готовимся к ЕГЭ

ЕГЭ

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ЭКСПРЕСС-ПОДГОТОВКА

ЕГЭ-2015

Задания с кратким ответом

Все задания и методы их решения

ТМ
ЛЕГИОН

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ-2015

ЭКСПРЕСС-ПОДГОТОВКА: ЗАДАНИЯ С КРАТКИМ ОТВЕТОМ

Все задания и методы их решения

Учебно-методическое пособие

ТМ

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2014

ББК 22.1
К 65

Рецензент:

Л. Н. Евич — кандидат физико-математических наук, доцент

Коннова Е. Г.

К 65 Математика. ЕГЭ-2015. Экспресс-подготовка: задания с кратким ответом. Все задания и методы их решения / Е. Г. Коннова, А. П. Дрёмов, С. О. Иванов, В. А. Шеховцов; под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2014. — 384 с. — (Готовимся к ЕГЭ).

ISBN 978-5-9966-0580-4

Материал, представленный в этой книге, предназначен для **формирования устойчивых навыков в решении задач с кратким ответом** на ЕГЭ по математике. Содержимое пособия соответствует проекту спецификации ЕГЭ-2015 (профильный уровень), опубликованному на сайте ФИПИ 30.08.2014. Для наглядности нумерация заданий сохранена в соответствии с планом прошедшего экзамена ЕГЭ-2014.

Пособие состоит из 3 частей:

1. Арифметика и алгебра (материал 5 – 9 классов).
2. Алгебра и начала анализа (материал 7 – 11 классов).
3. Геометрия (материал 7 – 11 классов).

Каждая часть включает в себя:

- диагностические работы;
- краткие теоретические сведения;
- подробный разбор типовых задач, предлагаемых на ЕГЭ;
- варианты для самостоятельного решения по каждой рассмотренной теме;
- варианты обобщающих тренировочных тестов в конце каждой части книги.

Пособие входит в **учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»**.

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0580-4

Оглавление

Часть 2. Алгебра и начала анализа. Материал 10 – 11 классов 116

От авторов

Предлагаемое пособие входит в учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ», выпускаемый издательством «Легион». Пособие предназначено для подготовки к ЕГЭ-2015 и может быть использовано как в 11-м, так и в 10-м классе. Оно адресовано учащимся общеобразовательных учреждений, учителям, ученикам вечерних школ, выпускникам учреждений профобразования и всем тем, кто собирается сдавать ЕГЭ после перерыва в обучении.

Пособие написано в соответствии с проектом спецификации ЕГЭ-2015 (профильный уровень), представленном на сайте ФИПИ 30.08.2014. Тем не менее для наглядности нумерация заданий дана в соответствии с планом прошедшего экзамена ЕГЭ-2014.

Прежде всего это **самоучитель** и **тренажёр** для тех, кто хочет научиться выполнять задания с кратким ответом без репетитора. Также эта книга может использоваться для **контроля** умений решать задачи при повторении курса математики в рамках подготовки к ЕГЭ.

Материал, представленный в этой книге, служит для формирования **устойчивых навыков в решении задач базового уровня**. Не секрет, что большинство выпускников, даже получивших на ЕГЭ высокий балл, допускают по 2 – 3, а иногда и больше ошибок именно в части 1 предлагаемого теста, хотя большинство задач этой части решается устно. Причина — отсутствие упомянутых выше навыков.

Воспользовавшись этой книгой, вы научитесь безошибочно выполнять указанные выше задания и сэкономите время для решения более сложных задач.

Книга состоит из 3 частей: арифметика и алгебра; алгебра и начала анализа; геометрия.

Материал, необходимый для решения заданий 1-й части, уже был пройден в основной (средней) школе, поэтому работу с книгой можно начинать с 10-го класса. К работе со 2-й частью книги следует приступать после изучения соответствующих тем. 3-я часть книги предназначена для подготовки к решению заданий ЕГЭ по планиметрии и стереометрии.

Каждый из параграфов пособия посвящён решению 1 – 2 прототипов заданий традиционной части В и включает в себя диагностическую работу, разбор решений типовых задач, подобных приведённым в открытом банке заданий ЕГЭ*, а также варианты для самостоятельного выполнения. Кроме того, в конце каждой из частей книги приведены **обобщающие тренировочные тесты**. Каждый вариант рекомендуем выполнять в течение 30 минут, затем проверить правильность решения с помощью ответов, приведённых в конце пособия. Если ответы не совпадут, попробуйте ещё раз решить задачу, а при необходимости найдите подобную среди разобранных примеров.

Комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ» издательства «Легион»:

- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Книга 1.
- Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2015. Книга 1.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015 (профильный уровень). Книга 2.
- Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2015 (профильный уровень). Книга 2.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015 (базовый уровень). Учебно-тренировочные тесты.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Теория вероятностей.
- Математика. ЕГЭ-2015. Экспресс-подготовка: задания с кратким ответом. Все задания и методы их решения.
- Математика. Профильный уровень ЕГЭ-2015. Тренажёр по тригонометрии (задание С1).
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015 (профильный уровень). Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы (С1, С3).
- Математика. 11-й класс. Повторение материала средней школы и подготовка к итоговой аттестации. Интенсивный курс для учителей и обучающихся.

---

*См. сайт http://mathege.ru/or/ege/Main

- Математика. 10–11 классы. Тренажёр для подготовки к ЕГЭ: алгебра, планиметрия, стереометрия.
- Математика. 7 – 11 классы. Карманный справочник.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней (С1).
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Решение задач по стереометрии методом координат (задание С2).
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Задание С2. Многогранники: типы задач и методы их решений.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: решаем С3 методом рационализации.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: задание С3. Решение неравенств с одной переменной.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: решение планиметрических задач (С4).
- Математика. Учимся решать задачи с параметром. Подготовка к ЕГЭ: задание С5.
- Геометрия. Подготовка к ЕГЭ и ГИА-9. Учимся решать задачи и повторяем теорию.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: секреты оценки заданий части С. Решения и комментарии.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: математический бой. Задания частей В и С.

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно прислать почтой или на электронный адрес: `legionrus@legionrus.com`.

Обсудить пособие, оставить свои замечания и предложения, задать вопросы можно на официальных форумах издательства:
`http://f.legionr.ru`,
`http://legion-posobiya.livejournal.com`.

Желаем успехов на экзамене!

Часть 1.
Арифметика и алгебра.
Материал 5 – 9 классов

Практический расчёт, оценка и прикидка (B1, B2)

Диагностическая работа

1. Папа покупает игрушки по 76 рублей за штуку. Какое наибольшее число игрушек он может купить на 1300 рублей, если он должен купить чётное число игрушек?

2. Рост Генри 5 футов 8 дюймов. Выразите его рост в сантиметрах, если 1 фут равен 0,305 м, а 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

3. В пачке 250 гвоздей. За неделю в мастерской расходуется 900 гвоздей. Какое наименьшее количество пачек гвоздей нужно купить в мастерскую на 7 недель?

4. В супермаркете килограмм яблок стоит 25 рублей. Мама купила 2 кг 200 г яблок. Сколько рублей сдачи она должна получить со 100 рублей?

5. Большой рак стоит 5 рублей, а стоимость маленького рака составляет 60% от стоимости большого. Сколько будут стоить 6 крупных и 12 мелких раков?

6. Билет в кинотеатр стоит 50 рублей. Какое наибольшее число билетов можно будет купить на 850 рублей после понижения цены на 25%?

7. Магазин закупает тарелки по оптовой цене 20 рублей за штуку и продаёт с наценкой 30%. Какое наибольшее число таких тарелок можно купить в этом магазине на 140 рублей?

8. Цена на холодильник была повышена на 10% и составила 11 550 рублей. Сколько рублей стоил холодильник до повышения цены?

Задачи с целочисленным ответом

Немного полезной информации

В ответе на эти задачи надо писать целое число (количество автобусов, число банок с краской, число пачек сахара и т.д.). Нужно самому подумать, в бо́льшую или меньшую сторону округлять результат вычислений.

- *Пример 1.*

  Если для перевозки детей нужно 5,3 автобуса, то округлять будем в бо́льшую сторону (6 автобусов). Иначе автобусов просто не хватит.

- *Пример 2.*

  Если денег хватает на 12,8 пачек сахара, то нам продадут всего 12 пачек, и у нас останется сдача.

Иногда в условии может требоваться округление по математическим правилам. Если в округляемом числе цифра десятых (первая цифра, стоящая после запятой) меньше 5, то число округляется в меньшую сторону, то есть все цифры после запятой отбрасываются. Например: $14{,}298 \approx 14$. Если в округляемом числе цифра десятых больше или равна 5, то число округляется в бо́льшую сторону, то есть к числу единиц прибавляется 1. Например: $14{,}51 \approx 15$.

Задачи с решениями

1. Роза стоит 45 рублей. Сергей хочет подарить Свете букет из нечётного количества цветов. Из какого наибольшего числа роз он может купить букет, если у него есть 550 рублей?

Решение.

1-й способ.

Определим, сколько роз можно купить на 550 рублей. Для этого разделим с остатком 550 (деньги Сергея) на 45 (цена розы).

$550 : 45 = 12$ (ост. 10). Денег у Сергея хватит на 12 роз и 10 рублей останется. Но букет из 12 роз нам не подходит! Нужно нечётное число роз. Наибольшее подходящее число — это 11.

Ответ: 11.

2-й способ.

10 роз стоят 450 рублей, при этом у Сергея останется 100 рублей. На 100 рублей можно купить не более двух роз. Поэтому всего можно купить не больше 12 роз. Число 12 — чётное, не подходит по условию. Значит, наибольшее количество роз в букете — это 11.

Ответ: 11.

2. В пачке бумаги 250 листов формата А4. За месяц в школе используется 1200 листов. Какое наименьшее число пачек бумаги нужно купить в школу на 3 месяца?

Решение.

За месяц в школе используется 1200 листов бумаги, поэтому за 3 месяца израсходуют $1200 \cdot 3 = 3600$ листов. В каждой пачке 250 листов, поэтому необходимо $3600 : 250 = 14{,}4$ пачек. Ясно, что дробное число пачек никто продавать не станет, поэтому придётся купить 15 пачек бумаги.

Ответ: 15.

3. В магазине проходит рекламная акция: при покупке двух пакетов яблочного сока покупатель получает ещё один пакет сока в подарок. Какое наибольшее число пакетов яблочного сока можно получить на 200 рублей, если цена одного пакета сока составляет 34 рубля?

Решение.

Посчитаем, сколько пакетов яблочного сока (по 34 рубля за пакет) можно купить на 200 рублей. Для этого делим с остатком наши деньги (200 рублей) на цену пакета (34 рубля). $200 : 34 = 5$ (ост. 30). Получилось 5 пакетов сока. В рамках рекламной акции покупатель получит за 4 пакета ещё 2 пакета бесплатно. Всего он сможет получить $5+2 = 7$ пакетов сока.

Ответ: 7.

4. Для приготовления мармелада на 1 кг слив нужно 1,4 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить мармелад из 23 кг слив?

Решение.

На 1 кг слив нужно 1,4 кг сахара, поэтому на 23 кг слив нужно $23 \cdot 1{,}4 = 32{,}2$ кг сахара. В одной упаковке один килограмм, поэтому 32 упаковок не хватит. А 33 будет в самый раз.

Ответ: 33.

5. Автобус Москва — Таганрог отправляется в 10:50, а прибывает в 6:50 на следующий день (время московское). Сколько часов автобус находится в пути?

Решение.

Так как минуты времени отправления и прибытия одинаковые, можно их уменьшить и заменить на 00. Нужно посчитать, сколько часов пройдёт от 10:00 до 6:00 следующего дня. В первый день пройдет $24 - 10 = 14$ часов, во второй — ещё 6 часов, всего $14 + 6 = 20$ часов.

Ответ: 20.

