1; 0); (0; 3]$
18	4
19	12
20	$-2 < a < -1; 1 < a < 2$
21	а) нет; б) нет; в) 4

Вариант 12

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	81
2	7

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	14
11	16

Окончание табл.

№ задания	Ответ
3	5720
4	30
5	0,25
6	-3
7	132
8	7
9	57

Окончание табл.

№ задания	Ответ
12	90
13	44
14	11
15	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{7\pi}{3}$
16	$\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$
17	$[0; 2]$
18	2
19	6
20	-1
21	а) нет; б) да; в) 1347

Вариант 13

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	211
2	4
3	0,6
4	15
5	3
6	5

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	-51
11	12,8
12	48
13	72
14	2

Окончание табл.

№ задания	Ответ
7	3
8	2
9	16

Окончание табл.

№ задания	Ответ
15	а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z;$ $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z;$ б) $-\frac{17\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}$
16	90°
17	$(-12; -3]; (-2; 0); (0; 2); [4; +\infty)$
18	2
19	691 200
20	$(-\infty; 7 - 2\sqrt{6}]; [7 + 2\sqrt{6}; 15); (15; +\infty)$
21	а) нет; б) нет; в) 16

Вариант 14

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	5
2	8
3	7035
4	12
5	0,2
6	1
7	120
8	2
9	36

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	14
11	4
12	90
13	48
14	523
15	а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z;$ $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z;$ б) $\frac{19\pi}{6}$
16	100π

Окончание табл.

№ задания	Ответ
17	$[0; 3]; (5; 6)$
18	3,5
19	8 520 000
20	$-\sqrt{6} < a < -\sqrt{2}; \sqrt{2} < a < \sqrt{6}$
21	а) нет; б) да; в) 989

Вариант 15

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	8
2	6
3	25690
4	18
5	0,93
6	2
7	0,6
8	1,5
9	48

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	18
11	6
12	15
13	42
14	14
15	а) $\frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{14\pi}{3}; -4\pi$
16	$\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$
17	$\left(\frac{3}{2}; 2\right]; [3; 6)$
18	3
19	5 250 000
20	$-\sqrt{6} < a < -2; 2 < a < \sqrt{6}$
21	1, 2

Вариант 16

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	7
2	8
3	135
4	9
5	0,4
6	-252
7	82
8	4,5
9	4

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	28
11	0,37
12	3
13	9
14	4
15	а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\arctg \frac{1}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $\arctg \frac{1}{3} + 2\pi$; $\frac{11\pi}{4}$; $\arctg \frac{1}{3} + 3\pi$
16	$\pi\sqrt{10}$
17	$\left(-\infty; \frac{8}{9}\right]; \left[\frac{17}{9}; +\infty\right)$
18	8
19	4 884 100
20	1
21	а) 729; б) да; 576 в) 17

Вариант 17

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	36
2	7
3	-2,5

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	-15
11	75
12	441

Окончание табл.

№ задания	Ответ
4	0,8
5	0,973
6	1
7	15
8	0,25
9	5

Окончание табл.

№ задания	Ответ
13	10
14	7
15	а) $2\pi n, n \in Z$; б) -2π
16	$4\sqrt{6}$
17	$\left(\frac{15}{8}; 2\right)$
18	$6\sqrt{3}$
19	9 282 000
20	$[-1,5; -0,375); 0$
21	а) нет; б) да; в) 963

Вариант 18

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	3
2	5
3	135
4	4
5	0,6
6	1,5
7	12
8	6

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	3
11	25
12	4
13	9
14	-10
15	а) $-\arctg \frac{2}{5} + \pi k, -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$; б) $\frac{15\pi}{4}; 4\pi - \arctg \frac{2}{5}$
16	90°

Окончание табл.

№ задания	Ответ
9	120

Окончание табл.

№ задания	Ответ
17	$[-1; 0]; (3; 4)$
18	$\frac{50\sqrt{3}}{3}$
19	11
20	$a = -5; a = -1$
21	63, 504 и 10 584; 63, 504 и 15 876 или 63, 504 и 31 752

Вариант 19

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	120
2	460
3	7,3
4	26
5	0,15
6	-31
7	138
8	5
9	19

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	-5
11	50
12	3
13	16
14	3
15	а) $-\arctg \frac{1}{8} + \pi k, -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{7\pi}{4}; 2\pi - \arctg \frac{1}{8}$
16	$\arccos \frac{1}{\sqrt{33}}$
17	$[0; 2]; (2; 4]$
18	12
19	5
20	6
21	18, 144 и 1296 или 18, 144 и 2592

Вариант 20

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	23
2	7
3	2,25
4	18
5	0,043
6	-26
7	96
8	-1,75
9	288

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	-4
11	0,41
12	5
13	8
14	5
15	а) $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) 3π
16	$\arccos \frac{7}{11}$
17	$(-\infty; 1]; [3, +\infty)$
18	56,5
19	6
20	$0; \left[\frac{1}{3}; 1\right]$
21	а) нет; б) да; в) 867

Вариант 21

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	227,7
2	-20
3	3720
4	13

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	-0,5
11	8
12	10
13	15
14	2

Окончание табл.

№ задания	Ответ
5	0,0133
6	5
7	49
8	0,25
9	36

Окончание табл.

№ задания	Ответ
15	а) 0; $\log_2 7$; б) $\log_2 7$
16	$\sqrt{7}$
17	2; $\left(\frac{5}{2}; 4\right)$
18	67,5
19	10
20	$[0, 2; 0, 6]$
21	а) 42; б) положительных; в) 24

Вариант 22

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	10 065
2	8
3	352
4	3
5	0,5
6	-4
7	59
8	-1,75
9	5

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	0,25
11	12
12	182
13	10
14	23
15	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{2}$
16	5
17	$[-1; 0]; (0; 4]$
18	$42 + 18\sqrt{5}$
19	2 634 240
20	$\left(-\infty; \frac{7 - 2\sqrt{6}}{10}\right]; \left[\frac{7 + 2\sqrt{6}}{10}; 1,5\right); (1,5; +\infty)$
21	а) 135; б) да; 378; в) 428571

Вариант 23

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	12
2	12
3	328
4	13
5	0,6008
6	-2
7	54
8	0,25
9	112

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	17
11	15
12	1,5
13	10
14	2
15	а) $-\frac{3}{2}; 4;$ $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z;$ б) $-\frac{3}{2}; \frac{2\pi}{3}$
16	$3\sqrt{\frac{5}{2}}\pi$
17	$\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$
18	40
19	10
20	$(-\infty; 1]$
21	а) 55; б) отрицательных; в) 25

Вариант 24

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	31 140
2	-8
3	323
4	26
5	0,25
6	3
7	44
8	-1,25
9	13,5

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	0,5
11	8
12	45
13	40
14	9
15	а) $-\log_2 7; -1$; б) $-\log_2 7$
16	6
17	$[-2; 0); (0; 3]$
18	$\frac{51 + 36\sqrt{2}}{2}$
19	5
20	$b = -1, b \geq 0$
21	а) 60; б) положительных; в) 36

Вариант 25

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	19
2	2
3	756
4	14

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	-8
11	0,28
12	4
13	15
14	7

Окончание табл.

№ задания	Ответ
5	0,81
6	-5
7	94
8	0,25
9	171,5

Окончание табл.

№ задания	Ответ
15	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{7\pi}{2}$
16	$\frac{5\sqrt{119}}{13}$
17	$(-\infty; 2]; [4, +\infty)$
18	$62 + 16\sqrt{15}$
19	6
20	$\left(0; \frac{1}{3}\right]$
21	а) 54; б) положительных; в) 28

Вариант 26

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	28
2	4
3	75
4	24
5	0,6
6	-11
7	28
8	16
9	8

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	3
11	44
12	7
13	11
14	2
15	а) $\frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z};$ б) $0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; 2\pi$
16	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{39}}{9}$
17	$(0; 1); \left(1; \frac{3}{2}\right); (2; +\infty)$

Окончание табл.

№ задания	Ответ
18	1:4
19	7
20	$a = -5$
21	а) 585; б) 11; в) 56565

Вариант 27

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	39
2	6
3	3992
4	16
5	0,008
6	70
7	72
8	-21
9	64

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	4
11	13,75
12	6
13	34
14	21
15	а) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z;$ б) $-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}$
16	$\frac{\pi\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$
17	$(-\infty; 2]; [3, +\infty)$
18	$3 - \sqrt{5}$
19	3 859 900
20	$[-3; 4]$
21	а) нет; б) да; в) 753

Вариант 28

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	3
2	5
3	3984
4	25
5	0,5
6	-6
7	35
8	13,5
9	112,5

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	0
11	7
12	120
13	30
14	14
15	а) $n\pi$; $\pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; б) 3π ; $\frac{23\pi}{6}$; 4π
16	1
17	$(-1; 0); \left(0; \frac{1}{2}\right]; (1; +\infty)$
18	4
19	9
20	$\left[-\frac{5}{11}; 0\right)$
21	а) нет; б) да; в) 1119

Вариант 29

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	529
2	3
3	2604
4	4
5	0,064
6	18
7	21
8	-2
9	5

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	4
11	500
12	22
13	28
14	4
15	а) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z;$ б) $\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}; \frac{3\pi}{4}$
16	$10\sqrt{2}$
17	$(-\infty; 0]; [\log_3 8; +\infty)$
18	1
19	6 409 000
20	$[-4; 3]$
21	$6(3^{10} - 2^{10})$

Вариант 30

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	21
2	4
3	3777
4	5
5	0,24
6	11
7	49
8	2
9	18

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	3
11	20
12	3
13	57
14	45
15	а) $\pi n; \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $2\pi; \frac{9\pi}{4}; 3\pi$
16	$\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{39}}{3}$
17	$(-\infty; 0]; \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$
18	$\frac{9 - \sqrt{17}}{2}$
19	6
20	$a = 1; a = 3; a = 5$
21	$0,111\dots = \frac{1}{9}$

Вариант 31

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	9
2	50
3	226
4	2,5
5	0,4
6	1,5
7	26
8	5
9	12

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	3
11	0,6
12	60
13	125
14	-35
15	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $-\frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{15\pi}{4}; -\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}$
16	$3\sqrt{66}$
17	$[-1; 3]$
18	50,7
19	806 400
20	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right); 0; 1; \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$
21	а) нет; б) да; в) 115

Вариант 32

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	4
2	6
3	110
4	17
5	0,28
6	2
7	31
8	0,6
9	64

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	4
11	0,24
12	3
13	13
14	1
15	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{4\pi}{3}$
16	$2\sqrt{10}$
17	$\left(\frac{5}{3}; 2\right); [3; +\infty)$
18	$\frac{9}{55}$
19	1 968 300
20	$\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{4}\right); \left(-\frac{3}{4}; 1\right)$
21	а) нет; б) да; в) $\frac{4}{7}$

Вариант 33

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	35
2	8
3	18140
4	2
5	0,996
6	-6
7	116
8	-5
9	4

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	-3,5
11	0,65
12	1680
13	5
14	3,4
15	а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}; -\pi$
16	$9\sqrt{14}$
17	$(-\infty; 0]; [2; +\infty)$
18	24
19	12
20	$(-\infty; \frac{1}{3}); (1; +\infty)$
21	а) нет; б) да; в) 107

Вариант 34

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	29
2	8
3	3020
4	8
5	0,88
6	-1
7	102
8	2
9	12

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	4
11	33
12	1
13	12
14	6
15	а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $2\pi; \frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}; 3\pi$
16	$\frac{2\sqrt{19}}{5}$
17	$\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; -1\right]; [0; 2)$
18	10
19	5
20	$-2; 0; (1; +\infty)$
21	а) нет; б) да; в) 6

Вариант 35

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	43,7
2	5
3	6552
4	8,5
5	0,4
6	14
7	103
8	4
9	60

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	81
11	5000
12	8
13	20
14	8
15	а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $-3\pi; -\frac{9\pi}{4}; -2\pi$
16	$18\sqrt{2}$
17	$[-1; 2]$
18	$4\sqrt{178}$
19	8 599 000
20	$\left(-\frac{5}{7}; \frac{8}{7}\right); \left(\frac{8}{7}; \frac{13}{9}\right)$
21	а) да; б) нет; в) $\frac{198}{7}$

Вариант 36

Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
1	10
2	3
3	14390
4	1
5	0,991
6	-3,4
7	108
8	3
9	13

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
10	3888
11	8000
12	1
13	28
14	3
15	а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{8\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}; -\frac{5\pi}{3}$
16	$\frac{4\sqrt{210}}{5}$
17	$(-2; -1]; (1; 2)$
18	$9\sqrt{3}$
19	506 250
20	-5; -1
21	а) да; б) нет; в) 242

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЙ 15–21

Количество баллов, выставляемых за выполнение заданий 15–21, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, в частности все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

В критериях оценивания конкретных заданий содержатся общие требования к выставлению баллов.