6. Урок в школе длится 45 минут. Перемены после второго и третьего уроков длятся 15 минут, а после всех остальных уроков — 10 минут. Определите, в котором часу заканчивается 5-й урок, если 1-й начинается в 8 ч 25 мин.

Решение.

1-й способ.

Посчитаем сначала общую длительность пяти уроков по 45 минут. Она равна $45 \cdot 5 = 225$ минут. После 2-го и 3-го уроков перемены по 15 минут, всего 30 минут. После 1-го и 4-го уроков перемены по 10 минут, ещё 20 минут. Всего длительность перемен: $30 + 20 = 50$ минут. Общее время: $225 + 50 = 275$ минут. Переведём в часы и минуты: $275 : 60 = 4$ (остаток 35), поэтому 275 мин = 4 ч 35 мин. Начинаются уроки в 8 ч 25 мин, тогда 5-й урок заканчивается в 8 ч 25 мин + 4 ч 35 мин = 12 ч 60 мин = 13 ч.

Ответ: 13.

2-й способ.

Можно просто восстановить расписание:

1-й урок 8.25 – 9.10
2-й урок 9.20 – 10.05
3-й урок 10.20 – 11.05
4-й урок 11.20 – 12.05
5-й урок 12.15 – 13.00

Ответ: 13.

7. В отделении больницы находятся 25 больных, которым врач назначил уколы лекарства по 2,5 мл. Уколы нужно делать 3 раза в день. В упаковке 16 ампул лекарства по 2,5 мл. Какое наименьшее количество упаковок нужно заказать на один день?

Решение.

Посчитаем, сколько ампул понадобится 25 больным в день: $25 \cdot 3 = 75$ ампул. В каждой упаковке 16 ампул. Чтобы узнать требуемое число упаковок, делим с остатком необходимое количество ампул (75) на число ампул в упаковке (16). Получаем $75 : 16 = 4$ (ост. 11). Итак, нужно 4 упаковки и ещё 11 ампул. Поэтому придётся заказать 5 упаковок.

Ответ: 5.

8. На складе 217 бочек с краской и 315 бочек с эмалью. Сколько потребуется машин, чтобы перевезти все бочки со склада в магазин, если в машину помещается не более 85 бочек?

Решение.

Всего на складе $217 + 315 = 532$ бочки. Чтобы получить число машин, делим с остатком общее число бочек (532) на число бочек в одной машине (85). Получаем $532 : 85 = 6$ (остаток 22). Итак, 6 машин не хватит, значит, нужно 7 машин.

Ответ: 7.

9. В американских автомобилях скорость на спидометре измеряется в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 47 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

Решение.

Одна американская миля равна 1609 м = 1,609 км. Скорость автомобиля 47 миль в час соответствует скорости $1{,}609 \cdot 47 = 75{,}623$ км в час. Округляем ответ до целого числа по математическим правилам. Цифра в разряде десятых равна 6, поэтому округляем в большую сторону, с избытком: $75{,}623 \approx 76$.

Ответ: 76.

10. В доме, в котором живёт Пётр Иванович, один подъезд. На каждом этаже по пять квартир. Пётр Иванович живёт в квартире № 44. На каком этаже живет Пётр Иванович?

Решение. Разделим 44 на 5. Получится 8 и 4 в остатке. Восемь этажей заполнится полностью и ещё 4 квартиры из этих 44 останутся на 9-й этаж. Значит, Пётр Иванович живёт на 9-м этаже.

Ответ: 9.

Денежные расчёты

11. Маша купила месячный проездной билет на троллейбус. Проездной билет стоит 280 рублей, а разовая поездка — 7 рублей. Сколько рублей сэкономила Маша, если за месяц она сделала 48 поездок на троллейбусе?

Решение.

Одна разовая поездка стоит 7 рублей, поэтому 48 разовых поездок стоят $48 \cdot 7 = 336$ рублей. Купив проездной за 280 рублей, Маша сэкономила $336 - 280 = 56$ рублей.

Ответ: 56.

12. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 2 рубля 10 копеек. Счётчик электроэнергии 1 мая показывал 346 025 киловатт-часов, а 1 июня показывал 346 308 киловатт-часов. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за май?

Решение. Найдём разницу показаний счётчика. Первые три цифры одинаковы, их можно не учитывать. Разница равна $308 - 25 = 283$. Найдём, сколько рублей нужно заплатить за 283 киловатт-часа. $283 \cdot 2{,}1 = 594{,}3$ рубля.

Ответ: 594,3.

13. Один килограмм картофеля на рынке стоит 30 рублей, а в магазине — 26 рублей. На сколько рублей больше Миша заплатит на рынке, чем в магазине, если он купит 3 кг 500 г картофеля?

Решение.

1-й способ.

В магазине за 3 кг 500 г = 3,5 кг картофеля по цене 26 рублей за килограмм нужно заплатить $26 \cdot 3{,}5 = 91$ рубль. На рынке по цене 30 рублей за килограмм Миша заплатит $30 \cdot 3{,}5 = 105$ рублей. Разница составляет $105 - 91 = 14$ рублей.

Ответ: 14.

2-й способ.

Один килограмм картофеля на рынке стоит дороже одного килограмма в магазине на $30 - 26 = 4$ рубля. За 3 кг 500 г Миша заплатит на $4 \cdot 3 = 12$ рублей больше, ещё за полкило — на $4 : 2 = 2$ рубля больше. Всего на рынке он заплатит на $12 + 2 = 14$ рублей больше.

Ответ: 14.

14. Автобус проехал до Москвы 1200 км. Цена бензина 18 рублей за литр. Средний расход топлива 20 литров на 100 км. Сколько рублей потратил на бензин водитель автобуса за эту поездку?

Решение.

1-й способ.

На 1200 км понадобится $1200 : 100 \cdot 20 = 240$ литров бензина. За 1 литр бензина водитель платит 18 рублей, поэтому 240 литров бензина стоят $240 \cdot 18 = 4320$ рублей.

Ответ: 4320.

2-й способ.

Расход топлива на 100 км составляет 20 литров, стоимость 20 л равна $20 \cdot 18 = 360$ рублей. Автобус ехал до Москвы 12 раз по 100 км, поэтому на 1200 км будет потрачено $12 \cdot 360 = 4320$ рублей.

Ответ: 4320.

15. Блокнот стоит 6 рублей 40 копеек. Какое наибольшее число блокнотов можно купить на 80 рублей?

Решение.

1-й способ.

Переведём все деньги в копейки: 80 руб. = 8000 коп.,
6 руб. 40 коп. = 640 коп. Найдём, сколько блокнотов по цене 640 коп. можно купить на имеющиеся 8000 коп. Это будет $8000 : 640 = 12{,}5$. Так как нам продадут только целое число блокнотов, то можем купить 12 блокнотов.

Ответ: 12.

2-й способ.

10 блокнотов стоят 64 рубля. У нас ещё останется $80 - 64 = 16$ рублей. На них можно купить 2 блокнота, а 3 уже не купишь. Значит, всего можно купить не более 12 блокнотов.

Ответ: 12.

Проценты

16. Платье стоит 2120 рублей. Скидка в день распродажи равна 35%. Сколько стоит платье со скидкой в день распродажи?

Решение.

1-й способ.

Стоимость платья без скидки составляет 100%, поэтому 1% равен $2120 : 100 = 21{,}2$ рубля. Скидка составляет 35%, то есть
$21{,}2 \cdot 35 = 742$ рубля. Цена платья со скидкой равна
$2120 - 742 = 1378$ рублей.

Ответ: 1378.

2-й способ.

Стоимость платья без скидки составляет 100%, скидка равна 35%. Стоимость платья со скидкой составляет $100\% - 35\% = 65\%$ от цены без скидки. Найдём 65% от 2120 рублей. Чтобы найти проценты от числа, нужно это число разделить на 100 и умножить на число процентов. $2120 : 100 \cdot 65 = 1378$ рублей.

Ответ: 1378.

17. Билет на междугородный автобус для взрослого стоит 260 рублей. Стоимость билета для ребёнка до 10 лет составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 17 детей до 10 лет и 2 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

Решение.

Стоимость билета для ребёнка составляет 50% от 260 рублей, то есть $260 : 100 \cdot 50 = 130$ рублей. 17 детских билетов по 130 рублей стоят $130 \cdot 17 = 2210$ рублей. 2 взрослых билета по 260 рублей стоят $260 \cdot 2 = 520$ рублей. Билеты на всю группу стоят $2210 + 520 = 2730$ рублей.

Ответ: 2730.

18. Подоходный налог составляет 13% от заработной платы. Сколько рублей составляет заработная плата курьера, если после удержания подоходного налога он получил 10 440 рублей?

Решение.

Вся заработная плата составляет 100%, налог 13%, и после удержания налога останется 100% − 13% = 87%. Эти 87% и составляют 10 440 рублей. Найдём, сколько составляет в рублях 1%. Это будет 10 440 : 87 = 120 рублей. Тогда заработная плата (100%) составляет $120 \cdot 100 = 12\,000$ рублей.

Ответ: 12 000.

19. За квартал завод выпустил 180 000 станков, из них 8% не прошли ОТК (оказались с браком). Среди прошедших ОТК станков 45% были проданы в течение одного квартала. Сколько станков было продано в течение первого квартала?

Решение.

Не прошли ОТК 8% станков, поэтому прошли ОТК 100% − 8% = 92% станков. Для того чтобы найти проценты от числа, нужно разделить это число на 100 и умножить на число процентов. 92% от 180 000 составляет $180\,000 : 100 \cdot 92 = 165\,600$ станков. Продали 45% от этого количества, то есть $165\,600 : 100 \cdot 45 = 74\,520$ станков.

Ответ: 74 520.

20. Анна Владимировна купила в магазине стиральную машину в кредит на год под 12% годовых. Стиральная машина стоит 24 тысячи рублей. Сколько рублей Анна Владимировна должна вносить ежемесячно за машину, если всю сумму кредита вместе с процентами нужно погасить за год, выплачивая ежемесячно одинаковую сумму денег?

Решение.

Найдём, сколько рублей будут составлять проценты по кредиту. 12% от 24 000 составляют $24\,000 : 100 \cdot 12 = 2\,880$ рублей. Значит, всего Анна Владимировна должна заплатить за год
24 000 + 2880 = 26 880 рублей. Месяцев в году 12. Каждый месяц она должна вносить 26 880 : 12 = 2240 рублей.

Ответ: 2240.

21. Блокнот стоил 6 рублей. После переоценки он подорожал на 10%. Сколько таких блокнотов можно купить на 80 рублей после переоценки?

Решение.

После переоценки блокнот стоит $100\%+10\% = 110\%$ от начальной цены, что составляет $6 : 100 \cdot 110 = 6{,}6$ рублей. Посчитаем, сколько блокнотов по цене 6,6 рублей можно купить на 80 рублей. $80 : 6{,}6 = 800 : 66 = 12$ (остаток 8). На 80 рублей можно купить 12 блокнотов.

Ответ: 12.

22. При оплате услуг через платёжный терминал взимается комиссия 6%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Роман хочет положить на счёт своего мобильного телефона не меньше 200 рублей. Какую минимальную сумму (в рублях) он должен положить в приёмное устройство данного терминала?

Решение.

1-й способ. Составим неравенство. Если в терминал положить x рублей, то на счёт телефона пойдёт $x \cdot 0{,}94$ рублей, что по условию не меньше 200. Значит, должно выполняться $x \cdot 0{,}94 \geqslant 200$, $x \geqslant 212{,}7\ldots$. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям, поэтому Роман должен положить 220 рублей.

2-й способ. 6% от 200 это $200 \cdot 0{,}06 = 12$. Значит, Роман должен положить больше 212 рублей (при этом ровно 212 рублей не хватило бы, так как 6% от 212 рублей больше 6% от 200 рублей). Так как сумма должна быть кратна 10 рублям, проверим, хватит ли 220 рублей. $220 - 220 \cdot 0{,}06 = 206{,}8$, что больше 200. Значит, 220 рублей хватит.