При выполнении задания можно использовать без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендованных (допущенных) Министерством образования и науки Российской Федерации.

Вариант 1

15

а) Решите уравнение $3\sin 2x - 4\cos x + 3\sin x - 2 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

Разложим левую часть на множители:

$$6\sin x \cos x - 4\cos x + 3\sin x - 2 = 0;$$

$$(2\cos x + 1)(3\sin x - 2) = 0.$$

Таким образом, либо $\cos x = -\frac{1}{2}$, либо $\sin x = \frac{2}{3}$. В первом случае $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, sk \in Z$,

или $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$. На отрезок $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ попадают корни $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$.

Во втором случае $x = \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k, k \in Z$ или $x = \pi - \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

На заданный отрезок попадает корень $\pi - \arcsin \frac{2}{3}$.

Ответ: а) $\arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k, \pi - \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; б) отрезку при-

надлежат корни $\frac{2\pi}{3}; \pi - \arcsin \frac{2}{3}; \frac{4\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Тригонометрическое уравнение решено верно, но неверно указаны или не указаны корни, принадлежащие отрезку	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

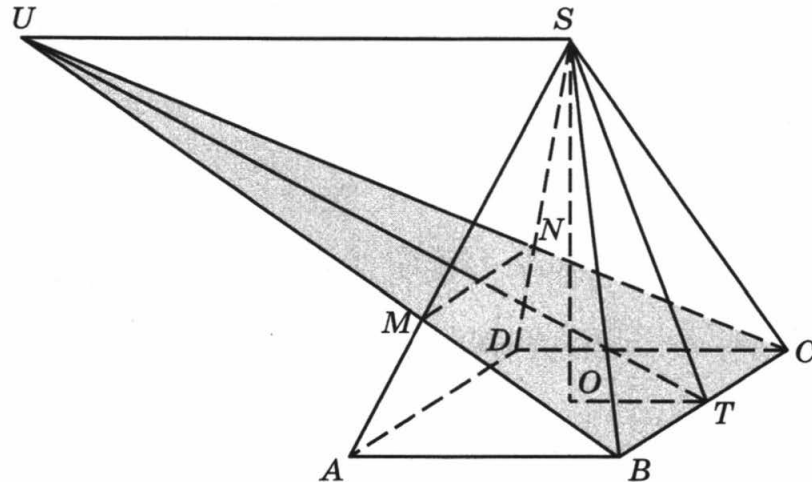
16

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ — квадрат со стороной 6, а боковое ребро равно 9. На ребре SA отмечена точка M так, что $SM = 6$.

- Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки B , C , и M .
- Найдите расстояние от вершины S до плоскости BCM .

Решение.

а) Так как плоскость BCM параллельна AD , то она пересекает грань ADS по прямой MN параллельной AD . Таким образом, сечением является трапеция $BMNC$.



б) Прямые BM и CN пересекаются в точке U , причём прямая US — пересечение плоскостей граней SAB и SCD — параллельна AB . Из подобия треугольников USM и BAM имеем $\frac{US}{AB} = \frac{SM}{MA}$, откуда $US = 6 \cdot \frac{6}{3} = 12$.

Пусть теперь T — середина BC . Так как $BC \perp ST$ и $BC \perp UT$, то плоскость BCM перпендикулярна плоскости UST . Это значит, что искомое расстояние SH — высота в треугольнике UST . Найдём её.

Для этого сначала вычислим $ST = \sqrt{SB^2 - BT^2} = \sqrt{81 - 9} = 6\sqrt{2}$. Далее, если SO — высота пирамиды, то $SO = \sqrt{ST^2 - OT^2} = \sqrt{72 - 9} = 3\sqrt{7}$. По теореме косинусов в треугольнике UST $UT = \sqrt{US^2 + ST^2 - 2 \cdot SU \cdot ST \cdot \cos \angle UST}$, при этом $\cos \angle UST = -\cos \angle STO = -\frac{OT}{ST}$. Тогда $UT = \sqrt{144 + 72 + 2 \cdot 12 \cdot 3} = 12\sqrt{2}$.

Теперь вычислим площадь треугольника UST двумя способами. С одной стороны она равна половине произведения стороны US на высоту из точки T на неё, но

эта высота равна SO , то есть площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{7} \cdot 12 = 18\sqrt{7}$. С другой стороны, она равна $\frac{1}{2} \cdot SH \cdot UT = SH \cdot 6\sqrt{2}$, так что $SH = \frac{18\sqrt{7}}{6\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$.

Содержание критерия	Баллы
Выполнено верное построение в пункте а) и обоснованно найден верный ответ в пункте б)	2
Выполнено верное построение в пункте а) ИЛИ обоснованно найден верный ответ в пункте б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

17 Решите неравенство $\log_3(9^x + 16^x - 9 \cdot 4^x + 8) \geq 2x$.

Решение.

$$9^x + 16^x - 9 \cdot 4^x + 8 \geq 9^x; \quad 16^x - 9 \cdot 4^x + 8 \geq 0.$$

Обозначим $4^x = y$. Тогда $y^2 - 9y + 8 \geq 0$; $(y - 1)(y - 8) \geq 0$; $y \leq 1$ или $y \geq 8$. Следовательно, $x \leq 0$ или $x \geq \frac{3}{2}$.

Ответ: $(-\infty; 0]$; $[\frac{3}{2}; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

18 В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$. Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M , N , P .

а) Докажите, что треугольник MNP прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника MNP , если известно, что $BC = 12$.

Решение.

а) Пусть продолжения высот треугольника ABC , проведённых из вершин A , B и C , пересекают описанную около него окружность в точках M , N и P соответственно. Тогда вписанные углы $\angle PNB$ и $\angle PCB$ опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle PNB = \angle PCB$. Аналогично $\angle MNB = \angle MAB$, значит,

$$\begin{aligned}\angle PNM &= \angle PNB + \angle MNB = \angle PCB + \angle MAB = \\ &= (90^\circ - \angle ABC) + (90^\circ - \angle ABC) = 90^\circ - 45^\circ + 90^\circ - 45^\circ = 90^\circ.\end{aligned}$$

б) Аналогично получим, что $\angle NMP = 60^\circ$. Тогда $\angle MPN = 30^\circ$. Пусть R — радиус описанной окружности треугольника ABC . По теореме синусов

$$R = \frac{BC}{2\sin \angle BAC} = \frac{12}{2\sin 60^\circ} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

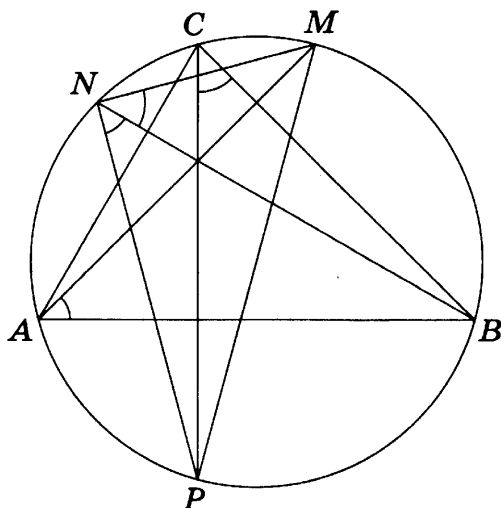
Тогда

$$MN = 2R\sin \angle MPN = 2R\sin 30^\circ = R = 4\sqrt{3},$$

$$NP = 2R\sin \angle NMP = 2R\sin 60^\circ = R\sqrt{3} = 12.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle MNP} = \frac{1}{2}MN \cdot NP = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 12 = 24\sqrt{3}.$$



Ответ: $24\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется доказательство утверждения в пункте а), и обоснованно найден верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно найден верный ответ в пункте б). При этом, возможно, использовалось утверждение из пункта а), хотя пункт а) не выполнен	2
Имеется доказательство утверждения в пункте а)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

20

Максим хочет взять в кредит 1,5 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Максим взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 тысяч рублей?

Решение.

При начислении процентов оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $1 + 0,01 \cdot 10 = 1,1$. В конце первого года долг составит $1500000 \cdot 1,1 = 1650000$ рублей. После выплаты 350 тысяч рублей останется долг 1350000 рублей. И так далее. Составим таблицу выплат.

Год	Долг банку (руб.)	Остаток после транша (руб.)
0	1500000	—
1	1650000	1300000
2	1430000	1080000
3	1188000	838000
4	921800	571800
5	628980	278980
6	306878	0

Значит, Максим погасит кредит за 6 лет.

Ответ: 6.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Найден верный алгоритм вычисления оставшейся суммы долга, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
Найден верный алгоритм вычисления оставшейся суммы долга, но решение не доведено до конца или имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

20

Найдите все значения параметра a , при котором уравнение $f(x) = |2a + 5|x$ имеет 6 решений, где f — чётная периодическая функция, с периодом $T = 2$, определённая на всей числовой прямой, причём $f(x) = ax^2$, если $0 \leq x \leq 1$.

Решение.

Если $a = 0$, то функция $f(x)$ тождественно равна нулю, и её график имеет с прямой $y = 5x$ единственную общую точку.

Пусть $a > 0$ (рис. 1). Решение $x = 0$ есть при всех a . Нужно ещё ровно пять решений. Единственный возможный случай показан на рисунке: прямая проходит через точку $(5; a)$. Составим уравнение $|2a + 5| \cdot 5 = a$.

Учитывая, что $a > 0$, получим: $9a = -25$. Положительных решений нет. Следовательно, случай $a > 0$ невозможен.

Теперь пусть $a < 0$ (см. рис. 2). Шесть решений есть, только если прямая проходит через точку $(-5; a)$. Составим уравнение:

$$|2a+5| \cdot (-5) = a, \text{ откуда } 2a+5 = -\frac{a}{5} \text{ или } 2a+5 = \frac{a}{5}.$$

Получаем: $a = -\frac{25}{11}$ или $a = -\frac{25}{9}$.

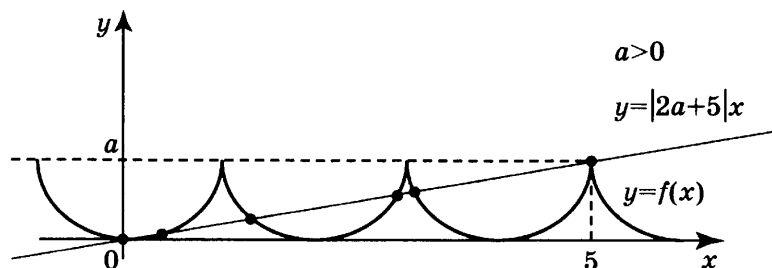


Рис. 1

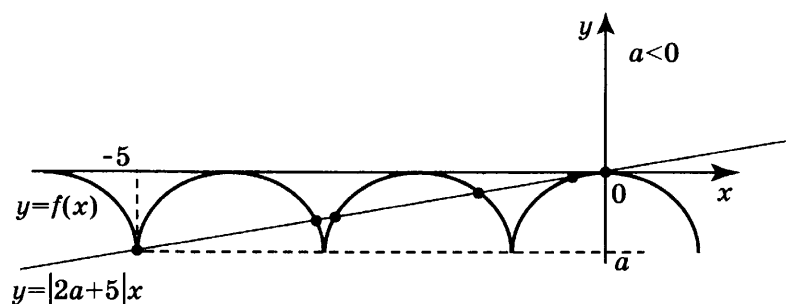


Рис. 2

Ответ: $a = -\frac{25}{11}, a = -\frac{25}{9}$.

Содержание критерия	Баллы
В представленном решении обоснованно получен верный ответ	4
Ход решения верный, однако, имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	3
Верно построена схема графика функции, найдено взаимное расположение графика и прямой, дающее шесть решений, однако найдено только одно значение параметра	2
Рассмотрен только один случай и задача решена для этого случая	1
Исследование системы на количество решений ошибочно. Логика решения отсутствует, либо ошибочна	0

21

Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны члены возрастающей последовательности натуральных чисел a_n . В результате получилось рациональное число, которое выражается несократимой дробью, знаменатель которой меньше 100. Найдите наименьшее возможное значение a_3 .