Ответ: 220.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. На туристический слёт приехали 250 участников и 30 членов жюри. Каждый автобус вмещает не более 42 человек. Какое наименьшее количество автобусов нужно для перевозки всех участников и всех членов жюри?

2. Больному прописаны инъекции лекарства, которые нужно делать по ампуле 0,6 г 2 раза в день в течение 28 дней. В одной упаковке 10 ампул лекарства по 0,6 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

3. В летнем лагере на каждого участника полагается 10 г соли в день. В лагере 213 человек. Сколько килограммовых пачек соли понадобится общей столовой лагеря на 8 дней?

4. Павел купил американский автомобиль, на спидометре которого скорость измеряется в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 50 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

5. Словарь стоит 300 рублей. Какое наибольшее число словарей можно купить на 1500 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25%?

6. Дневник стоит 60 рублей. Какое наибольшее число дневников можно будет купить на 550 рублей после понижения цены на 20%?

7. В городе 180 000 жителей. Из них 30% дети и подростки. Среди взрослых 45% не работают (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т.п.). Сколько взрослых работает?

8. Налог на доходы и пенсионный налог составляют 14% от заработной платы. После удержания этих налогов менеджер получил 12 900 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата этого менеджера?

Вариант 2

1. Иван Андреевич купил льготный месячный проездной билет на автобус. За месяц он сделал 54 поездки. Сколько рублей он сэкономил, если проездной билет стоит 340 рублей, а разовая поездка — 7 рублей?

2. При приготовлении рассола для томатов на 1 литр рассола требуется 60 г уксусной кислоты. Уксусная кислота продаётся в бутылках по 100 г. Какое наименьшее число бутылок нужно купить для приготовления 12 литров рассола?

3. В обувном магазине проходит рекламная акция: покупая две пары туфель, покупатель получает третью пару туфель в подарок. Пара туфель стоит 350 рублей. Какое наибольшее число пар туфель получит покупатель на 2000 рублей?

4. В магазин привезли чайники четырёх видов, по 30 штук каждого вида. В каждой витрине 5 полок, на каждой полке помещается 9 чайников. Сколько витрин можно полностью заполнить чайниками, если все чайники одного размера?

5. Столовая ложка вмещает 20 г сахара, вместимость чайной ложки составляет 25% от столовой. Сколько граммов сахара окажется в стакане, если положить туда 3 столовых и 7 чайных ложек сахара?

6. Билет на трамвай стоит 12 рублей. Какое наибольшее число билетов можно будет купить на 120 рублей после повышения цены на 25%?

7. Оптовая цена футболки 130 рублей. Розничная цена на 40% выше оптовой. Какое наибольшее число таких футболок можно купить по розничной цене на 5000 рублей?

8. Цена на сервиз была понижена на 15% и составила 1275 рублей. Сколько рублей стоил сервиз до понижения цены?

Вариант 3

1. Мама для своих двух детей покупает воздушные шарики. Она хочет купить чётное число шариков. Сколько шариков она сможет купить на 320 рублей, если один шарик стоит 35 рублей?

2. Марина купила месячный проездной билет на метро. За месяц она сделала 38 поездок. Сколько рублей сэкономила Марина, если проездной билет стоит 820 рублей, а разовая поездка 30 рублей?

3. Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,2 г 4 раза в день в течение 12 дней. В одной упаковке 8 таблеток лекарства по 0,2 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

4. В магазине килограмм апельсинов стоит 40 рублей. Света купила 1 кг 100 г апельсинов. Сколько рублей сдачи она должна получить с 500 рублей?

5. Магазин закупает кастрюли по оптовой цене 70 рублей за штуку и продаёт с наценкой 20%. Какое наибольшее число кастрюль можно купить в этом магазине на 1300 рублей?

6. Цена на электродрель была повышена на 18% и составила 2360 рублей. Сколько рублей стоила электродрель до повышения цены?

7. Мешок сахара стоил 1350 рублей. После повышения цены он стал стоить 1458 рублей. На сколько процентов была повышена цена мешка сахара?

8. Пиджак стоит 800 рублей. Какое наибольшее число пиджаков можно купить на 2400 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 18%?

Вариант 4

1. Шарик стоит 3 руб. 40 коп. Какое наибольшее число шариков можно купить на 40 рублей?

2. В коробке 110 кусков мела. За месяц в школе расходуется 400 кусков мела. Какое наименьшее количество коробок мела нужно купить в школу на 6 месяцев?

3. В кафе проходит рекламная акция: при покупке трёх чашек кофе покупателю дарят четвёртую чашку. Чашка кофе стоит 45 рублей. Какое наибольшее число чашек кофе получит покупатель за 250 рублей?

4. В магазин привезли учебники по биологии для 7—9-х классов, по 50 штук для каждого класса. В шкафу 4 полки, на каждой полке помещается 30 книг. Сколько шкафов можно полностью заполнить новыми книгами по биологии, если все книги имеют одинаковый формат?

5. Майка стоит 180 рублей. Какое наибольшее число маек можно купить на 600 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 20%?

6. Оптовая цена рулона обоев 80 рублей. Розничная цена на 30% выше оптовой. Какое наибольшее число таких рулонов можно купить по розничной цене на 800 рублей?

7. Телевизор стоил 8400 рублей. После снижения цены он стал стоить 6720 рублей. На сколько процентов была снижена цена на телевизор?

8. Кириллу нужно 120 000 руб. для поступления в платную аспирантуру. Он взял в банке кредит на год под 12%. Для погашения кредита необходимо ежемесячно вносить в банк одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей Кирилл должен вносить в банк ежемесячно?

Вариант 5

1. На экскурсию поехали 320 школьников и 35 учителей. Каждый автобус вмещает не более 38 человек. Какое наименьшее количество автобусов нужно для перевозки всех школьников и всех учителей?

2. Для приготовления 1 литра компота требуется 70 г сахара. Сахар продаётся в пакетах по 500 г. Какое наименьшее число пакетов нужно купить хозяйке для приготовления 16 литров компота?

3. Автолюбитель за месяц проехал 600 км. Стоимость 1 л бензина составляет 24 руб. Средний расход бензина на 100 км составляет 6 л. Сколько рублей потратил автолюбитель на бензин за этот месяц?

4. Павел купил катер, на приборах которого скорость измеряется в узлах. Узел равен 1852 м в час. Какова скорость катера в километрах в час, если его скорость 30 узлов? Ответ округлите до целого числа.

5. Пиджак стоит 800 рублей. Какое наибольшее число пиджаков можно будет купить на 2400 рублей после повышения цены на 15%?

6. Банка кофе стоила 320 рублей. После повышения цены она стала стоить 368 рублей. На сколько процентов была повышена цена на банку кофе?

7. Оптовая цена ножа 160 рублей. Розничная цена на 20% выше оптовой. Какое наибольшее число таких ножей можно купить по розничной цене на 3000 рублей?

8. Цена на свитер была понижена на 25% и составила 240 рублей. Сколько рублей стоил свитер до понижения цены?

Вариант 6

1. Таисия Семёновна отправила SMS-сообщения с новогодними поздравлениями своим 12 родственникам. Стоимость одного SMS-сообщения — 1 рубль 20 копеек. Перед отправкой сообщения на счету у Таисии Семёновны было 70 рублей. Сколько рублей осталось у Таисии Семёновны после отправки всех сообщений?

2. На автозаправке Михаил отдал кассиру 1000 рублей и залил в бак 16 литров бензина по цене 32 руб. 50 коп. за литр. Сколько рублей сдачи он должен получить у кассира?

3. На счету маминого мобильного телефона было 253 рубля, а после разговора с дочкой осталось 202 рубля. Сколько минут длился разговор с дочкой, если одна минута разговора стоит 1 рубля 50 копеек?

4. В квартире, где проживает Андрей Сергеевич, установлен прибор учёта расхода горячей воды (счётчик). 1 ноября счётчик показывал расход 213 м^3, а 1 декабря — 218 м^3. Какую сумму должен заплатить Андрей Сергеевич за горячую воду за ноябрь, если цена 1 м^3 горячей воды составляет 105 руб.? Ответ дайте в рублях.

5. Одна таблетка лекарства весит 10 мг и содержит 30% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 3 лет врач прописывает в сутки 1,2 мг активного вещества на каждый килограмм веса. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте 2 лет и весом 15 кг в течение суток?

6. Диагональ экрана телевизора равна 64 дюймам. Выразите диагональ экрана в сантиметрах, если в одном дюйме 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

7. В обменном пункте 1 гривна стоит 3 рубля 78 копеек. Отдыхающие обменяли рубли на гривны и купили 5 кг бананов по цене 6 гривен за 1 кг. Во сколько рублей обошлась им эта покупка? Ответ округлите до целого числа.

8. В книге «Кухня для студентов» имеется рецепт гречневой каши. Для каши на 10 человек следует взять $\frac{6}{10}$ пакета гречневой крупы. Сколько граммов крупы следует взять для каши, рассчитанной на 7 человек? Считайте, что 1 пакет равен 0,8 кг.

Чтение графиков и диаграмм (B3)

Диагностическая работа

На графике (см. рис. 1) показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток, начиная с 0 часов 20 мая. На оси абсцисс отмечается время суток, на оси ординат — значение температуры в градусах.

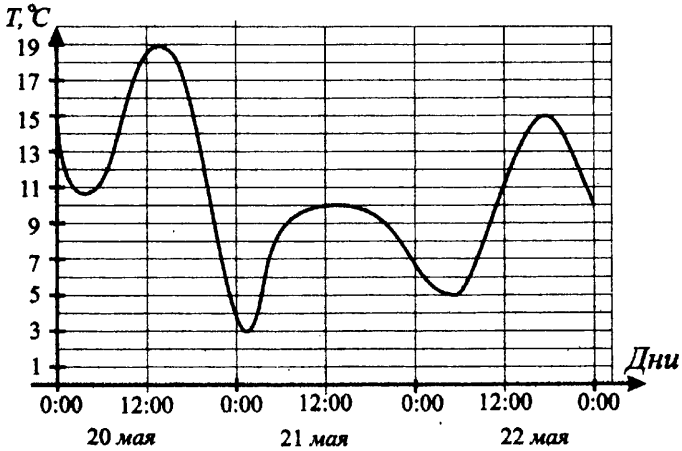


Рис. 1.

1. Определите по рисунку 1, какой была наименьшая температура (в градусах Цельсия) за указанный период.

2. Определите по рисунку 1, какой была разница между наибольшим и наименьшим значениями температуры за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

3. Определите по рисунку 1, до какой наибольшей температуры прогрелся воздух 21 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.

4. На диаграмме (см. рис 2) показано распределение выплавки стали в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2000 год. Среди представленных стран первое место по выплавке стали занимал Китай, десятое место — Тайвань. Какое место занимала Германия?

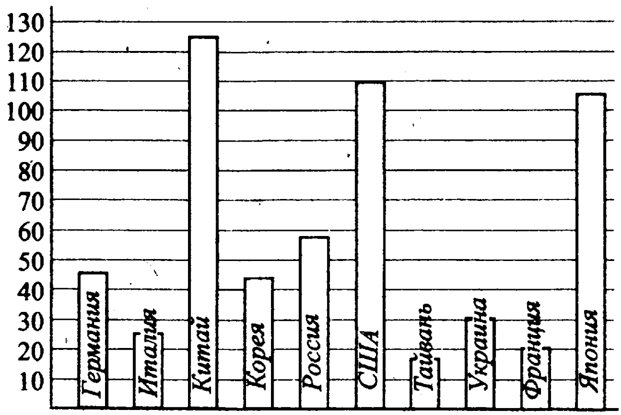


Рис. 2.

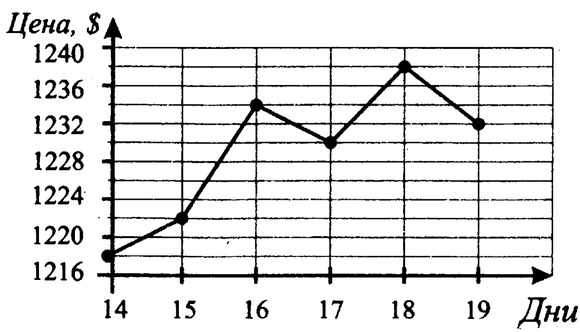


Рис. 3.

На рисунке 3 жирными точками показана цена 1000 евро в долларах США на момент открытия биржевых торгов с 14 по 19 июня 2010 г. По горизонтали указывается число месяца, по вертикали — цена в долларах США. Для наглядности точки соединены линиями.

5. Бизнесмен 16 июня купил 2000 евро, а 17 июня их продал. Сколько долларов он потерял в результате этой операции (см. рис. 3)?

6. Бизнесмен с 14 июня по 16 июня купил 5 000 евро, а с 17 июня по 19 июня их продал. Какую наибольшую прибыль он мог получить в результате этой операции (см. рис. 3)? Ответ укажите в долларах США.

7. Когда самолёт находится в горизонтальном полёте, подъёмная сила, действующая на крылья, зависит только от скорости. На рисунке 4 изображена эта зависимость для некоторого самолёта. На оси абсцисс откладывается скорость (в км/ч), на оси ординат — сила (в кН). Определите по рисунку, чему равна подъёмная сила (в кН) при скорости 500 км/ч?

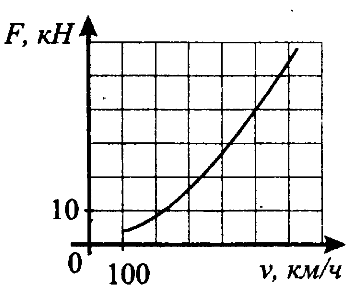


Рис. 4.

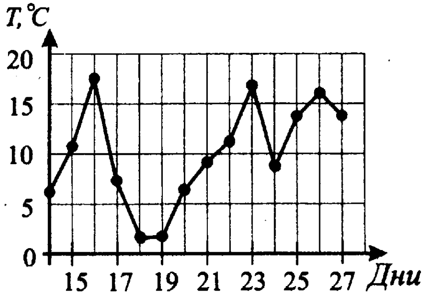


Рис. 5.

8. На рисунке 5 изображён график максимальной суточной температуры в городе Ростове с 14 по 27 марта 2013 г. На оси абсцисс откладываются дни, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода максимальная суточная температура была от 5 до 15 градусов.

Графики температуры

① *Немного полезной информации*

График характеризует изменение некоторой величины (температуры, количества осадков, стоимости акций и т.п.) от времени. В задачах данного раздела нужно, как правило, найти:

- наибольшее или наименьшее значение этой величины;
- разность между наибольшим и наименьшим значениями;
- момент времени, когда величина примет какое-то значение;
- ответ на другой, подобный этим, вопрос.

Главное при решении подобной задачи — внимательно прочитать условие и вопрос. При поиске ответа на этот вопрос надо прямо на графике провести недостающие линии, при необходимости дописать пропущенные числа.

Иногда в этих заданиях употребляются разные фразы, обозначающие одно и то же, например: «На рисунке показано изменение дневной температуры воздуха **на протяжении первых трёх недель мая**» или «На рисунке показано изменение температуры воздуха **на протяжении первой и второй декад мая**». Декада — это 10 дней. Напомним значения ещё некоторых слов.

Полдень — 12:00, полночь — 24:00 или 00:00. Квартал — 3 месяца.

Задачи с решениями

Попробуем по одному и тому же графику решить несколько задач.

1. На графике (см. рис. 6) показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте на протяжении трёх суток, начиная с 0:00 часов четверга.

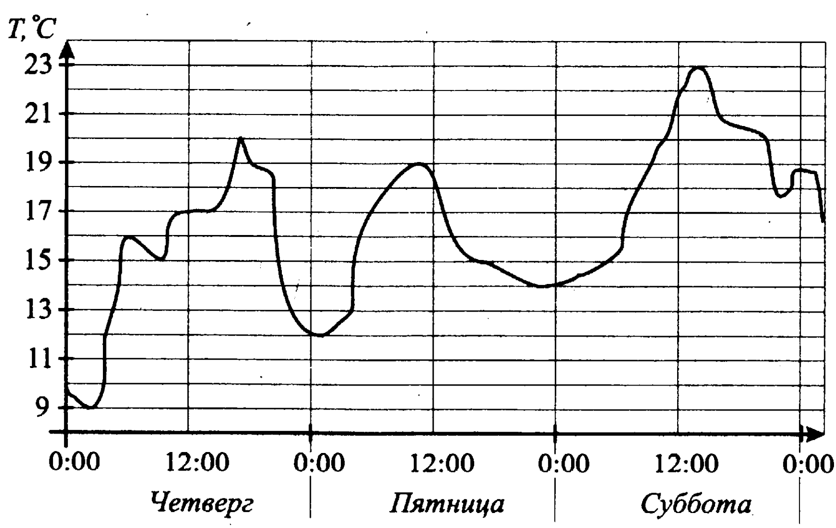


Рис. 6.

На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия.

а) Определите по графику наименьшую температуру воздуха в ночь с пятницы на субботу (ночь длится с 19:00 до 5:00). Ответ дайте в градусах Цельсия.

б) Определите по рисунку разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры воздуха в четверг.

Решение.

а) Прочитаем ещё раз задание: «Определите по графику наименьшую температуру воздуха в ночь с пятницы на субботу». На графике (см. рис. 7) отметим нужный промежуток времени (ночь с пятницы на субботу). Видим, что ответ — 14 градусов.

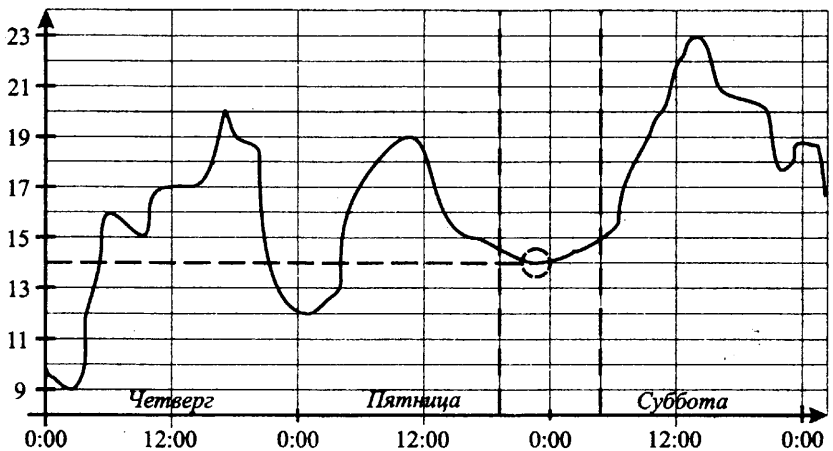


Рис. 7.

Ответ: 14.

б) Прочитаем ещё раз задание: «Определите по рисунку разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры воздуха в четверг». На графике (см. рис. 8) выделяем временной промежуток — четверг. Находим наименьшее значение 9 и наибольшее 20. Находим разность $20 - 9 = 11$.

Ответ: 11.

2. На диаграмме (см. рис. 9) показана среднемесячная температура воздуха в городе N за каждый месяц 1965 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по

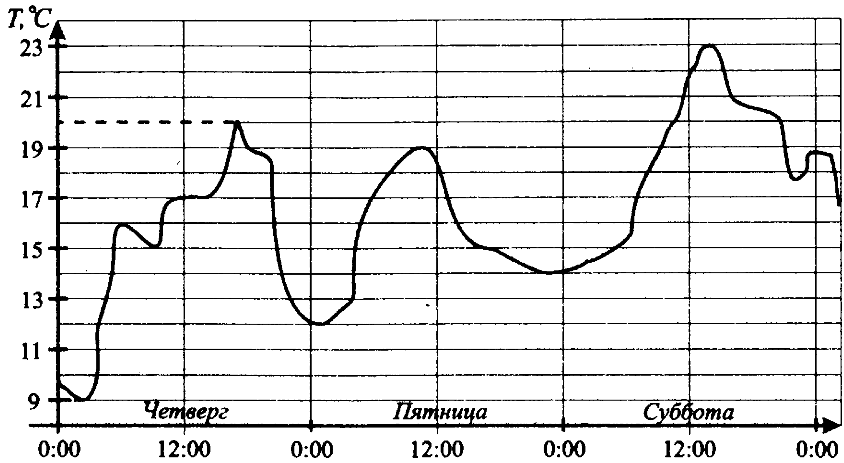


Рис. 8.

диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в период с января по сентябрь 1965 года включительно.

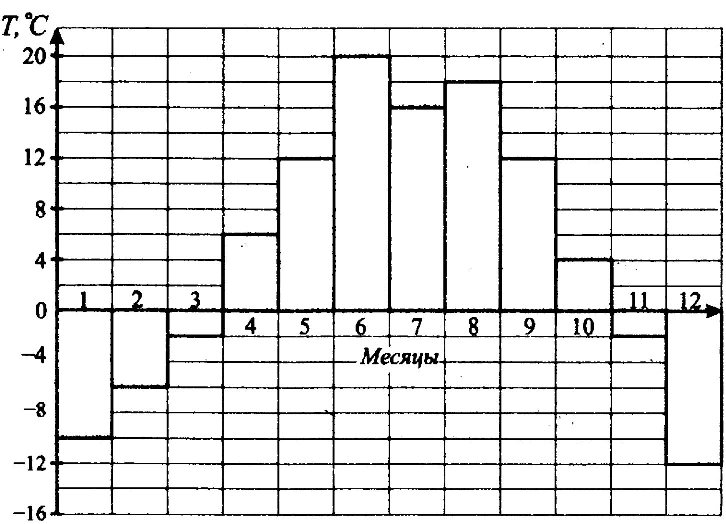


Рис. 9.

Решение.

Мы знаем, что январь — 1-й месяц года, а сентябрь — 9-й.

Тогда по диаграмме видно, что с 1-го по 9-й месяц наименьшая среднемесячная температура была -10 градусов Цельсия.

Ответ: -10.

3. Определите по диаграмме (см. рис. 9) наименьшую среднемесячную температуру в 1965 году.

Решение.

Наименьшее значение на всей диаграмме равно -12 (в декабре).

Ответ: -12.

4. Определите по диаграмме (см. рис. 9), сколько было месяцев с положительной среднемесячной температурой.

Решение.

Положительная температура — та, что больше нуля, выше горизонтальной оси. Считаем месяцы: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Получаем 7 месяцев.

Ответ: 7.

5. Определите по диаграмме (см. рис. 9) разность между наибольшим и наименьшим среднемесячными значениями температуры воздуха в 1965 году.

Решение.

Наибольшее значение температуры на всём графике равно 20 °C (в 6-м месяце), наименьшее значение равно -12 °C (в 12-м месяце). Разность между наибольшим и наименьшим среднемесячными значениями температуры равна $20-(-12)=32$ градуса.

Ответ: 32.

6. Первый посев семян огурцов рекомендуется проводить в мае при дневной температуре воздуха не менее $+8$ °C. На рисунке 10 жирными точками показано изменение дневной температуры воздуха с 1 по 11 мая. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите, в течение скольких дней за этот период можно было производить посев огурцов.

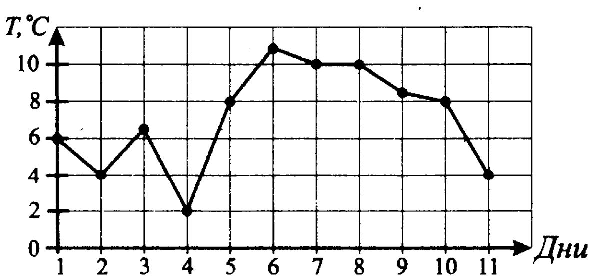


Рис. 10.