Решение.

Очевидно, $a_3 \geq 3$, причем $a_3 = 3$, только если $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$, то есть если десятичная дробь начинается: $0,123\dots$ (четвёртая цифра не ноль).

Заметим, что таким образом начинается, например, число

$$m = 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + \dots + n \cdot 10^{-n} + \dots$$

Найдем число m и проверим, удовлетворяет ли оно условиям задачи. Для этого запишем сумму подробнее.

$$\begin{aligned} m &= 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \dots + 10^{-n} + \dots + \\ &+ 10^{-2} + 10^{-3} + \dots + 10^{-n} + \dots + \\ &+ 10^{-3} + \dots + 10^{-n} + \dots + \\ &+ \dots \end{aligned}$$

В каждой строке — сумма геометрической прогрессии со знаменателем 10^{-1} .

Получаем:

$$\begin{aligned} m &= 10^{-1} \left(\frac{1}{1-10^{-1}} \right) + 10^{-2} \left(\frac{1}{1-10^{-1}} \right) + \dots + 10^{-n} \left(\frac{1}{1-10^{-1}} \right) + \dots = \\ &= \frac{10}{9} \cdot (10^{-1} + 10^{-2} + \dots + 10^{-n} + \dots) = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{10}{81}. \end{aligned}$$

Получается, что m — рациональное число, и оно представляется дробью со знаменателем 81, что меньше ста. Число m удовлетворяет условию задачи и для этого числа $a_3 = 3$.

Ответ: 3.

Содержание критерия	Балл
В представленном решении обоснованно получен верный ответ	4
При верном ходе рассуждений решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу	3
Найдено нужное число, доказано, что оно рационально, однако не показано, что знаменатель меньше ста	2
Верными рассуждениями найдено какое-либо число, удовлетворяющее условию задачи, содержащее в указанной позиции не наименьшую цифру	1
Отсутствует доказательство рациональности нужного числа или в ответе записана цифра иррационального числа	0

Вариант 6

15

а) Решите уравнение $\cos^2 x - \cos 2x = 0,75$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0,75; \quad \sin^2 x = \frac{3}{4}.$$

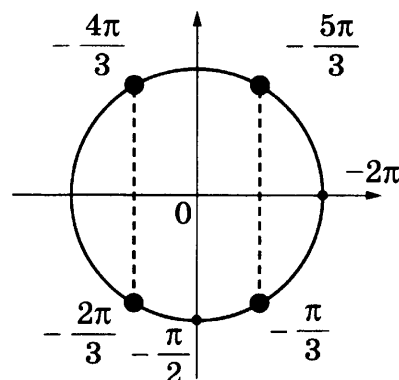
Значит, $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или в пункте б) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

16

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 2$.

- Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1 .
- Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

Решение.

а) Прямая $D_1 E$ пересекает прямую AD в точке K . Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB .

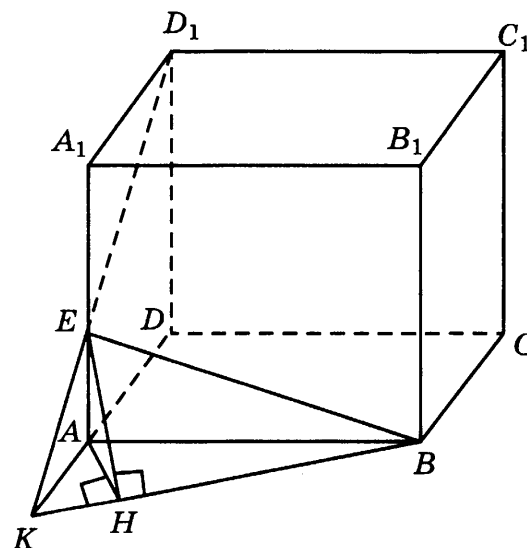
б) Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB , тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB . Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1 .

Поскольку $AE : EA_1 = 1 : 2$, получаем:

$$AE = \frac{AA_1}{3} = 1; \quad EA_1 = AA_1 - AE = 2.$$

Из подобия треугольников $A_1 D_1 E$ и AKE находим:

$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1 D_1 = 1.$$



В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A : $AB=2$; $AK=1$;
 $BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{5}$, откуда высота

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\operatorname{tg} \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\left(\sin \angle AHE = \frac{\sqrt{5}}{3}; \cos \angle AHE = \frac{2}{3}. \right)$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Выполнено верное построение в пункте а) и обоснованно найден верный ответ в пункте б)	2
Выполнено верное построение в пункте а) ИЛИ обоснованно найден верный ответ в пункте б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

17

Решите неравенство $\frac{x^2 + 2x - 11}{2x^2 - 3x - 5} \geq 1$.

Решение.

$$\frac{x^2 + 2x - 11 - 2x^2 + 3x + 5}{2x^2 - 3x - 5} \geq 0; \quad \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 3x - 5} \leq 0; \quad \frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(2x-5)} \leq 0;$$

$$-1 < x \leq 2 \text{ или } \frac{5}{2} < x \leq 3.$$

Ответ: $(-1; 2]; \left[\frac{5}{2}; 3 \right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

18

Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120^\circ$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

Решение.

а) По теореме о внешнем угле треугольника $\angle BOC = 2\angle BAO = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$. Поэтому $\angle BEC + \angle BOC = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$.

Значит, точки B, E, C и O лежат на одной окружности. Вписанные в эту окружность углы $\angle CBE$ и $\angle COE$ опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\angle CBE = \angle COE$.

б) По теореме косинусов

$$BC = \sqrt{BE^2 + CE^2 - 2BE \cdot CE \cos 120^\circ} = \sqrt{40^2 + 24^2 - 2 \cdot 40 \cdot 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 8\sqrt{25 + 9 + 15} = 8 \cdot 7 = 56.$$

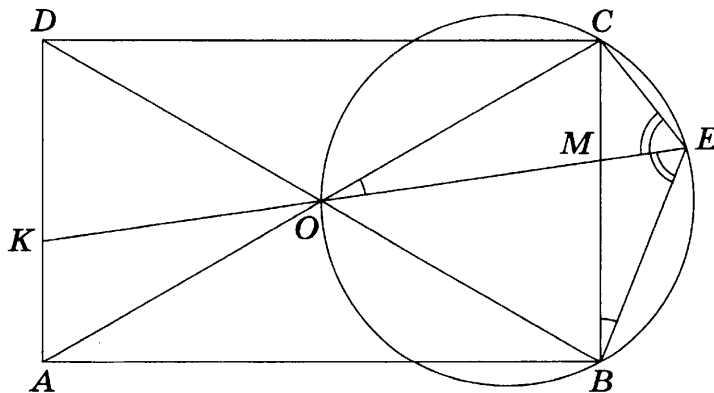
Вписанные углы $\angle BEO$ и $\angle CEO$ опираются на равные хорды BO и CO , значит, EO — биссектриса угла BEC . Пусть M — точка её пересечения со стороной BC . По формуле для биссектрисы треугольника

$$EM = \frac{2BE \cdot CE \cos \frac{1}{2} \angle BEC}{BE + CE} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 24 \cos 60^\circ}{40 + 24} = 15.$$

$$\text{По свойству биссектрисы треугольника } \frac{CM}{BM} = \frac{CE}{BE} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5},$$

$$\text{значит, } CM = \frac{3}{8}BC = \frac{3}{8} \cdot 56 = 21, \quad BM = 35.$$

По теореме о произведении пересекающихся хорд $EM \cdot MO = BM \cdot CM$, откуда находим, что $MO = \frac{BM \cdot CM}{EM} = \frac{35 \cdot 21}{15} = 49$. Треугольники COM и AOK равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, поэтому $OK = OM$. Следовательно, $EK = EM + 2OM = 15 + 98 = 113$.



Ответ: 113.

Содержание критерия	Баллы
Имеется доказательство утверждения в пункте а), и обоснованно найден верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно найден верный ответ в пункте б). При этом, возможно, использовалось утверждение из пункта а), хотя пункт а) не выполнен	2
Имеется доказательство утверждения в пункте а)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

19

31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 9 282 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S , а годовые составляют $a\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1 + b)X.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = Sb^3 - (1 + b + b^2)X = Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1}X.$$

После четвертой выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_4 = Sb^4 - (1 + b + b^2 + b^3)X = Sb^4 - \frac{b^4 - 1}{b - 1}X.$$

По условию четырьмя выплатами Алексей должен погасить кредит полностью, поэтому $Sb^4 - \frac{b^4 - 1}{b - 1}X = 0$, откуда $X = \frac{Sb^4(b - 1)}{b^4 - 1}$.

При $S = 9282000$ и $a = 10$, получаем: $b = 1,1$ и

$$X = \frac{9282000 \cdot 1,4641 \cdot 0,1}{0,4641} = 2928200 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 2 928 200.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Получено верное выражение для суммы платежа, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
Получено выражение для ежегодной выплаты, но уравнение не составлено ИЛИ верный ответ найден подбором	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

20

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\left|\frac{7}{x}-4\right|=ax-3$ на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x)=ax-3$ и $g(x)=\left|\frac{7}{x}-4\right|$. Исследуем уравнение $f(x)=g(x)$ на промежутке $(0; +\infty)$.

При $a \leq 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(0; +\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a \leq 0$ уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет решений на промежутке $(0; +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(0; \frac{7}{4}\right]$, поэтому уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(0; \frac{7}{4}\right]$, причём решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{7}{4}\right) \geq g\left(\frac{7}{4}\right)$, откуда получаем $a \cdot \frac{7}{4} - 3 \geq 0$, то есть $a \geq \frac{12}{7}$.

На промежутке $\left(\frac{7}{4}; +\infty\right)$ уравнение $f(x)=g(x)$ принимает вид $ax-3=4-\frac{7}{x}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2-7x+7=0$. Будем считать, что $a > 0$, поскольку случай $a \leq 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D=49-28a$, поэтому при $a > \frac{7}{4}$ это уравнение не имеет корней; при $a = \frac{7}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 2; при $0 < a < \frac{7}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2 , то есть $0 < a < \frac{7}{4}$, то больший корень $x_2 = \frac{7+\sqrt{D}}{2a} > \frac{7}{2a} > 2 > \frac{7}{4}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{7}{4}; +\infty\right)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{7}{4}; +\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1 - \frac{7}{4}\right)\left(x_2 - \frac{7}{4}\right) = a\left(\frac{7}{4}\right)^2 - 7 \cdot \frac{7}{4} + 7 = \frac{7 \cdot (7a - 12)}{16} > 0, \text{ то есть } a > \frac{12}{7}.$$

Таким образом, уравнение $\left|\frac{7}{x} - 4\right| = ax - 3$ имеет следующее количество корней на промежутке $(0; +\infty)$:

- нет корней при $a \leq 0$;
- один корень при $0 < a < \frac{12}{7}$ и $a > \frac{7}{4}$;
- два корня при $a = \frac{12}{7}$ и $a = \frac{7}{4}$;
- три корня при $\frac{12}{7} < a < \frac{7}{4}$.

Ответ: $\frac{12}{7} < a < \frac{7}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающиеся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

21

Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{3}{10}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино

мальчиков было не более $\frac{5}{12}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 8 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 16 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 16 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Решение.

а) Если группа состоит из 3 мальчиков, посетивших только театр, 5 мальчиков, посетивших только кино, и 8 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 16 учащихся могло быть 8 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 9 или больше. Тогда девочек было 7 или меньше. Театр посетило не более 3 мальчиков, поскольку если бы их было 4 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{4}{4+7} = \frac{4}{11}$, что больше $\frac{3}{10}$. Аналогично кино посетило не более 5 мальчиков, поскольку $\frac{6}{6+7} = \frac{6}{13} > \frac{5}{12}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 16 учащихся могло быть 8 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 8.

в) Предположим, что некоторый мальчик ходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик ходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

По условию $\frac{m_1}{m_1+d} \leq \frac{3}{10}$, $\frac{m_2}{m_2+d} \leq \frac{5}{12}$, значит, $\frac{m_1}{d} \leq \frac{3}{7}$, $\frac{m_2}{d} \leq \frac{5}{7}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d} \leq \frac{8}{7}$,

поэтому доля девочек в группе: $\frac{d}{m_1+m_2+d} = \frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1} \geq \frac{1}{\frac{8}{7}+1} = \frac{7}{15}$.

Если группа состоит из 3 мальчиков, посетивших только театр, 5 мальчиков, посетивших только кино, и 7 девочек, ходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{7}{15}$.