Решение.

Выделим на графике необходимые дни и температуру воздуха (см. рис. 11).

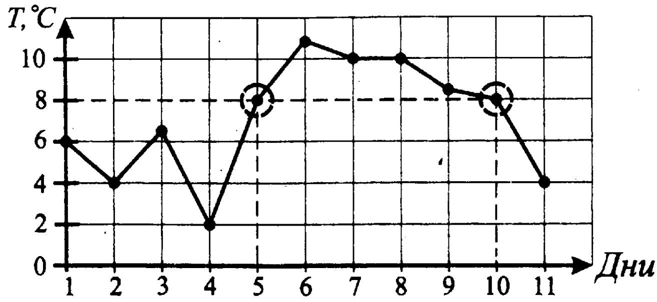


Рис. 11.

Дневная температура воздуха в мае составляла не менее +8 °С с 5 по 10 мая включительно, значит, в эти дни можно производить посев огурцов. Обратите внимание, что с 5 по 10 включительно шесть дней.

Ответ: 6.

Биржевые графики

7. На графике, изображённом на рисунке 12, жирными точками показано изменение биржевой стоимости акций горнодобывающей компании в первые две недели июля. По оси абсцисс отложены числа месяца, по оси

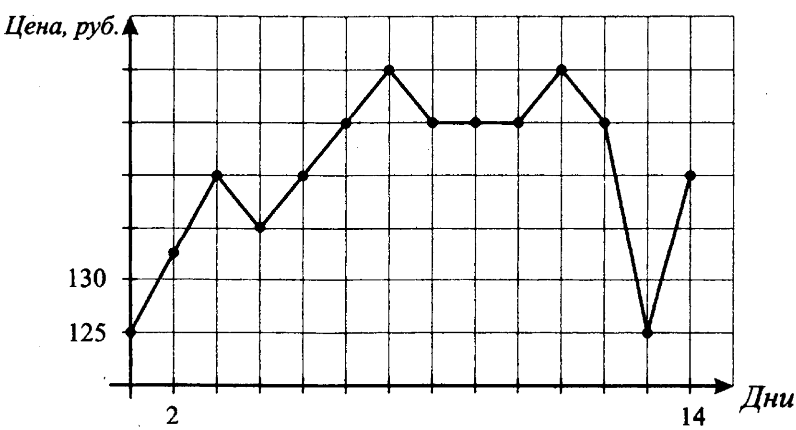


Рис. 12.

ординат — стоимость одной акции в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линией. 3 июля бизнесмен приобрёл 200 акций этой компании. 50 из них он продал 4 июля, а 13 июля — остальные 150. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?

Решение.

Проставим на графике необходимые числа (дни и стоимость акций) (см. рис. 13).

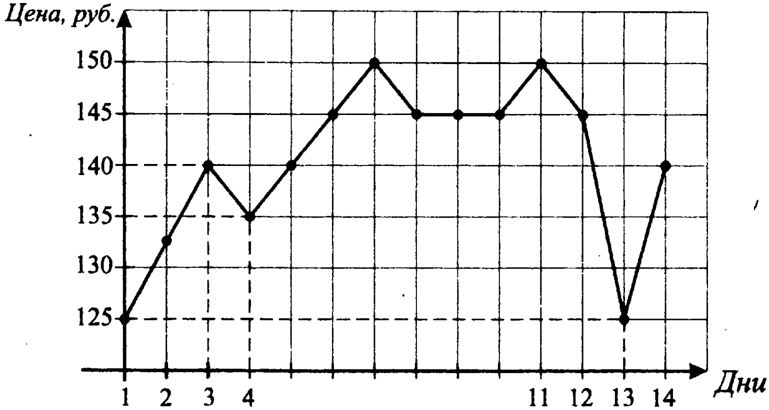


Рис. 13.

3 июля бизнесмен приобрёл 200 акций по цене 140 рублей и заплатил $200 \cdot 140 = 28\,000$ рублей. 50 акций он продал 4 июля по цене 135 рублей и получил $50 \cdot 135 = 6750$ рублей, а 13 июля он продал остальные 150 акций по цене 125 рублей за акцию, получив при этом $150 \cdot 125 = 18\,750$ рублей. Получил всего он $6750 + 18\,750 = 25\,500$ рублей, заплатил 28 000 рублей. Найдём, сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций.
$28\,000 - 25\,500 = 2500$ рублей.

Ответ: 2500.

8. На графике, изображённом на рисунке 12, жирными точками показано изменение биржевой стоимости акций горнодобывающей компании в первые две недели июля. По оси абсцисс отложены числа месяца, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линией. 4 июля бизнесмен купил пакет акций, а 11 июля продал его. В результате этих операций прибыль бизнесмена составила 4500 рублей. Сколько акций было в пакете?

Решение.

Проставим на графике необходимые числа (дни и стоимость акций) (см. рис. 14).

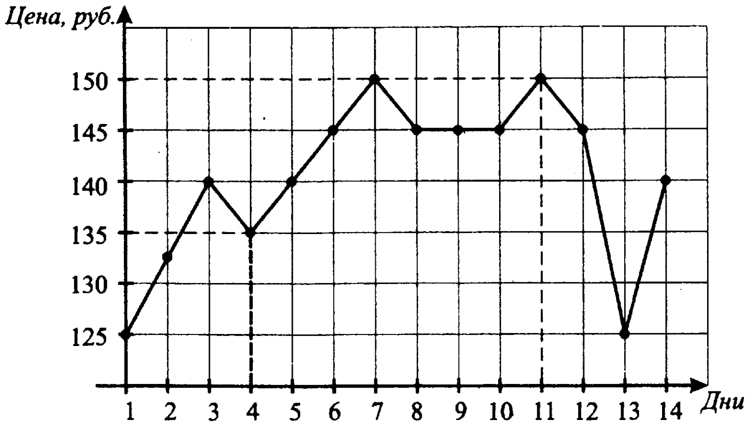


Рис. 14.

4 июля бизнесмен купил пакет акций по цене 135 рублей за акцию, а 11 июля продал его по цене 150 рублей за акцию. Значит, с каждой акции прибыль составила $150-135 = 15$ рублей. В результате этих операций прибыль бизнесмена составила 4500 рублей. Следовательно, акций в пакете было $4500 : 15 = 300$ акций.

Ответ: 300.

9. На графике, изображённом на рисунке 12, жирными точками показано изменение биржевой стоимости акций горнодобывающей компании в первые две недели июля. По оси абсцисс отложены числа месяца, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линией. 1 июля бизнесмен приобрёл 150 акций этой компании. До 14 июля бизнесмен продал эти акции. Какое наибольшее количество рублей мог получить бизнесмен в результате этих операций?

Решение.

1 июля бизнесмен приобрёл 150 акций этой компании по цене 125 рублей за акцию, заплатив за все акции $150 \cdot 125 = 18\,750$ рублей. В оставшиеся после 1 июля дни наибольшая цена за акцию, по которой её мог продать бизнесмен, составляла 150 рублей (например, 11 июля). Сумма

продажи будет $150 \cdot 150 = 22500$ рублей. Значит, в результате этих операций бизнесмен мог получить максимум $22500 - 18750 = 3750$ рублей.

Ответ: 3750.

10. На графике, изображённом на рисунке 15, жирными точками показано изменение биржевой стоимости акций компании в первые две недели июля. По оси абсцисс отложены числа месяца, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линией. В первую неделю июля бизнесмен купил 16 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль он мог получить?

Рис. 15.

Решение.

Подставим на графике необходимые числа (см. рис. 16).

Чтобы прибыль была наибольшей, бизнесмен должен был в первую неделю июля купить 16 акций по наименьшей цене, а потом продать их на второй неделе по наибольшей. По графику на рисунке 16 видим, что наименьшая цена в первую неделю 300 рублей, наибольшая во вторую неделю 600 рублей. Поэтому наибольшую прибыль на одну акцию можно получить, купив акции седьмого июля, а продав — тринадцатого июля. Прибыль с одной акции будет $600 - 300 = 300$ рублей. За 16 акций наибольшая прибыль будет $16 \cdot 300 = 4800$ рублей.

Ответ: 4800.

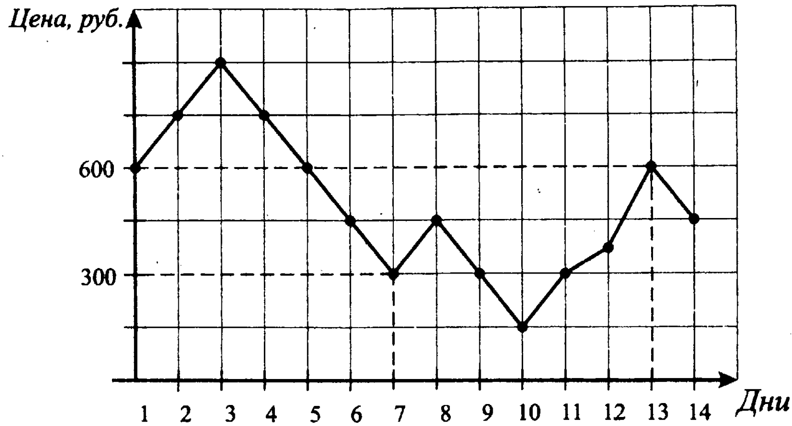


Рис. 16.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

На рисунке 17 жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 27 мая по 24 июня 2006 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией.

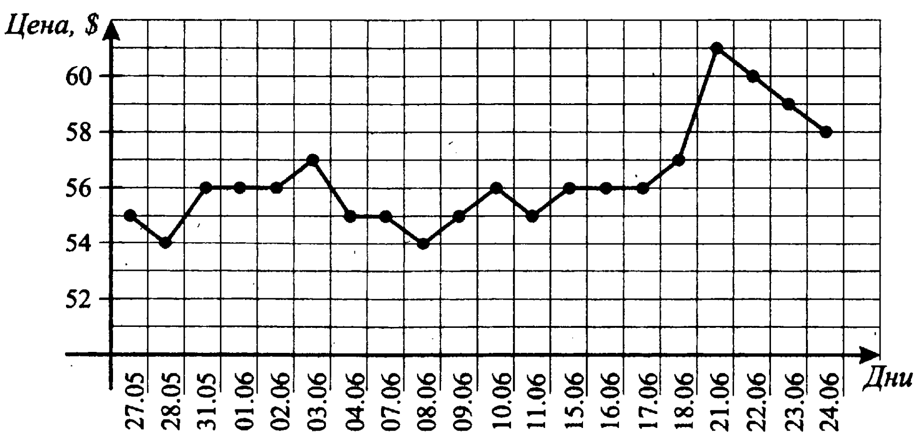


Рис. 17.

1. Определите по рисунку 17 разность между наибольшей и наименьшей ценами на нефть на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).

2. Определите по рисунку 17 наибольшую цену на нефть на момент закрытия торгов в период с 1 по 17 июня (в долларах США за баррель).

3. Определите по рисунку 17, сколько дней цена барреля нефти на момент закрытия торгов за данный период была больше 56 долларов США за баррель.

4. Определите по рисунку 17, сколько дней цена на нефть на момент закрытия торгов за данный период была ровно 55 долларов США за баррель.

5. Определите по рисунку 17, какого числа цена на нефть на момент закрытия торгов впервые за данный период превысила 60 долларов за баррель. Месяц в ответе указывать не нужно.

6. 3 июня брокер приобрёл 2000 баррелей нефти. 1000 из них он продал 8 июня, а 16 июня — остальные 1000. Сколько долларов потерял брокер в результате этих операций (см. рис. 17)?

7. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, со временем постепенно уменьшается. На рисунке 18 эта зависимость представлена в виде графика. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса оставшегося реагента, который ещё не вступил в реакцию (в граммах). Определите по графику, сколько граммов реагента вступило в реакцию за четыре минуты.

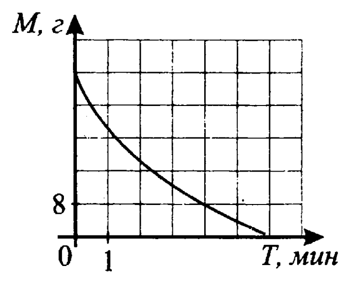


Рис. 18.

8. На диаграмме (см. рис. 19) показано распределение выплавки стали в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2000 год. Среди представленных стран первое место по выплавке стали занимал Китай, десятое место — Тайвань. Какое место занимала Япония?

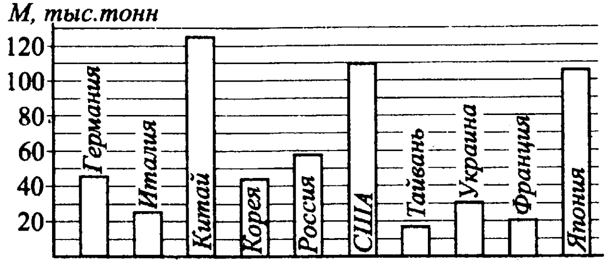


Рис. 19.

Вариант 2

На рисунке 20 жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в городе N на каждый день с 15 по 28 апреля 2003 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией.

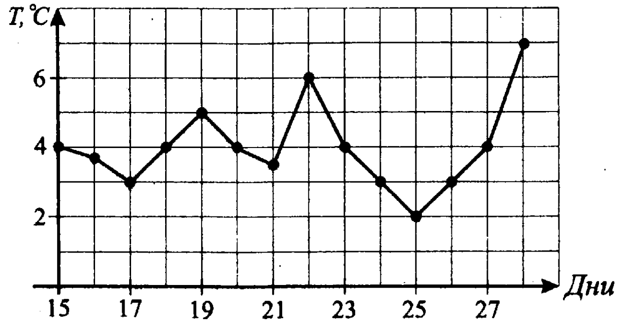


Рис. 20.

1. Определите по рисунку 20, какой была наименьшая среднесуточная температура за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

2. Определите по рисунку 20, какой была разница между наибольшим и наименьшим значениями среднесуточной температуры в городе N за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

3. Определите по рисунку 20, какого числа была наименьшая среднесуточная температура за указанный период.

На рисунке 21 жирными точками показана биржевая стоимость акций Газпрома с 27 мая по 24 июня 2010 г. На горизонтальной оси указаны даты, а на вертикальной оси — цена одной акции в рублях.

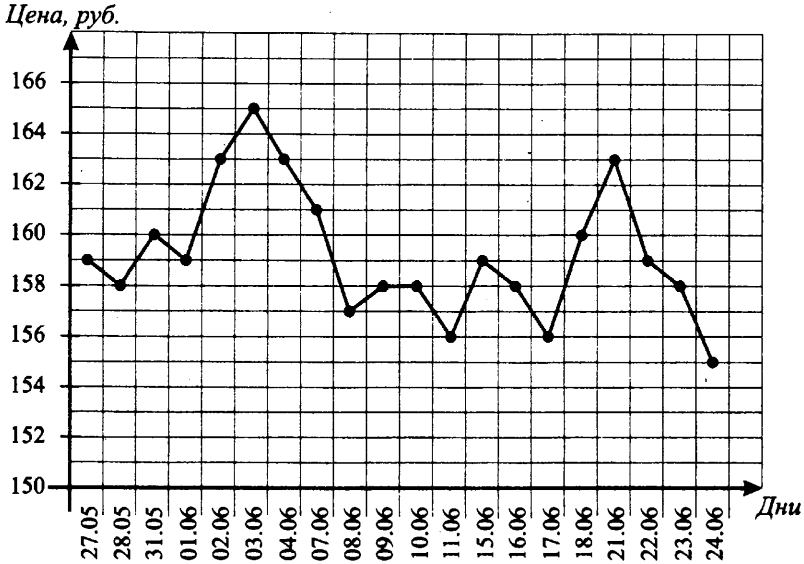


Рис. 21.

4. Бизнесмен, увидев, что цена акций увеличивается, купил 2 июня 120 акций, а 22 июня, испугавшись, что цена упадёт ещё ниже, их продал. Определите, какой убыток (в рублях) получил бизнесмен в результате этой операции (см. рис. 21).

5. Бизнесмен купил 11 июня пакет акций, а 21 июня их продал. Определите, сколько акций было у бизнесмена, если в результате этой операции бизнесмен получил прибыль 14 700 рублей (см. рис. 21).

6. Бизнесмен в первую декаду июня купил 2 000 акций, а во вторую декаду июня их продал. Какую наибольшую прибыль (в рублях) он мог получить (см. рис. 21)?

7. Определите по рисунку 21, в какой день биржевая стоимость акций Газпрома в первый раз превысила 161 рубль. В ответе запишите число без указания месяца.

8. На диаграмме (см. рис 22) показано количество посетителей сайта «Грибная поляна» во все дни с 10 по 29 июля 2011 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, во сколько раз наибольшее количество посетителей за день больше, чем наименьшее количество посетителей.

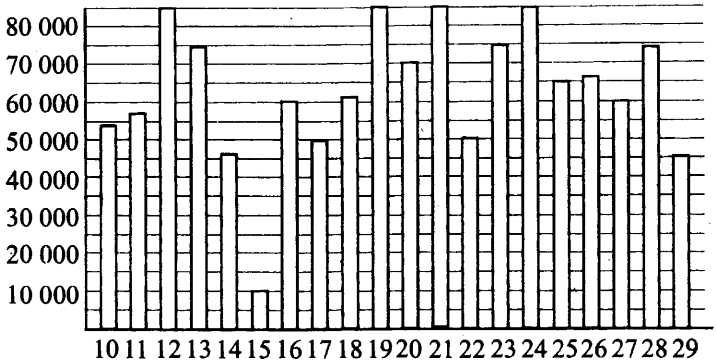


Рис. 22.

Вариант 3

На рисунке 23 жирными точками показано суточное количество осадков, выпавших в городе N с 3 по 14 сентября 1980 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки соединены линией.

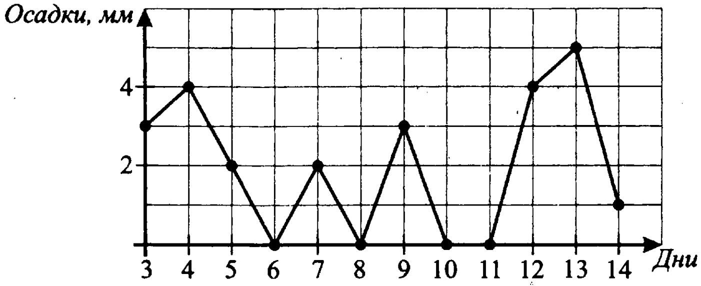


Рис. 23.

1. Определите по рисунку 23, сколько дней из данного периода выпадало более 3 миллиметров осадков.

2. Определите по рисунку 23, какого числа выпало наибольшее количество осадков.

3. Определите по рисунку 23, какое наибольшее количество миллиметров осадков выпало в период с 5 по 12 сентября.

4. Определите по рисунку 23, сколько дней из данного периода вообще не было осадков.

5. Определите по рисунку 23, какого числа впервые выпало ровно 2 миллиметра осадков.

На графике (см. рис. 24) представлено изменение биржевой стоимости в рублях акций компании «Распадская» в период с 23 июня по 25 июня. Рабочий день на бирже начинается в 10:30.

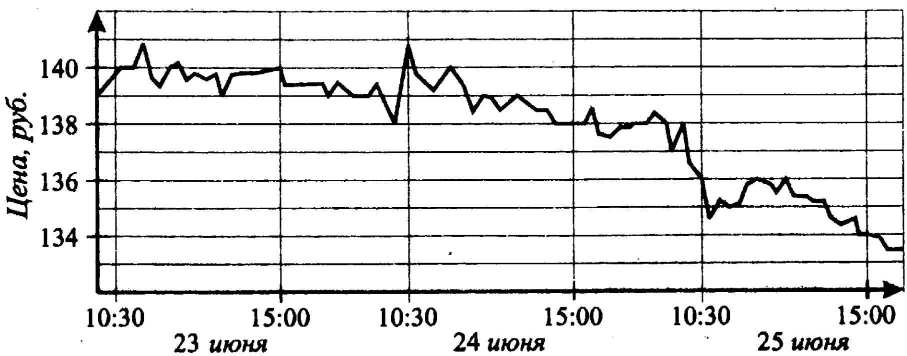


Рис. 24.

6. Бизнесмен купил 500 акций компании «Распадская» 23 июня в 15:00, а продал их 25 июня в 15:00. Сколько рублей он потерял в результате этой операции (см. рис. 24)?

7. Бизнесмен купил 230 акций компании «Распадская» 23 июня до 15:00, а продал их 25 июня между 10:30 и 15:00. Какой наименьший убыток он мог понести (см. рис. 24)? Ответ дайте в рублях.

8. На диаграмме (см. рис. 25) показано количество посетителей сайта «Навигация» во все дни с 10 по 29 мая 2013 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, в какой день количество посетителей сайта впервые приняло наибольшее значение.

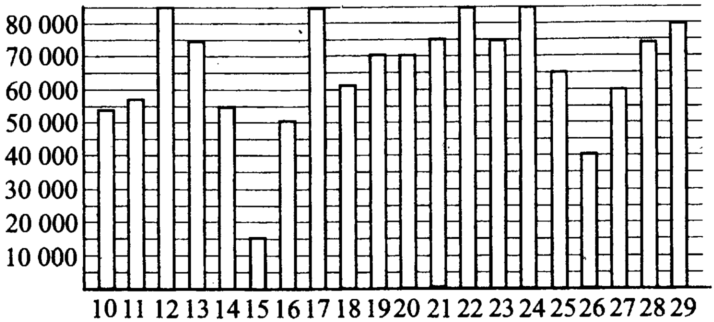


Рис. 25.

Вариант 4

1. На графике (см. рис. 26) показано изменение температуры воздуха в городе Долгопрудном на протяжении девяти суток, начиная с 0:00 часов 24 июня. На оси абсцисс отмечаются дни, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по рисунку, какой была наименьшая температура за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

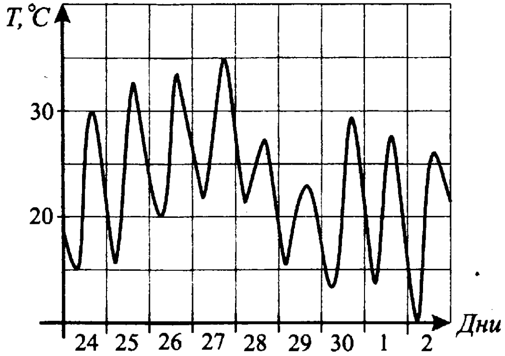


Рис. 26.

2. На графике (см. рис. 27) показано изменение температуры воздуха в Архангельске на протяжении девяти суток, начиная с 0:00 часов 24 июня. На оси абсцисс отмечается время, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по рисунку, какой была разница между наибольшим и наименьшим значениями температуры за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

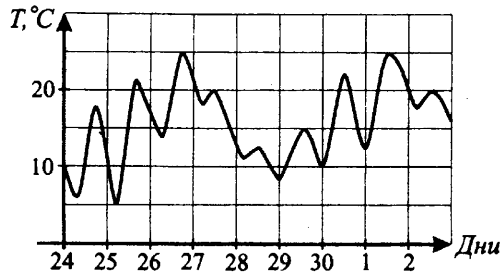


Рис. 27.

3. На рисунке 28 жирными точками показана биржевая стоимость акций Сбербанка с 27 мая по 24 июня 2010 г. На горизонтальной оси указаны даты, а на вертикальной оси — цена одной акции в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линией. Бизнесмен купил 2 июня 250 акций, а 22 июня их продал. Определите, какую прибыль (в рублях) получил бизнесмен в результате этой операции.