Ответ: а) да; б) 8; в) $\frac{7}{15}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Вариант 11

15

а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$. Поэтому уравнение можно переписать в виде $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} - 2 = 0$. Решив последнее уравнение как квадратное относительно $\frac{1}{\sin x}$, получим $\frac{1}{\sin x} = -2$ или $\frac{1}{\sin x} = 1$. Значит, $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; либо $\sin x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$: $x = \frac{7\pi}{6}$; $x = \frac{11\pi}{6}$; $x = \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Тригонометрическое уравнение решено верно, но неверно указаны или не указаны корни, принадлежащие отрезку	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

16

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки B , A_1 , и D_1 .

б) Найдите угол между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1 .

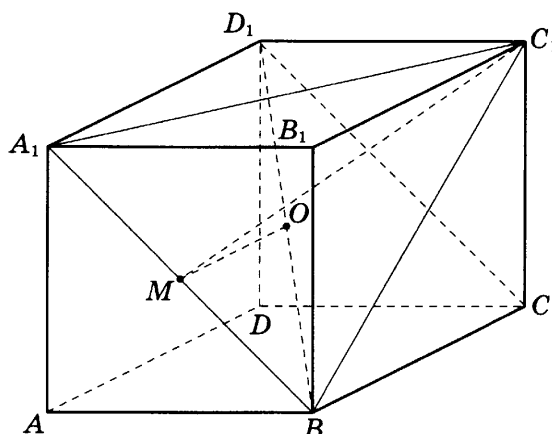
Решение.

а) Так как BC параллельно A_1D_1 , то точка C лежит в плоскости BA_1D_1 . Прямоугольник $B C D_1 A_1$ — искомое сечение.

б) Пусть точка O — центр куба, а M — середина A_1B .

$A_1D_1 \perp A_1B$, а MO — средняя линия треугольника BA_1D_1 , поэтому $MO \perp A_1B$. Треугольник BA_1C_1 равносторонний, $C_1M \perp A_1B$, следовательно, искомый угол равен углу OMC_1 .

Найдём стороны треугольника OMC_1 . Из треугольника BA_1D_1 находим $OM = \frac{1}{2}$; из треугольника BA_1C_1 находим $MC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} A_1C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $OC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, поскольку O — середина диагонали AC_1 .



Теперь применим к треугольнику OMC_1 теорему косинусов:

$$\cos \angle OMC_1 = \frac{OM^2 + C_1M^2 - OC_1^2}{2 \cdot OM \cdot MC_1} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Содержание критерия	Баллы
Выполнено верное построение в пункте а) и обоснованно найден верный ответ в пункте б)	2
Выполнено верное построение в пункте а) ИЛИ обоснованно найден верный ответ в пункте б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

17 Решите неравенство $3^{\log_2 x^2} + 2 \cdot |x|^{\log_2 9} \leq 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)}$.

Решение.

Воспользуемся тождеством $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$. Для доказательства этого тождества достаточно рассмотреть разность логарифмов левой и правой части:

$$\log_b a^{\log_b c} - \log_b c^{\log_b a} = \log_b c \cdot \log_b a - \log_b a \cdot \log_b c = 0.$$

Значит, $|x|^{\log_2 9} = |x|^{2\log_2 3} = (x^2)^{\log_2 3} = 3^{\log_2 x^2}$. Второе неравенство принимает вид

$$3 \cdot 3^{\log_2 x^2} \leq 3 \cdot 3^{\log_2(2x+3)}; \quad 3^{\log_2 x^2} \leq 3^{\log_2(2x+3)}; \quad \log_2 x^2 \leq \log_2(2x+3); \quad \begin{cases} x^2 > 0, \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0; \end{cases}$$

$-1 \leq x \leq 3$ при условии $x \neq 0$.

Ответ: $[-1; 0); (0; 3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

18

Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC касается его сторон AB , AC и BC в точках C_1 , B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q , лежащей внутри треугольника AB_1C_1 .

а) Докажите, что C_1Q — биссектриса угла AC_1B_1 .

б) Найдите расстояние от точки O до центра окружности, вписанной в треугольник AC_1B_1 , если известно что $BC = 15$, $AB = 13$, $AC = 14$.

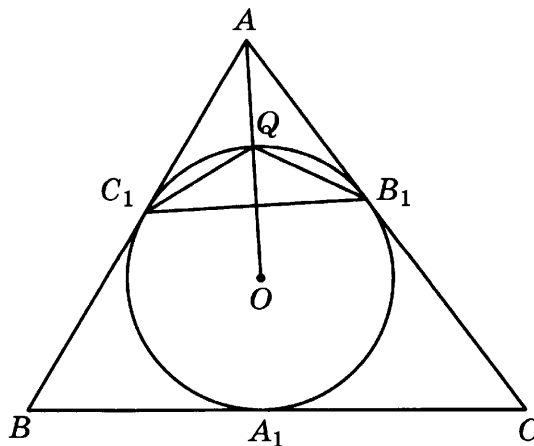
Решение.

а) Поскольку $AC_1 = AB_1$, треугольник AB_1C_1 равнобедренный, биссектриса его угла A перпендикулярна основанию B_1C_1 и делит его пополам, значит, высота треугольника B_1QC_1 проведённая из вершины Q является его медианой. Значит, треугольник B_1QC_1 равнобедренный, $\angle QB_1C_1 = \angle QC_1B_1$.

Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что

$$\angle AC_1B_1 = 2\angle QB_1C_1 = 2\angle QC_1B_1.$$

Следовательно, C_1Q — биссектриса угла AC_1B_1 .



б) Поскольку Q — точка пересечения биссектрис треугольника AB_1C_1 эта точка — центр окружности, вписанной в треугольник AB_1C_1 . Значит, искомое расстояние — это длина отрезка OQ т.е. радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Пусть этот радиус равен r , а полупериметр треугольника ABC равен p . Тогда

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21,$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84.$$

Следовательно,

$$OQ = r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{84}{21} = 4.$$

Ответ: 4.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

19

31 декабря 2014 года Арсений взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Арсений переводит очередной транш. Арсений выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 550 тыс. рублей, во второй — 638,4 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Арсению?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S , годовые составляют $a\%$, первая выплата X , а вторая Y . Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1b - Y = (Sb - X)b - Y = Sb^2 - bX - Y.$$

По условию двумя выплатами Арсений должен погасить кредит полностью, поэтому $Sb^2 - bX - Y = 0$, откуда $D = X^2 + 4SY = 10^4 \cdot 169^2$, значит $b = \frac{X + \sqrt{D}}{2S} = \frac{10^4 \cdot 55 + 10^4 \cdot 169}{2 \cdot 10^4 \cdot 100} = 1,12$, откуда $a = (b - 1) \cdot 100 = 12$.

Ответ: 12.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Найден верный алгоритм вычисления оставшейся суммы долга, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
Найден верный алгоритм вычисления оставшейся суммы долга, но решение не доведено до конца или имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

20 Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 3|x - a^2| - 5x$$

имеет более двух точек экстремума.

Решение.

При $x \geq a^2$ $f(x) = x^2 - 8x + 3a^2$, поэтому график функции есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 4$.

При $x \leq a^2$ $f(x) = x^2 - 2x - 3a^2$, поэтому график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 1$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках.

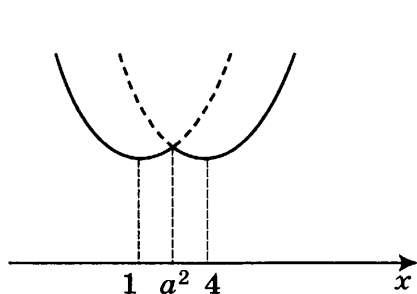


Рис. 1

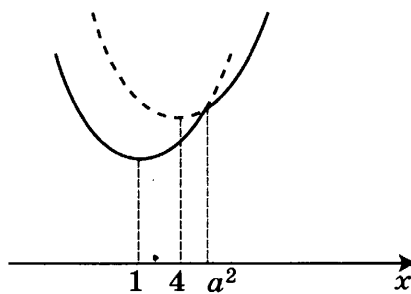


Рис. 2

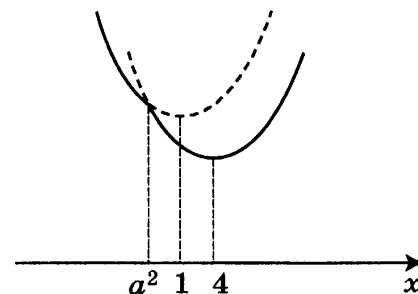


Рис. 3

Обе параболы проходят через точку $(a^2; f(a^2))$.

Функция $y = f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно три, в единственном случае (рис. 1): $1 < a^2 < 4$, откуда $1 < |a| < 2$.

Ответ: $-2 < a < -1$; $1 < a < 2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

21

Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 5, -6, 7, -8, 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 5, -6, 7, -8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

- Может ли в результате получиться 0?
- Может ли в результате получиться 1?
- Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Решение.

а) Среди восьми данных чисел нет противоположных. Значит, сумма чисел на каждой карточке не равна 0. Поэтому всё произведение не может равняться нулю.

б) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, на какой-то карточке попадёт два нечётных числа и их сумма чётная. Поэтому всё произведение чётно и не может равняться 1.

в) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, хотя бы на двух карточках с обеих сторон написаны нечётные числа и сумма чисел на каждой из этих карточек чётная. Поэтому всё произведение делится на 4.

Наименьшее целое положительное число, делящееся на 4, это 4. Оно получится при следующем наборе пар чисел на карточках: (1; -2), (-2; 1), (-3; 5), (5; -3), (-6; 7), (7; -6), (-8; 9), (9; -8).

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Вариант 16

15

а) Решите уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{2}{\operatorname{tg} x} - 3 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Обозначив $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = t$, получаем:

$$t^2 - 2t - 3 = 0;$$

$$t = 3 \text{ или } t = -1;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \text{ или } \operatorname{tg} x = -1.$$

Следовательно, $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ или $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) На отрезке $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ лежат корни $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi, \frac{11\pi}{4}, \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 3\pi$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi; \frac{11\pi}{4}; \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 3\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Тригонометрическое уравнение решено верно, но неверно указаны или не указаны корни, принадлежащие отрезку	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

16

Вокруг куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 2 описана сфера. На ребре CC_1 взята точка M так, что плоскость, проходящая через точки A , B , и M , образует угол 15° с плоскостью ABC .

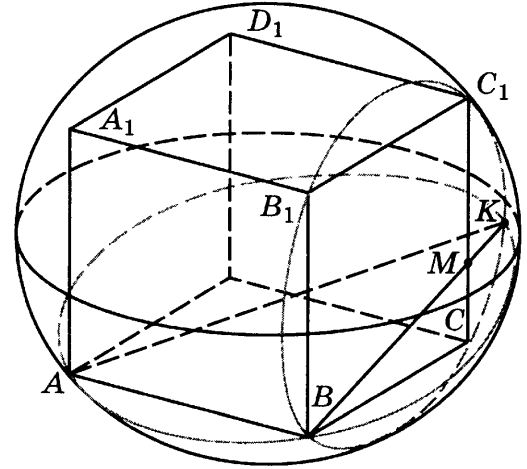
а) Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки A , B , и M .

б) Найдите длину линии пересечения плоскости ABM и сферы.

Решение.

а) Сечение сферы плоскостью является окружностью. Пусть теперь прямая BM вторично пересекает сферу в точке K . Искомая линия — описанная окружность прямоугольного треугольника ABK .

б) Точка K — точка пересечения прямой BM с описанной окружностью квадрата BCC_1B_1 . $\angle BKC_1 = 90^\circ$, так как BC_1 — диаметр окружности, поэтому $BK = BC_1 \cdot \cos \angle MBC_1$. Так как $\angle MBC = 15^\circ$, то $\angle MBC_1 = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$, откуда $BK = BC_1 \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$.



Так как треугольник ABK прямоугольный, то длина описанной вокруг него окружности равна произведению её диаметра AK на число π . Вычисляя $AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = \sqrt{4 + 6} = \sqrt{10}$, получаем ответ $\pi\sqrt{10}$.

Ответ. $\pi\sqrt{10}$.

Содержание критерия	Баллы
Выполнено верное построение в пункте а) и обоснованно найден верный ответ в пункте б)	2
Выполнено верное построение в пункте а) ИЛИ обоснованно найден верный ответ в пункте б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

17

Решите неравенство $9^{x+\frac{1}{9}} - 4 \cdot 3^{x+\frac{10}{9}} + 27 \geq 0$.