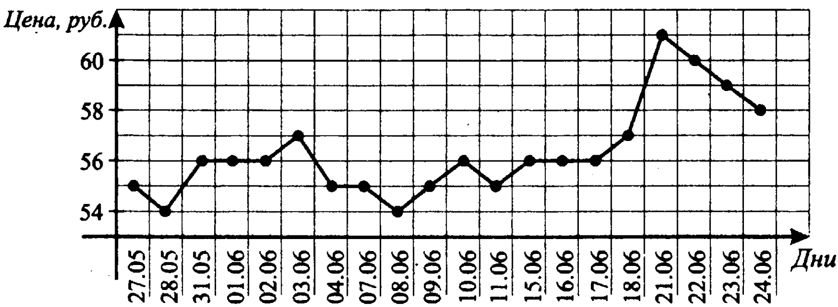


Рис. 28.

4. На рисунке 29 жирными точками показана биржевая стоимость акций ОАО «Распадская» с 26 мая по 25 июня 2010 г. на момент закрытия биржи. На горизонтальной оси указаны даты, а на вертикальной оси — цена одной акции в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линией. Укажите разницу в рублях между наибольшей и наименьшей ценами акции за первые две недели июня.

5. На рисунке 30 жирными точками показана биржевая стоимость акций АвтоВАЗа с 26 мая по 25 июня 2010 года на момент закрытия биржи. На горизонтальной оси указаны даты, а на вертикальной оси — цена одной акции в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линией. Опре-

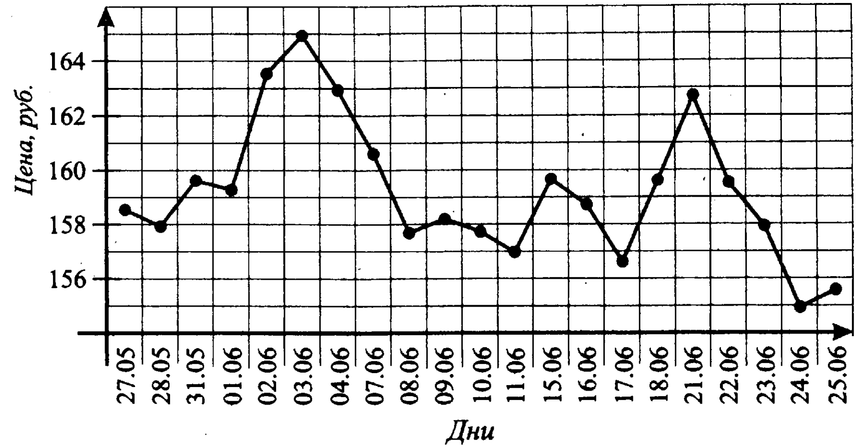


Рис. 29.

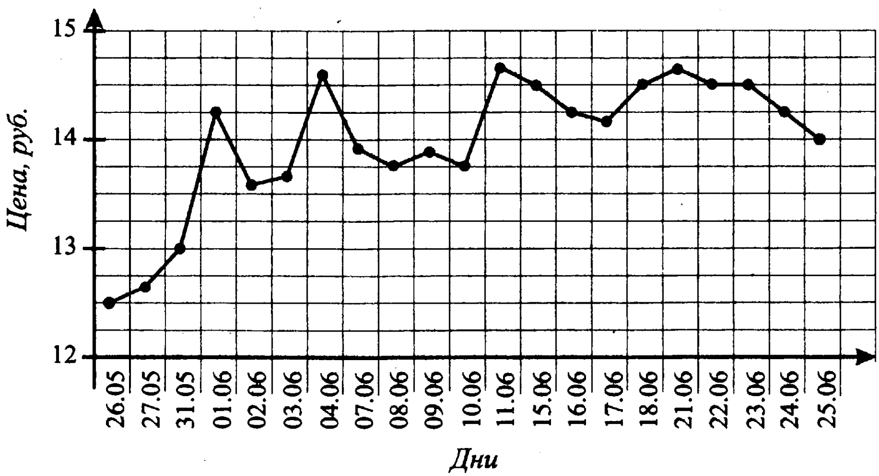


Рис. 30.

делите, в какой день цена акции первый раз превысила 14 рублей. В ответе укажите число без названия месяца.

6. На рисунке 30 жирными точками показана биржевая стоимость акций АвтоВАЗа с 26 мая по 25 июня 2010 года на момент закрытия биржи. На горизонтальной оси указаны даты, а на вертикальной оси — цена одной акции в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите, какую прибыль (в рублях) получил бизнесмен, если он купил 160 акций 1 июня, а продал их 18 июня.

7. На рисунке 31 показана биржевая стоимость акций «Лукойл» с марта по июнь 2010 года. На горизонтальной оси указаны месяцы, а на вертикальной оси — цена одной акции в рублях. Бизнесмен в указанный период купил 320 акций, а потом их продал. Определите, какую наибольшую прибыль (в рублях) мог получить бизнесмен в результате этой операции.

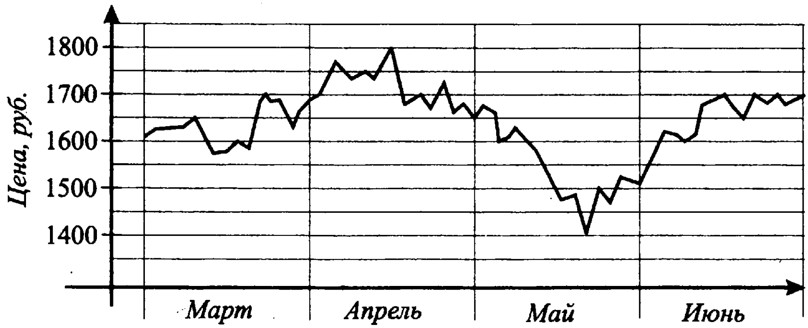


Рис. 31.

8. На диаграмме (см. рис. 32) показано количество посетителей сайта «Сказки» во все дни с 10 по 29 января 2012 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, сколько раз количество посетителей сайта принимало наибольшее значение.

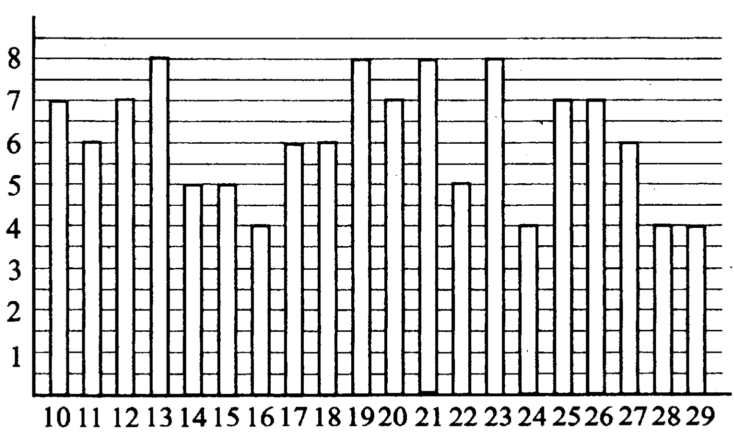


Рис. 32.

Выбор наилучшего варианта (B4)

Диагностическая работа

1. Автомобильный журнал определяет рейтинги автомобилей на основе показателей безопасности B, функциональности F, комфорта K, качества X и дизайна V. Каждый отдельный показатель оценивается по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле $R = \dfrac{5B + 2F + 3K + 4X + V}{100}$.

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей автомобилей.

Модель	Безопасность	Функциональность	Комфорт	Качество	Дизайн
А	3	4	3	2	4
Б	2	3	4	3	2
В	4	2	3	4	2

2. Телефонная станция предлагает три тарифных плана. В таблице для каждого тарифного плана указана месячная абонентская плата, включённое в тариф время разговора и цена минуты сверх включённого времени.

Тарифный план	Абонентская плата	Включено в тариф	Цена за минуту сверх включённого
«Повременный»	130,00 руб.	—	0,25 руб. за 1 мин
«Комбинированный»	215,00 руб.	340 мин в месяц	0,25 руб. за 1 мин сверх 340 мин
«Безлимитный»	300,00 руб.	без ограничений	—

Абонент предполагает, что его телефонные разговоры составят 600 минут в месяц и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодный тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, выбрав самый дешёвый тарифный план, при общей продолжительности разговоров 600 минут?

3. Для отделки мемориала требуется заказать 25 одинаковых мраморных плит в одной из трёх фирм. Площадь каждой плиты равна 0,5 $м^2$. В таблице приведены цены на мрамор, а также на резку плит. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	**Цена мрамора (руб. за 1 $м^2$)**	**Резка (руб. за одну плиту)**
А	6600	150
Б	7000	130
В	7400	110

4. Клиент хочет арендовать машину на двое суток для поездки длиной 1200 км. Помимо аренды, клиент должен оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Сколько рублей заплатит клиент, если выберет самый дешёвый вариант? Цена дизельного топлива 21 руб. за литр, АИ-95 — 25 руб. за литр, АИ-98 — 28 руб. за литр.

Автомобиль	**Топливо**	**Расход топлива (л на 100 км)**	**Арендная плата (руб. за 1 сутки)**
А	Дизельное	8	3900
Б	АИ-95	10	3400
В	АИ-98	9	3400

5. Троллейбусному парку нужно купить 8 троллейбусов одной из трёх моделей. В таблице указаны цены на троллейбусы каждой модели. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый вариант?

Модель троллейбуса	**Цена (руб. за один троллейбус)**	**Дополнительные условия**
ЗиУ-682Г-016	3 000 000	При покупке на сумму более 20 млн руб. скидка 10%
БТЗ-52764	2 670 000	—
ВМЗ-5298	2 750 000	При покупке более 5 троллейбусов скидка 5%

Работа с информацией

Немного полезной информации

Умение пользоваться таблицами в современной жизни наверняка пригодится каждому. Никаких особых навыков для решения задач этого раздела вам не понадобится, только умение внимательно читать и считать. Обратите внимание, что иногда при сравнении, если нужно выбрать наименьшее или наибольшее число, можно сначала сделать прикидку, а потом вычислять до конца только подходящий вариант. Например, нужно сравнить результаты от деления 99 : 18 и 95 : 21. Начало деления покажет, что первое частное равно 5 целых и ещё что-то, а второе — 4 целых и ещё что-то. Если нам нужно найти наибольшее значение, будем вычислять только первое частное.

При чтении условия задачи обязательно посмотрите на единицы измерения и на то, в каких единицах требуется написать ответ. Сами единицы в ответ не записывают.

Часто учащиеся делают ошибки при ответе на вопрос «Сколько тысяч рублей заплатили за... ?» Вместо, например, 25 тысяч рублей (в бланке нужно писать 25) записывают 25 000.

Полезно ещё помнить, что если кто-то идёт быстрее, то его скорость больше. Если же два объекта вышли одновременно, а один из них пришёл позже, то его время в пути больше.

Задачи с решениями

1. Для остекления парника требуется заказать 20 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла 0,85 м^2. В таблице приведены цены на стекло и на резку стёкол. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)	Дополнительные условия
А	180	40	
Б	200	35	
В	220	25	При заказе на сумму больше 3500 руб. резка бесплатно

Решение.

20 стёкол площадью 0,85 м^2 каждое составят общую площадь 17 м^2. Чтобы узнать стоимость стекла, нужно его цену умножить на площадь. Чтобы узнать стоимость резки стекла, нужно число стёкол (20) умножить на стоимость резки за одно стекло. Потом нужно результаты сложить и получить стоимость заказа. Для фирмы А стоимость заказа равна $180 \cdot 17 + 40 \cdot 20 = 3860$ рублей. Для фирмы Б стоимость заказа равна $200 \cdot 17 + 35 \cdot 20 = 4100$ рублей. Для фирмы В стоимость заказа равна $220 \cdot 17 = 3740$ рублей. Так как стоимость заказа больше 3500 руб., то в фирме В резка обойдётся бесплатно. Следовательно, самый дешёвый заказ будет стоить 3740 рублей.