Решение.

Пусть $t = 3^{x+\frac{1}{9}}$, тогда неравенство примет вид:

$$t^2 - 12t + 27 \geq 0; (t - 9)(t - 3) \geq 0;$$

откуда $t \leq 3$ или $t \geq 9$.

При $t \leq 3$ получим: $3^{x+\frac{1}{9}} \leq 3$, откуда $x \leq \frac{8}{9}$.

При $t \geq 9$ получим: $3^{x+\frac{1}{9}} \geq 9$, откуда $x \geq \frac{17}{9}$.

Решение исходного неравенства: $x \leq \frac{8}{9}$; $x \geq \frac{17}{9}$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{8}{9}\right]; \left[\frac{17}{9}; +\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

18

Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 34 и 49 соответственно.

- а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.
- б) Найдите длину отрезка этой средней линии, заключённого внутри окружности.

Решение.

а) Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC со сторонами $AB = AC = 34$, $BC = 49$, AH — высота треугольника, точки M и N — середины сторон AB и AC соответственно, K — точка пересечения AH и MN , p — полупериметр треугольника ABC . Поскольку MN — средняя линия равнобедренного треугольника, точка K — общая середина MN и AH .

Из прямоугольного треугольника ABH находим, что

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{49^2 - 17^2} = 8\sqrt{33},$$

значит, $KH = \frac{1}{2}AH = 4\sqrt{33}$.

Пусть r — радиус вписанной окружности треугольника ABC . Тогда

$$r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot AH}{AB + BH} = \frac{17 \cdot 8\sqrt{33}}{49 + 17} = \frac{68\sqrt{33}}{33},$$

а диаметр вписанной окружности равен $2r = \frac{136\sqrt{33}}{33}$. Очевидно, $\frac{136}{33} > 4$, значит

$$2r = \frac{136\sqrt{33}}{33} > 4\sqrt{33} = KH.$$

Следовательно, вписанная окружность пересекает среднюю линию MN треугольника.

б) Пусть вписанная окружность касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно, а средняя линия MN пересекает эту окружность в точках P и Q (P между M и Q). Тогда

$$AD = p - BC = 66 - 34 = 32, MD = AD - AM = 32 - \frac{49}{2} = \frac{15}{2}.$$

По теореме о касательной и секущей $MD^2 = MP \cdot MQ$, а так как

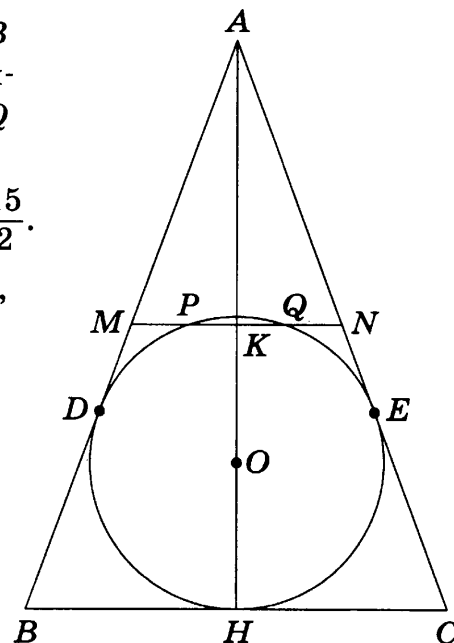
$$MP = NQ = \frac{1}{2}(MN - PQ) = \frac{1}{2}(17 - PQ),$$

$$MQ = MP + PQ = \frac{1}{2}(MN + PQ) = \frac{1}{2}(17 + PQ),$$

то $\frac{225}{4} = \frac{1}{4}(17 - PQ)(17 + PQ)$. Отсюда находим, что

$$PQ = 8.$$

Ответ: 8.



Содержание критерия	Баллы
Имеется доказательство утверждения в пункте а), и обоснованно найден верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно найден верный ответ в пункте б). При этом, возможно, использовалось утверждение из пункта а), хотя пункт а) не выполнен	2
Имеется доказательство утверждения в пункте а)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

19

31 декабря 2014 года Сергей взял в банке 8 420 000 рублей в кредит под 10,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10,5%), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Сергей выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S , а годовые составляют $a\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1 b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1 + b)X.$$

По условию двумя выплатами Сергей должен погасить кредит полностью, поэтому $Sb^2 - (1 + b)X = 0$, откуда $X = \frac{Sb^2}{b + 1}$.

При $S = 8420000$ и $a = 10,5$, получаем: $b = 1,105$ и

$$X = \frac{8420000 \cdot 1,221025}{2,105} = 4884100 \text{ (рублей).}$$

Ответ: 4884100.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Получено верное выражение для суммы платежа, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
Получено выражение для ежегодной выплаты, но уравнение не составлено ИЛИ верный ответ найден подбором	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

20

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $2x^3 + 9x + 3|x + a - 2| + 2|2x - a + 2| + \sqrt[5]{2x - 3} \leq 16$ выполняется для всех значений из отрезка $x \in [-2; 1]$.

Решение.

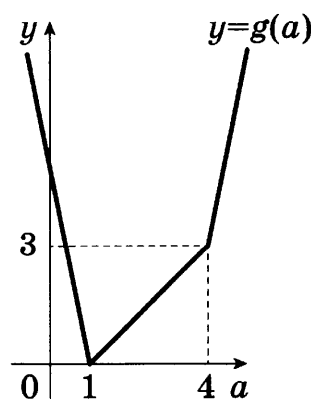
В зависимости от того, как располагается x относительно точек $2 - a$ и $\frac{a - 2}{2}$, модули будут раскрываться по-разному. При этом на каждом участке непрерывная функция $y = 9x + 3|x + a - 2| + 2|2x - a + 2|$ будет линейной с угловым коэффициентом $k = 9 \pm 3 \pm 4$. Какова бы ни была комбинация знаков, $k > 0$. Следовательно, функция

$$f(x) = 2x^3 + 9x + 3|x + a - 2| + 2|2x - a + 2| + \sqrt[5]{2x - 3}$$

монотонно возрастает. К тому же она определена на всей числовой прямой. Поэтому неравенство $f(x) \leq 16$ будет выполнено при всех x на отрезке $[-2; 1]$ тогда и только тогда, когда $f(1) \leq 16$:

$$2 + 9 + 3|a - 1| + 2|a - 4| - 1 \leq 16; \quad 3|a - 1| + 2|a - 4| - 6 \leq 0.$$

Функция $g(a) = 3|a - 1| + 2|a - 4| - 6$ имеет наименьшее значение в точке $a = 1$, и это значение равно $g(1) = 2 \cdot 3 - 6 = 0$. Во всех остальных точках $g(a) > 0$ (см. рисунок). Следовательно, $a = 1$ — единственное значение, при котором выполняется неравенство $f(1) \leq 16$.



Ответ: 1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

21

- а) Приведите пример трёхзначного числа, у которого ровно 7 натуральных делителей.
- б) Существует ли такое трёхзначное число, у которого ровно 21 натуральный делитель?
- в) Сколько существует таких трёхзначных чисел, у которых ровно 18 натуральных делителей?

Решение.

а) Число $729 = 3^6$ имеет ровно 7 натуральных делителей: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729.

б) Да. Подходит число $576 = 2^6 \cdot 3^2$. Натуральное число n является делителем 576 тогда и только тогда, когда $n = 2^k \cdot 3^m$, где k — одно из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6, а m — одно из чисел 0, 1 или 2. Поэтому всего таких чисел $7 \cdot 3 = 21$.

в) Пусть N — некоторое трёхзначное число, равное произведению n чисел: p_1 в степени k_1 , p_2 в степени k_2 , ..., p_n в степени k_n , где p_1, p_2, \dots, p_n — различные простые числа, а k_1, k_2, \dots, k_n — некоторые натуральные числа. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из решения пункта б) получаем, что у такого числа N ровно $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_n + 1)$ натуральных делителей (если $n = 1$, то количество делителей равно $k_1 + 1$).

Следовательно, количество натуральных делителей равно 18 тогда и только тогда, когда имеет место один из следующих случаев: $n = 1$ и $k_1 = 17$; $n = 2$ и набор из чисел k_1, k_2 совпадает с набором из чисел 1, 8; $n = 2$ и набор из чисел k_1, k_2 совпадает с набором из чисел 2, 5; $n = 3$ и набор из чисел k_1, k_2, k_3 совпадает с набором из чисел 1, 2, 2.

В первом случае N имеет вид p^{17} , где p — простое число, что невозможно.

Во втором случае N имеет вид $p \cdot q^8$, где p и q — различные простые числа.

Если $q \geq 3$, то $N \geq 2 \cdot 3^8 > 1000$, что невозможно.

Если $q = 2$, то $N = 256p$, что возможно лишь при $p = 3$. В этом случае возможен 1 вариант.

В третьем случае N имеет вид $p^2 \cdot q^5$, где p и q — различные простые числа. Если $q \geq 5$, то $N \geq 2^2 \cdot 5^5 > 1000$, что невозможно.

Если $q = 3$, то $N = 243p^2$. Так как $100 \leq N < 1000$, то $0,4... \leq p^2 < 4,1...$, что возможно лишь при $p = 2$.

Если $q = 2$, то $N = 32p^2$. Так как $100 \leq N < 1000$, то $3,125 \leq p^2 < 31,25$, что возможно лишь при $p = 3$ или $p = 5$. В этом случае возможны 3 варианта.

В четвёртом случае N имеет вид $p \cdot q^2 \cdot r^2$, где p, q и r — различные простые числа.

Если $qr \geq 23$, то $N \geq 2 \cdot 23^2 > 1000$, что невозможно. Переберём все натуральные числа не большие 22, которые являются произведением двух различных простых чисел.

Если $qr = 2 \cdot 11 = 22$, то $N = 484p$, что невозможно ($p = 2$ не подходит, так как $q = 2$ или $r = 2$).

Если $qr = 3 \cdot 7 = 21$, то $N = 441p$, что возможно лишь при $p = 2$.

Если $qr = 3 \cdot 5 = 15$, то $N = 225p$, что возможно лишь при $p = 2$.

Если $qr = 2 \cdot 7 = 14$, то $N = 196p$, что возможно лишь при $p = 3$ или $p = 5$.

Если $qr = 2 \cdot 5 = 10$, то $N = 100p$, что возможно лишь при $p = 3$ или $p = 7$.

Если $qr = 2 \cdot 3 = 6$, то $N = 36p$. Так как $100 \leq N < 1000$, то $2,7... \leq p < 27,7...$, что возможно лишь при $p = 5, p = 7, p = 11, p = 13, p = 17, p = 19$ или $p = 23$. В этом случае возможны 13 вариантов.

Все случаи разобраны. Следовательно, существует 17 трёхзначных чисел, у которых ровно 18 натуральных делителей.

Ответ: а) 729; б) да; 576; в) 17.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в)	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах б) и в) или в пунктах а) и б)	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте б), пункты а) и в) не решены	2
Приведён пример в пункте а), пункты б) и в) не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Вариант 21

15

а) Решите уравнение $4^x - 2^{x+3} + 7 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1; 4]$.

Решение.

а) Сделав замену $y = 2^x$, получим квадратное уравнение $y^2 - 8y + 7 = 0$. Его корни равны 1 и 7. Следовательно, $x = 0$ или $x = \log_2 7$.

б) Понятно, что 0 не лежит на заданном отрезке. Второй корень принадлежит этому отрезку: $1 < \log_2 7 < 4$, так как $2 < 7 < 2^4 = 16$.

Ответ: а) 0; $\log_2 7$; б) $\log_2 7$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или в пункте б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

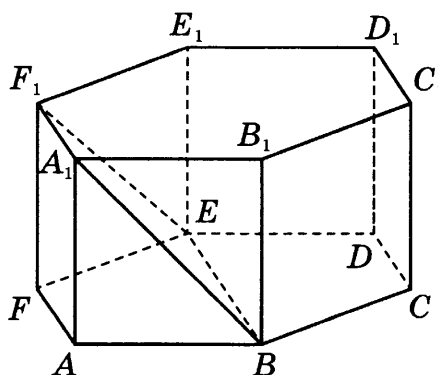
16

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра которой равны 2.

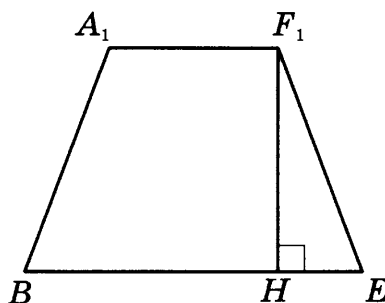
- а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки B , A_1 и F_1 .
 б) Найдите расстояние от точки B до прямой $A_1 F_1$.

Решение.

а) Так как $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, то прямые BE и AF параллельны, параллельны также прямые $A_1 F_1$ и AF , следовательно, прямые $A_1 F_1$ и BE параллельны. Искомым сечением является трапеция $A_1 B E F_1$.



- б) Расстояние от точки B до прямой $A_1 F_1$ равно расстоянию между прямыми $A_1 F_1$ и BE .



В трапеции $BA_1 F_1 E$ $A_1 F_1 = 2$, $BE = 4$, $BA_1 = EF_1 = 2\sqrt{2}$.

$$EH = \frac{BE - A_1 F_1}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1, \text{ тогда } F_1 H = \sqrt{7}.$$

Ответ: $\sqrt{7}$.

Содержание критерия	Баллы
Выполнено верное построение в пункте а) и обоснованно найден верный ответ в пункте б)	2
Выполнено верное построение в пункте а) ИЛИ обоснованно найден верный ответ в пункте б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

17 Решите неравенство $\log_{\frac{3x-4}{x+1}}(2x^2 - 3x) \geq \log_{\frac{3x-4}{x+1}}(17x - 20 - 3x^2)$.

Решение.

$$\begin{cases} \frac{3x-4}{x+1} > 0, \\ 2x^2 - 3x > 0, \\ 17x - 20 - 3x^2 > 0, \\ (2x^2 - 3x - 17x + 20 + 3x^2) \left(\frac{3x-4}{x+1} - 1 \right)^{-1} \geq 0. \end{cases}$$

Из $\frac{3x-4}{x+1} > 0$ получаем: $x < -1$ или $x > \frac{4}{3}$.

Из $2x^2 - 3x > 0$ получаем: $x < 0$ или $x > \frac{3}{2}$.

Из $17x - 20 - 3x^2 > 0$ получаем: $3x^2 - 17x + 20 < 0$, откуда $\frac{5}{3} < x < 4$.

Из $(2x^2 - 3x - 17x + 20 + 3x^2) \left(\frac{3x-4}{x+1} - 1 \right)^{-1} \geq 0$ получаем:

$$5(x^2 - 4x + 4) \left(\frac{2x-5}{x+1} \right)^{-1} \geq 0; \quad \begin{cases} \frac{(x-2)^2(x+1)}{2x-5} \geq 0, \\ x \neq -1; \end{cases} \quad x = 2 \text{ или } x < -1 \text{ или } x > \frac{5}{2}.$$

Следовательно, $x = 2$ или $\frac{5}{2} < x < 4$.

Ответ: $2; \left(\frac{5}{2}; 4 \right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

18

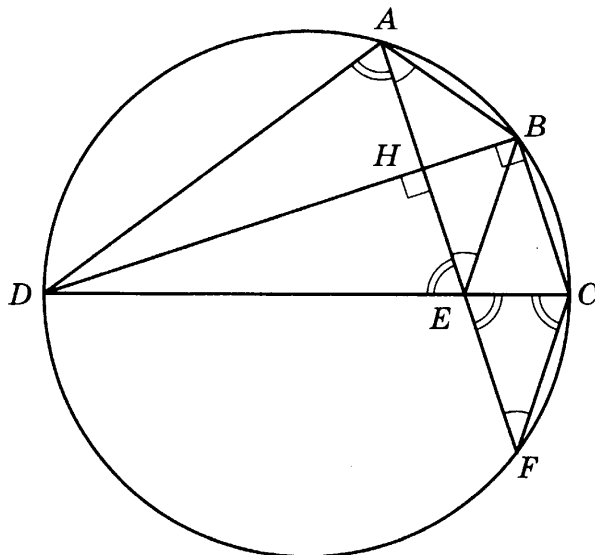
Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E , а окружность — в точке F , причём H — середина AE .

а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 5$ и $AH = 4$.

Решение.

а) Точка B лежит на окружности с диаметром CD поэтому $BC \perp BD$, а т.к. $AF \perp BD$, то $BC \parallel AF$. Трапеция $ABCF$ вписана в окружность, значит, она равнобедренная, $CF = AB$. Высота BH треугольника ABE является его медианой, значит, треугольник ABE равнобедренный, поэтому $BE = AB = CF$, а т.к. $\angle BEA = \angle BAE = \angle CFE$, то $CF \parallel BE$. Противоположные стороны BE и CF четырёхугольника $BCFE$ равны и параллельны, значит, это параллелограмм.



б) Треугольник ADE равнобедренный, т.к. его высота DH является медианой, значит, $\angle CEF = \angle AED = \angle DAE$, а т.к. вписанные углы DCF и DAF опираются на одну и ту же дугу, то

$$\angle ECF = \angle DCF = \angle DAF = \angle DAE = \angle CEF.$$

Следовательно, треугольник CEF равнобедренный, $EF = CF = AB = 5$.

Из прямоугольного треугольника ABH находим, что $BH = 3$, значит, высота параллелограмма $BCFE$ (даже ромба), опущенная из вершины E на сторону BC равна 3.

По теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд $DH \cdot BH = AH \cdot HF$, откуда

$$DH = \frac{AH \cdot HF}{BH} = \frac{4 \cdot 9}{3} = 12, \quad BD = BH + DH = 3 + 12 = 15.$$

Следовательно,

$$S_{ABCD} = S_{ABED} + S_{\Delta BCE} = \frac{1}{2}AE \cdot BD + \frac{1}{2}EF \cdot BH =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 60 + \frac{15}{2} = \frac{135}{2} = 67,5.$$

Ответ: 67,5.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

19

31 декабря 2014 года Антон взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Антон переводит очередной транш. Антон выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 510 тыс. рублей, во второй — 649 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Антону?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S , годовые составляют $a\%$, первая выплата X , а вторая Y . Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1b - Y = (Sb - X)b - Y = Sb^2 - bX - Y.$$

По условию двумя выплатами Антон должен погасить кредит полностью, поэтому $Sb^2 - bX - Y = 0$, откуда $D = X^2 + 4SY = 10^4 \cdot 169^2$, значит

$$b = \frac{X + \sqrt{D}}{2S} = \frac{10^4 \cdot 51 + 10^4 \cdot 169}{2 \cdot 10^4 \cdot 100} = 1,1, \text{ откуда } a = (b - 1) \cdot 100 = 10.$$

Ответ: 10.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Найден верный алгоритм вычисления оставшейся суммы долга, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
Найден верный алгоритм вычисления оставшейся суммы долга, но решение не доведено до конца или имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

20

Найти все значения параметра a , при каждом из которых для любой пары $(u; v)$ действительных чисел u и v выполнено неравенство

$$13\sin u - 7|\sin u + v - 2a| + 3|\sin u - 2v - a - 1| \leq 16.$$

Решение.

Сделаем замену $x = \sin u$. Очевидно, $-1 \leq x \leq 1$. Получаем неравенство:

$$13x - 7|x + v - 2a| + 3|x - 2v - a - 1| \leq 16.$$

При фиксированных v и a рассмотрим левую часть как функцию от x :

$$f(x) = 13x - 7|x + v - 2a| + 3|x - 2v - a - 1|.$$

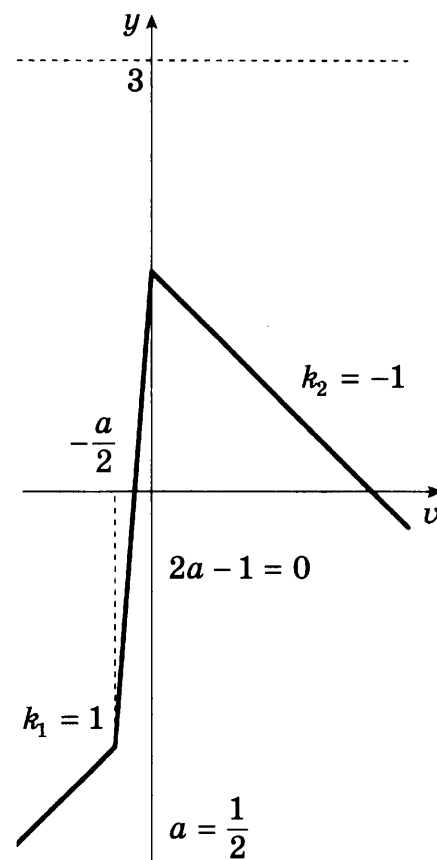
В зависимости от того, как располагается x относительно точек $2a - v$ и $2v + a + 1$, модули будут раскрываться по-разному. При этом на каждом участке непрерывная функция $f(x)$ будет линейной с угловым коэффициентом $k = 13 \pm 7 \pm 3$. Какова бы ни была комбинация знаков, $k > 0$. Следовательно, функция $f(x)$ монотонно возрастает.

Поэтому неравенство $f(x) \leq 16$ выполняется при всех x от -1 до 1 , если и только если $f(1) \leq 16$:

$$13 - 7|v - 2a + 1| + 3|2v + a| \leq 16;$$

$$-7|v - 2a + 1| + 3|2v + a| \leq 3.$$

При малых v (меньше, чем наименьшее из чисел $2a - 1$ и $-\frac{a}{2}$) функция $g(v) = -7|v - 2a + 1| + 3|2v + a|$ — возрастающая линейная с угловым коэффициентом $k_1 = 1$. При больших v (больше, чем максимум из тех же чисел), $g(v)$ — убывающая линейная функция с угловым коэффициентом $k_2 = -1$ (см. рисунок). Поэтому функция $g(v)$ принимает наибольшее значение в одной из точек $2a - 1$



или $-\frac{a}{2}$. Неравенство $g(v) \leq 3$ выполняется при всех v тогда и только тогда, когда $g(2a-1) \leq 3$ и $g\left(-\frac{a}{2}\right) \leq 3$. Получаем:

$$\begin{cases} 3|5a-2| \leq 3, \\ -7\left|\frac{a}{2} + 2a - 1\right| \leq 3. \end{cases}$$

Второе неравенство верно при всех a , а из первого находим:

$$-1 \leq 5a - 2 \leq 1, \text{ откуда } \frac{1}{5} \leq a \leq \frac{3}{5}.$$

Ответ: $[0,2; 0,6]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

21

На доске написано более 35, но менее 49 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 14, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -7 .

- Сколько чисел написано на доске?
- Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
- Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $14k - 7l + 0 \cdot m = 5(k + l + m)$.

а) Заметим, что в левой части каждое слагаемое делится на 7, поэтому $k + l + m$ — количество целых чисел — делится на 7. По условию $35 < k + l + m < 49$, поэтому $k + l + m = 42$. Таким образом, написано 42 числа.

б) Приведём равенство $14k - 7l = 5(k + l + m)$ к виду $9k = 12l + 5m$. Так как $m \geq 0$, получаем, что $12l \leq 9k$, откуда $l < k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) (оценка) Подставим $k + l + m = 42$ в правую часть равенства

$$14k - 7l = 5(k + l + m) : 14k - 7l = 5 \cdot 6 \cdot 7,$$

откуда $l = 2k - 30$. Так как $k + l \leq 42$, получаем:

$$3k - 30 \leq 42, \quad 3k \leq 72, \quad k \leq 24,$$

то есть положительных чисел не более 24.

в) (пример) Приведём пример, когда положительных чисел ровно 24. Пусть на доске 24 раза написано число 14 и 18 раз написано число -7 . Тогда

$$\frac{24 \cdot 14 - 18 \cdot 7}{42} = \frac{24 \cdot 2 - 18}{6} = 5. \text{ Указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.}$$

Ответ: а) 42; б) положительных; в) 24.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены: а), б), в)(пример), в)(оценка)	4
Верно выполнены три пункта из четырёх: а), б), в)(пример), в)(оценка)	3
Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), в)(пример), в)(оценка)	2
Верно выполнен один пункт из четырёх: а), б), в)(пример), в)(оценка)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Вариант 26

15

а) Решите уравнение $\cos 2x - \cos x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

Запишем уравнение иначе:

$$\cos 2x = \cos x.$$

Значит, $2x = x + 2\pi k$ или $2x = -x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $x = 2\pi k$ или $x = \frac{2\pi k}{3}$.

Отрезку $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$ и 2π .

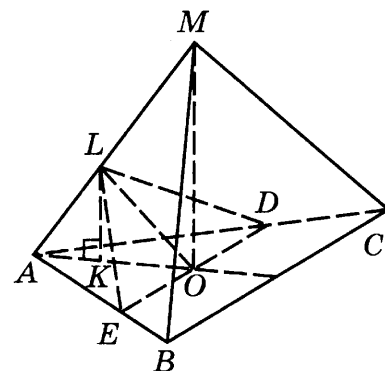
Ответ: а) $\frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$; б) $0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; 2\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Тригонометрическое уравнение решено верно, но неверно указаны или не указаны корни, принадлежащие отрезку	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

16

В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 8. На ребре AC находится точка D , на ребре AB находится точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $CD = BE = AL = 2$.

- а) Докажите, что отрезок DE содержит центр основания пирамиды.
- б) Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E , D и L .



Решение.

а) Пусть O — центр основания пирамиды. В треугольнике ABC имеем $AE : EB = AD : DC = 2 : 1$, значит, отрезок DE делит медиану, проведённую из вершины A , в отношении $2 : 1$, то есть содержит точку O . Кроме того, AO и DE перпендикулярны.

б) Прямая DE перпендикулярна MO и AO , поэтому искомый угол между плоскостями равен углу AOL . Рассмотрим прямоугольный треугольник AMO . В нём $AO = 2\sqrt{3}$. Опустим из точки L перпендикуляр LK на сторону AO . Тогда

$$OK = \frac{3}{4}AO = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad LK = \frac{1}{4}MO = \frac{1}{4}\sqrt{MA^2 - AO^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Значит,
$$\operatorname{tg} \angle AOL = \frac{LK}{OK} = \frac{\sqrt{39}}{9}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{39}}{9}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется доказательство утверждения в пункте а) и обоснованно найден верный ответ в пункте б)	2
Имеется доказательство утверждения в пункте а) ИЛИ обоснованно найден верный ответ в пункте б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

17 Решите неравенство $\log_{|x-1|}(x-2)^2 \leq 2$.

Решение.

Разберём два случая: $|x-1| > 1$ и $0 < |x-1| < 1$.

Первый случай:

$$\begin{cases} |x-1| > 1, \\ 0 < (x-2)^2 \leq (x-1)^2; \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x < 0, \\ x > 2, \end{cases} \\ 2x-3 \geq 0; \end{cases} \quad x > 2.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} 0 < |x-1| < 1, \\ (x-2)^2 \geq (x-1)^2 > 0; \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 1 < x < 2, \end{cases} \\ 2x-3 \leq 0; \end{cases} \quad 0 < x < 1 \text{ или } 1 < x \leq \frac{3}{2}.$$

Решение неравенства: $0 < x < 1$, $1 < x \leq \frac{3}{2}$ или $x > 2$.

Ответ: $(0; 1)$; $\left(1; \frac{3}{2}\right]$; $(2; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

18 Внеписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на основание.

б) Известно, что радиус этой окружности в 6 раз больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

Решение.

а) Пусть вписанная окружность с центром O касается боковой стороны AB и основания BC равнобедренного треугольника ABC в точках M и H , а окружность с центром O_1 касается боковой стороны AB , продолжения основания BC в точке D и продолжения боковой стороны AC в точке E . Тогда AH — высота треугольника ABC .

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO_1 — биссектриса угла BAE . В четырёхугольнике $AHDO_1$ угол HAO_1 — прямой как угол между биссектрисами смежных углов BAC и BAE , а так как $\angle HDO_1 = \angle AHD = 90^\circ$, то $AHDO_1$ — прямоугольник, поэтому $O_1D = AH$.

б) Пусть радиус окружности с центром O равен r . Тогда радиус окружности с центром O_1 равен $6r$.

$$AH = O_1D = 6r, OA = AH - OH = 6r - r = 5r.$$

Из прямоугольного треугольника AOM находим, что

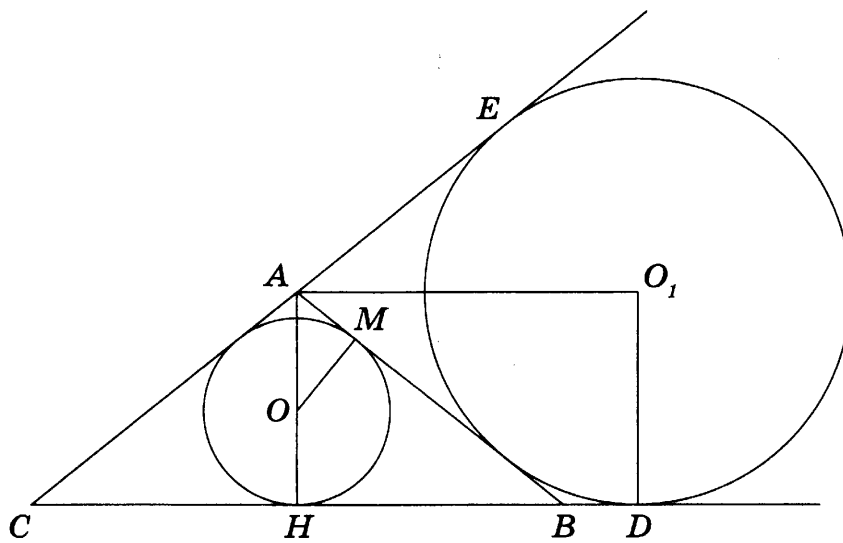
$$AM = \sqrt{AO^2 - OM^2} = \sqrt{25r^2 - r^2} = 2r\sqrt{6}.$$

Прямоугольные треугольники AOM и ABH подобны по двум углам, поэтому

$$\frac{AM}{OM} = \frac{AH}{BH}, \text{ откуда } BH = \frac{OM \cdot AH}{AM} = \frac{r \cdot 6r}{2r\sqrt{6}} = \frac{r\sqrt{6}}{2}.$$

По теореме об отрезках касательных, проведённых к окружности из одной

точки, $BM = BH = \frac{r\sqrt{6}}{2}$. Следовательно, $\frac{BM}{AM} = \frac{\frac{r\sqrt{6}}{2}}{2r\sqrt{6}} = \frac{1}{4}$.



Ответ: 1:4.

Содержание критерия	Баллы
Имеется доказательство утверждения в пункте а), и обоснованно найден верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно найден верный ответ в пункте б). При этом, возможно, использовалось утверждение из пункта а), хотя пункт а) не выполнен	2
Имеется доказательство утверждения в пункте а)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

19

Матвей хочет взять в кредит 1,4 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Матвей взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320 тысяч рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S , а годовые составляют $a\%$. Тогда в последний день каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$.

Составим таблицу выплат.

Год	Долг банку (руб.)	Остаток после транша (руб.)
0	1400000	—
1	1540000	1220000
2	1342000	1022000
3	1124200	804200
4	884620	564620
5	621082	301082
6	331190,2	11190,2
7	12309,22	0

Значит, Матвей погасит кредит за 7 лет.

Ответ: 7.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Найден верный алгоритм вычисления оставшейся суммы долга, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
Найден верный алгоритм вычисления оставшейся суммы долга, но решение не доведено до конца или имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

20

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a + 5)^2 = |x + a + 5| + |x - a - 5|$$

имеет ровно три корня.

Решение.

Уравнение не изменится, если заменить x числом $-x$. Следовательно, уравнение имеет чётное число ненулевых решений. Значит, три решения уравнение имеет только тогда, когда одно из них 0. Подставим $x = 0$. Получим:

$$(a + 5)^2 = 2|a + 5|, \text{ откуда } a + 5 = 0 \text{ или } |a + 5| = 2.$$

Если $a + 5 = 0$, уравнение принимает вид $x^2 = 2|x|$ и имеет ровно три решения $-2, 0$ и 2 . Из $a + 5 = 0$ получаем: $a = -5$.

Если $|a + 5| = 2$, уравнение принимает вид $x^2 + 4 = |x + 2| + |x - 2|$.

При $-2 \leq x \leq 2$ уравнение имеет единственное решение 0 , при $x > 2$ уравнение принимает вид $x^2 - 2x + 4 = 0$ и не имеет решений. Аналогично, решений нет при $x < -2$. Значит, если $|a + 5| = 2$, то уравнение имеет единственное решение.

Графические интерпретации обоих случаев показаны на рисунках 1 и 2.

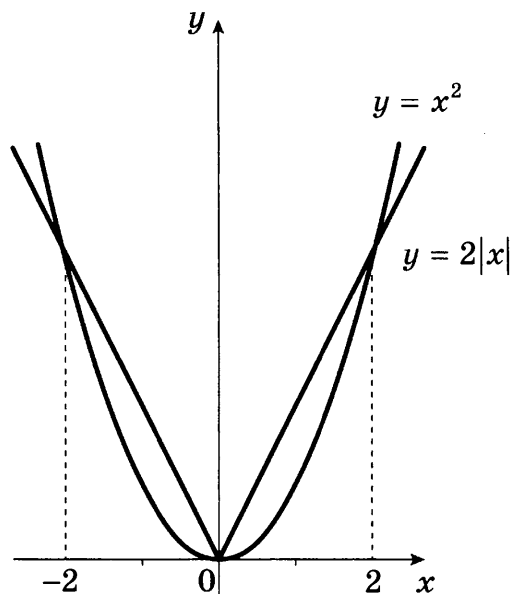
1) $|a + 5| = 0$

Рис. 1

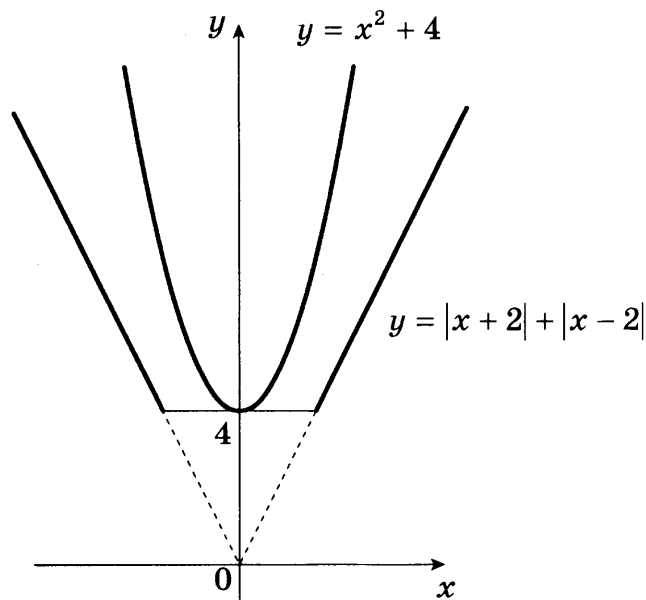
2) $|a + 5| = 2$

Рис. 2

Ответ: $a = -5$.

Содержание критерия	Баллы
В представленном решении обоснованно получен верный ответ	4
Ход решения верный, однако имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	3
Верно найдены все значения параметров, но не учтены знаки	2
Найдены значения x и только одна серия значений y	1
Исследование системы на количество решений ошибочно. Логика решения отсутствует либо ошибочна	0

21

Назовём натуральное число палиндромом, если в его десятичной записи все цифры расположены симметрично (совпадают первая и последняя цифры, вторая и предпоследняя, и т.д.). Например, числа 121 и 953359 являются палиндромами, а числа 10 и 953953 не являются палиндромами.

а) Приведите пример числа-палиндрома, которое делится на 45.

б) Сколько существует пятизначных чисел-палиндромов, делящихся на 45?

в) Найдите десятое по величине число-палиндром, которое делится на 45.

Решение.

а) Например, число $585 = 13 \cdot 45$.

б) Пусть десятичная запись пятизначного числа n имеет вид $abcba$, где a , b и c — некоторые цифры, $a \neq 0$. Это число делится на 45 тогда и только тогда, когда оно делится на 5 и на 9. По признакам делимости на 5 и на 9 получаем, что этому условию удовлетворяют те и только те числа n , для которых a равно 5 и $2a + 2b + c$ делится на 9. Значит, $2b + c$ должно давать остаток 8 при делении на 9. Следовательно, $2b + c$ может равняться 8, 17 или 26.

Если $2b + c = 8$, то $b = 0$, $c = 8$, или $b = 1$, $c = 6$, или $b = 2$, $c = 4$, или $b = 3$, $c = 2$, или $b = 4$, $c = 0$ — всего 5 вариантов.

Если $2b + c = 17$, то $b = 4$, $c = 9$, или $b = 5$, $c = 7$, или $b = 6$, $c = 5$, или $b = 7$, $c = 3$, или $b = 8$, $c = 1$ — всего 5 вариантов.

Если $2b + c = 26$, то $b = 9$, $c = 8$ — всего 1 вариант.

Значит, всего существует 11 пятизначных чисел-палиндромов, делящихся на 45.

в) Заметим, что делящихся на 45 двузначных и однозначных чисел-палиндромов не существует. Если трёхзначное число-палиндром имеет десятичную запись aba и делится на 45, то $a = 5$ и $2a + b$ делится на 9. Значит, b при делении на 9 даёт в остатке 8. Есть всего один вариант — число 585.

Если четырёхзначное число имеет десятичную запись $abba$ и делится на 45, то $a = 5$ и $2a + 2b$ делится на 9. Тогда $5 + b$ делится на 9. Есть всего один вариант — число 5445.

Как доказано в решении пункта б, существует 11 пятизначных чисел-палиндромов с десятичной записью $abcba$, делящихся на 45. У всех этих чисел $a = 5$. У самого большого из них $b = 9$, $c = 8$ — это тринадцатое по величине число-палиндром, делящееся на 45. Случаям $b = 8$, $c = 1$; $b = 7$, $c = 3$ соответствуют 12-ое и 11-ое по величине числа соответственно. Десятым, по величине делящимся на 45 числом-палиндромом является число 56565.

Ответ: а) 585; б) 11; в) 56565.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в)	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах б) и в) или в пунктах а) и б)	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте б), пункты а) и в) не решены	2
Приведён пример в пункте а), пункты б) и в) не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Вариант 31

15

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

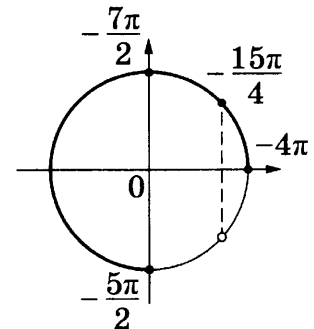
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде $2\cos^2 x - 1 - \sqrt{2} \cos x + 1 = 0$;
 $2\cos^2 x - \sqrt{2} \cos x = 0$; $\cos x \cdot (2\cos x - \sqrt{2}) = 0$.

Значит, или $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда
 $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-\frac{15\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{15\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или в пункте б) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

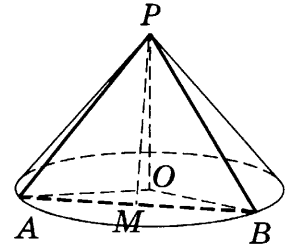
16

Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 7. На окружности основания конуса выбраны точки A и B , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1:2.

- а) Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через точки A , B и P .
б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP .

Решение.

а) Пусть O — центр основания конуса, M — середина хорды AB . Дуга AB составляет треть окружности основания, поэтому $\angle AOB = 120^\circ$. Равнобедренный треугольник APB — искомое сечение.



б) Треугольник AOB равнобедренный, следовательно,

$$AB = 2AM = 2AO \cdot \sin \frac{\angle AOB}{2} = 6\sqrt{3}.$$

Отрезок PM — высота треугольника APB , $PM = \sqrt{AP^2 - AM^2} = \sqrt{22}$. Площадь искомого сечения равна $\frac{1}{2}PM \cdot AB = 3\sqrt{66}$.

Ответ: $3\sqrt{66}$.

Содержание критерия	Баллы
Выполнено верное построение в пункте а) и обоснованно найден верный ответ в пункте б)	2
Выполнено верное построение в пункте а) ИЛИ обоснованно найден верный ответ в пункте б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

17

Решите неравенство $4^{x-\frac{1}{2}} - 17 \cdot 2^{x-2} + 2 \leq 0$.

Решение.

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$2t^2 - 17t + 8 \leq 0; (2t - 1)(t - 8) \leq 0,$$

откуда $\frac{1}{2} \leq t \leq 8$; $\frac{1}{2} \leq 2^x \leq 8$; $-1 \leq x \leq 3$.

Решение неравенства: $-1 \leq x \leq 3$.

Ответ: $[-1; 3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

18

Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O . На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$.

а) Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$, если

$$\cos \angle BAC = \frac{5}{13}, \text{ а } BC = 72.$$

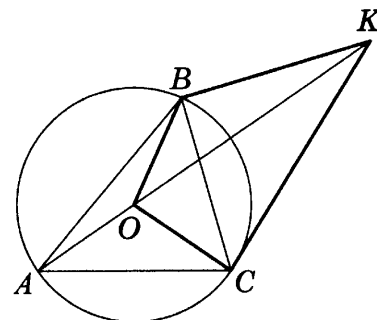
Решение.

а) Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle OKC = \angle AKC = 90^\circ - \alpha$ и $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$. Треугольник BOC равнобедренный, следовательно,

$$\angle OBC = \angle OCB = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha;$$

$$\angle OBC = \angle OKC.$$

Получаем, что точки O, B, K и C лежат на одной окружности. Следовательно, четырёхугольник $OBKC$ вписанный.



б) По условию $\cos \angle BAC = \frac{5}{13}$, поэтому $\sin \angle BAC = \frac{12}{13}$. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен

$$OC = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = \frac{72}{2 \cdot \frac{12}{13}} = 39.$$

Пусть R — радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$. В треугольнике OCK имеем:

$$R = \frac{OC}{2 \sin \angle OKC} = \frac{OC}{2 \sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{OC}{2 \cos \alpha} = \frac{39}{2 \cdot \frac{5}{13}} = 50,7.$$

Ответ: 50,7.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Окончание табл.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

19

31 декабря 2014 года Тимофей взял в банке 7 007 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг Тимофей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S , а годовые составляют $a\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b=1+0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1 b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1+b)X.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = Sb^3 - (1+b+b^2)X = Sb^3 - \frac{b^3-1}{b-1} \cdot X.$$

По условию тремя выплатами Тимофей погасил кредит полностью, поэтому $Sb^3 - \frac{b^3-1}{b-1} \cdot X = 0$, откуда $X = \frac{Sb^3(b-1)}{(b^3-1)}$.

Рассуждая аналогично, находим, что если бы Тимофей гасил долг двумя равными выплатами, то каждый год он должен был бы выплачивать $Y = \frac{Sb^2}{b+1}$ рублей.

Значит, он отдал банку на $3X - 2Y$ рублей больше.

При $S = 7007000$ и $a = 20$, получаем: $b = 1,2$ и

$$X = \frac{7007000 \cdot 1,728 \cdot 0,2}{0,728} = 3326400 \text{ (рублей).}$$

$$Y = \frac{7007000 \cdot 1,44}{0,2} = 4586400 \text{ (рублей).}$$

Значит, $3X - 2Y = 806400$.

Ответ: 806400.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Получено верное выражение для суммы платежа, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
Получено выражение для ежегодной выплаты, но уравнения не составлены ИЛИ верный ответ найден подбором	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

20

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left((a-1)x^2+3x\right)^2-2\left((a-1)x^2+3x\right)+1-a^2=0$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Пусть $t = (a-1)x^2+3x$, тогда уравнение запишется в виде $t^2-2t+1-a^2=0$, откуда $t = a+1$ или $t = 1-a$. Значит, решения исходного уравнения — это решения уравнений $(a-1)x^2+3x = a+1$ или $(a-1)x^2+3x = 1-a$.

Исследуем, сколько решений имеет уравнение $(a-1)x^2+3x = b$ в зависимости от a и b . При $a \neq 1$ уравнение принимает вид $(a-1)x^2+3x - b = 0$. Это квадратное уравнение, дискриминант которого равен $9+4(a-1)b$. Таким образом, уравнение $(a-1)x^2+3x = b$ имеет два решения при $(a-1)b > -\frac{9}{4}$, одно решение при $(a-1)b = -\frac{9}{4}$ и не имеет решений при $(a-1)b < -\frac{9}{4}$. При $a = 1$ уравнение принимает вид $3x = b$ и имеет одно решение.

Уравнения $(a-1)x^2+3x = a+1$ и $(a-1)x^2+3x = 1-a$ могут иметь общие решения при $a+1 = 1-a$, то есть при $a = 0$. При $a = 0$ оба уравнения принимают вид $-x^2+3x = 1$ и имеют два решения.

При других значениях a исходное уравнение имеет ровно два решения, если либо оба уравнения $(a-1)x^2+3x = a+1$ и $(a-1)x^2+3x = 1-a$ имеют по одному решению, либо одно из них не имеет решений, а другое имеет два решения. При $a = 1$ каждое из этих уравнений имеет единственное решение и эти решения различны. При других значениях a выполнено неравенство $a^2-1 > -\frac{9}{4}$, поэтому уравнение $(a-1)x^2+3x = a+1$ имеет два решения. Уравнение $(a-1)x^2+3x = 1-a$ не имеет решений при $(a-1)^2 > \frac{9}{4}$, то есть при $a < -\frac{1}{2}$ и при $a > \frac{5}{2}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения при $a < -\frac{1}{2}$; $a = 0$; $a = 1$; $a > \frac{5}{2}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$; 0 ; 1 ; $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающиеся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

21

На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

- а) Всего проголосовало 15 посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным 41?
- б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трёх футболистов. Могло ли быть так, что все три футболиста получили разное число голосов, но их рейтинги одинаковы?
- в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 3. Это число не изменилось и после того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста. При каком наименьшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

Решение.

а) Если рейтинг футболиста на сайте равен 41, то доля голосов, отданных за него, находится в границах от 0,405 до 0,415. Поскольку всего проголосовало 15 посетителей сайта, получаем, что количество голосов, отданных за этого футболиста, не меньше $15 \cdot 0,405 = 6,075$, но меньше $15 \cdot 0,415 = 6,225$. Это противоречит целочисленности количества отданных голосов.

б) Например, если за одного футболиста было отдано 299 голосов, за другого — 300, а за третьего — 301 голос, то доли голосов, отданных за этих футболистов, равны $\frac{299}{900} = 0,332\dots$, $\frac{300}{900} = 0,333\dots$ и $\frac{301}{900} = 0,334\dots$ соответственно. Значит, рейтинг каждого из них равен 33.

в) Пусть проголосовало N посетителей сайта, включая Васю, среди которых k предпочли того же футболиста, что и Вася. Условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда N и k удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{2,5}{100} \leq \frac{k}{N} < \frac{3,5}{100}, \\ \frac{2,5}{100} \leq \frac{k-1}{N-1} < \frac{3,5}{100}; \end{cases} \begin{cases} 5N \leq 200k < 7N, \\ 5N + 195 \leq 200k < 7N + 193; \quad 5N + 195 \leq 200k < 7N. \end{cases}$$

Значит, $5N + 195 < 7N$; $N \geq 98$.

Пусть $N = 98 + x$, где x — неотрицательное целое число. Тогда

$$685 + 5x \leq 200k < 686 + 7x.$$

Имеем $k \geq 4$, поэтому $800 < 686 + 7x$; $x \geq 17$; $N = 98 + x \geq 115$.

Для чисел $N = 115$ и $k = 4$ выполнено условие задачи. Значит, наименьшее число, удовлетворяющее условию задачи, — это 115.

Ответ: а) нет; б) да; в) 115.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в)	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах б) и в) или в пунктах а) и б)	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте б), пункты а) и в) не решены	2
Приведён пример в пункте а), пункты б) и в) не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Издание для дополнительного образования

ЕГЭ. ФИПИ — школе

ЕГЭ. МАТЕМАТИКА

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВАРИАНТЫ 36 ВАРИАНТОВ

Под редакцией Ивана Валерьевича Ященко

Главный редактор *И. Федосова*
Ответственный редактор *О. Чеснокова*
Художественный редактор *М. Костенко*
Технический редактор *Н. Лисицына*
Компьютерная вёрстка *Т. Преображенская*

ООО «Издательство «Национальное образование»
119021, Москва, ул. Россолимо, д. 17, стр. 1, тел. (495)788-0075(76)

Свои пожелания и предложения по качеству и содержанию книг
Вы можете направлять по эл. адресу editorial@n-obr.ru.

Подписано в печать 03.09.2014. Формат 60×90¹/₈.
Усл. печ. л. 34,0. Печать офсетная. Бумага типографская.
Тираж 120 000 экз. Заказ № 38886 (К-см).

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»
ОАО «Издательство «Высшая школа»
214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1
Тел.: +7 (4812) 31-11-96. Факс: +7 (4812) 31-31-70
E-mail: spk@smolpk.ru <http://www.smolpk.ru>