Ответ: 3740.

2. Для перевозки 8 т фруктов на 1200 км можно воспользоваться услугами одной из трёх транспортных компаний. Каждая компания предлагает один вид автомобилей. Сколько рублей будет стоить наиболее дешёвый вариант перевозки?

Компания-перевозчик	Стоимость перевозки (руб. за 100 км)	Грузоподъёмность автомобилей (т)
«Альфа»	850	1,8
«Бета»	1200	2,2
«Гамма»	1500	3,3

Решение.

Выясним, сколько машин нужно будет заказать в каждой из фирм, чтобы перевезти 8 т фруктов. Машин фирмы «Альфа» нужно 5 (4 машин по 1,8 т не хватит для перевозки 8 т, а 5 точно хватит). Машин фирмы «Бета» нужно 4 (3 машин по 2,2 т не хватит для перевозки 8 т, а 4 точно хватит). Машин фирмы «Гамма» нужно 3 (2 машин по 3,3 т не хватит для перевозки 8 т, а 3 точно хватит).

Стоимость перевозки одной машиной нам дана в рублях за 100 км, тогда на 1200 км нужно в 12 раз больше. Чтобы найти стоимость каждого из вариантов перевозки, нужно стоимость перевозки за 100 км умножить на 12 и полученный результат умножить на число заказанных машин.

Для фирмы «Альфа» стоимость перевозки составит $850 \cdot 12 \cdot 5 = 51\,000$ руб., для фирмы «Бета» эта стоимость составит $1200 \cdot 12 \cdot 4 = 57\,600$ руб., для фирмы «Гамма» — $1500 \cdot 12 \cdot 3 = 54\,000$ руб. Выбираем наиболее дешёвый вариант перевозки, это вариант фирмы «Альфа».

Ответ: 51 000.

3. Семья из трёх человек едет из Волгодонска в Москву. Можно ехать на автобусе, а можно — на своей машине. Билет на автобус для одного человека стоит 1200 рублей. Автомобиль расходует 7 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 1100 км, а цена бензина равна 23,8 руб. за литр. Сколько рублей будет стоить самая дешёвая поездка для этой семьи?

Решение.

Автомобиль расходует 7 литров бензина на 100 километров пути, расстояние равно 1100 км (в 11 раз больше, чем 100 км), тогда бензина понадобится $7 \cdot 11 = 77$ литров. Вычисляем стоимость 77 литров бензина по цене 23,8 рубля за литр: $77 \cdot 23{,}8 = 1832{,}6$ рубля. Три билета на автобус будут стоить $3 \cdot 1200 = 3600$ рублей. Значит, автомобильная поездка будет самой дешёвой, её стоимость составит 1832,6 рубля.

Ответ: 1832,6.

4. Для строительства дачного домика можно использовать один из двух типов стен: кирпичные или стены из керамзитоблоков. Для стен из керамзитоблоков необходимо 520 штук керамзитоблоков и 3 мешка цемента. Для кирпичных стен необходимо 2500 кирпичей и 7 мешков цемента. Один керамзитоблок стоит 40 рублей, кирпич стоит 8 рублей за штуку, а мешок цемента стоит 180 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

Решение.

Для стен из керамзитоблоков необходимо 520 штук керамзитоблоков по 40 рублей за штуку и 3 мешка цемента по 180 рублей за мешок, то есть $520 \cdot 40 + 3 \cdot 180 = 20\,800 + 540 = 21\,340$ рублей.

Для стен из кирпича необходимо 2 500 штук кирпичей по 8 рублей за штуку и 7 мешков цемента по 180 рублей за мешок, то есть $2\,500 \cdot 8 + 7 \cdot 180 = 20\,000 + 1\,260 = 21\,260$ рублей.

Наиболее дешёвый вариант стоимости материала будет для стен из кирпича и составит 21 260 рублей.

Ответ: 21 260.

5. От дома до дачи можно доехать на дачном автобусе, на электричке или на рейсовом автобусе до ближайшего посёлка. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

	1	**2**	**3**
Дачный автобус	От дома до автобусной станции — 30 мин	Автобус в пути — 1 ч 5 мин	От остановки автобуса до дачи пешком — 15 мин
Электричка	От дома до станции железной дороги — 15 мин	Электричка в пути — 1 ч 20 мин	От станции до дачи пешком — 25 мин
Рейсовый автобус	От дома до остановки автобуса — 10 мин	Автобус в дороге — 50 мин	От остановки автобуса до дачи пешком — 45 мин

Решение.

Время на дорогу складывается из времени на путь от дома до остановки транспорта, времени транспорта в пути и времени на путь пешком до дачи.

Для дачного автобуса время равно
30 мин + 1 ч 5 мин + 15 мин = 1 ч 50 мин.

Для электрички время равно
15 мин + 1 ч 20 мин + 25 мин = 1 ч 60 мин = 2 ч.

Для рейсового автобуса время равно
10 мин + 50 мин + 45 мин = 1 ч 45 мин.

Видим, что наименьшее время потребуется на дорогу, если ехать рейсовым автобусом. Осталось перевести в часы 1 ч 45 мин. Так как в одном часе 60 минут, для перевода минут в часы нужно минуты поделить на 60. Вычисляем 45 : 60 = 0,75. Всего 1,75 ч.

Ответ: 1,75.

6. Из пункта A в пункт C ведут три дороги. Через пункт D едет грузовик со средней скоростью 40 км/ч, через пункт B едет легковой автомобиль со средней скоростью 70 км/ч. Через пункт E движется автобус со средней скоростью 48 км/ч. На рисунке 33 показана схема дорог и указано расстояние между пунктами по дорогам. Все три автомобиля одновременно выехали из пункта A. Какой автомобиль добрался до пункта C позже других? В ответе укажите, сколько часов он находился в дороге.

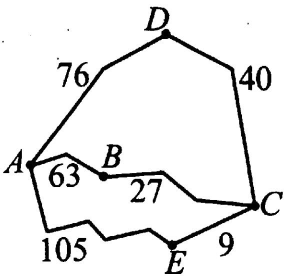


Рис. 33.

Решение.

Посчитаем расстояния от A до C по разным дорогам и время в пути. Грузовик едет через пункт D, проезжая $76+40 = 116$ км со средней скоростью 40 км/ч. Чтобы найти время в пути, нужно расстояние разделить на среднюю скорость: $116 : 40 = 2{,}9$ ч. Автобус едет через пункт E, его путь равен $105 + 9 = 114$ км. Он едет со средней скоростью 48 км/ч, время поездки $114 : 48 = 2{,}375$ ч. Через пункт B едет легковой автомобиль со средней скоростью 70 км/ч. Его путь $63 + 27 = 90$ км. Найдём время в пути легкового автомобиля. Оно равно $90 : 70 = 1{,}2...$ ч. В ответе получится бесконечная десятичная дробь, но её точное значение нам не нужно, так как в задаче спрашивалось: «Какой автомобиль добрался до пункта C позже других?» Видим, что самое большое время в пути у грузовика, поэтому он и приедет позже всех.

Ответ: 2,9.

7. Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяжённостью 800 км. В таблице приведены стоимость аренды трёх автомобилей и их характеристики. Помимо аренды, клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант? Цена дизельного топлива 19,5 руб. за литр, бензина — 23,5 руб. за литр, газа — 11 руб. за литр.

Автомобиль	**Топливо**	**Расход топлива на 100 км**	**Арендная плата за 1 сутки**
№ 1	Дизельное	6	1600
№ 2	Бензин	9	1100
№ 3	Газ	12	1250

Решение.

В таблице приведены показатели расхода топлива для автомобилей на 100 км, значит, клиенту для поездки протяжённостью 800 км понадобится горючего в 8 раз больше, то есть дизельного топлива $6 \cdot 8 = 48$ л, бензина $9 \cdot 8 = 72$ л, газа $12 \cdot 8 = 96$ л.

Умножим цену литра топлива на посчитанное количество литров и получим стоимость топлива. Тогда стоимость дизельного топлива $19{,}5 \cdot 48 = 936$ рублей, бензина — $23{,}5 \cdot 72 = 1692$ рубля, газа — $11 \cdot 96 = 1056$ рублей.

Полная сумма состоит из стоимости топлива и аренды автомобиля. Следовательно, для 1-го автомобиля полная сумма равна $936 + 1600 = 2536$ рублей, для 2-го — $1692 + 1100 = 2792$ рубля и для 3-го — $1056 + 1250 = 2306$ рублей. Самый дешёвый вариант для 3-й машины. Значит, если клиент выберет самый дешёвый вариант, то он заплатит за аренду и топливо 2306 рублей.

Ответ: 2306.

8. В таблице приведены условия банковского вклада в трёх различных банках. Предполагается, что клиент кладёт на счёт 10 000 рублей на срок 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Банк	**Обслуживание счёта***	**Процентная ставка (% годовых)****
A	120 руб. в год	8
B	15 руб. в месяц	8,5
C	Бесплатно	7,5

*В начале года или месяца со счёта снимается указанная сумма в уплату за ведение счёта.

**В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.

Решение.

Из чего складывается сумма вклада к концу года? Из первоначального вклада минус плата за ведение счёта, а также процентов от полученной суммы. Посчитаем сначала итоговую сумму без процентов. В банке А эта сумма будет равна $10\,000 - 120 = 9880$ рублей, в банке Б — $10\,000 - 15 \cdot 12 = 9820$ рублей, в банке С — 10 000 рублей.

Теперь посчитаем проценты по вкладу. 8% от 9880 равно $9880 : 100 \cdot 8 = 790{,}4$ рублей в банке А. 8,5% от 9820 равно $9820 : 100 \cdot 8{,}5 = 834{,}7$ рублей в банке В. 7,5% от 10 000 равно $10\,000 : 100 \cdot 7{,}5 = 750$ рублей в банке С.

Заполним таблицу.

Банк	**Обслуживание счёта**	**Обслуживание счёта в год**	**Итоговая сумма без процентов**	**Процентная ставка (% годовых)**	**Сумма % по вкладу (в руб.)**	**Вклад к концу года в руб.**
А	120 руб. в год	−120 руб.	9880	8	+790,4	10 670,4
В	15 руб. в месяц	−180 руб.	9820	8,5	+834,7	10 654,7
С	Бесплатно	—	10 000	7,5	+750	10 750

Видим, что к концу года вклад окажется наибольшим в банке С и будет равен 10 750 рублей.

Ответ: 10 750.

9. Предполагается поездка длительностью 45 минут. В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Клиенту нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки*	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (руб.)
A	50	Нет	3
B	30	20 мин — 50 руб.	6
C	Бесплатно	10 мин — 60 руб.	4

*Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

Решение.

Стоимость заказа складывается из стоимости подачи машины, стоимости минимальной поездки и стоимости минут сверх продолжительности минимальной поездки (для фирм B и C это 45 мин минус 20 или 10 мин соответственно). Заполним таблицу.

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность минимальной поездки	Сумма за минимальную поездку	Стоимость 1 минуты сверх минимальной поездки	Число минут сверх минимума	Сумма сверх минимальной	Всего
A	50 руб.	Нет	—	3 руб.	45 мин	135 руб.	185 руб.
B	30 руб.	20 мин	50 руб.	6 руб.	25 мин	150 руб.	230 руб.
C	Беспл.	10 мин	60 руб.	4 руб.	35 мин	140 руб.	200 руб.

Видим, что заказ будет стоить дешевле всего в фирме A, сумма этого заказа 185 рублей.

Ответ: 185.

10. Для того чтобы связать коврик, хозяйке нужно 1200 граммов разноцветной шерсти. Можно купить пряжу разных цветов по цене 80 рублей за 50 г, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 60 рублей за 50 г и окрасить её. Один пакетик краски стоит 55 рублей и рассчитан на окраску

400 г пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответе напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

Решение.

На 1200 г шерсти нужно $1200 : 400 = 3$ пакетика краски. Хозяйке нужно купить 3 таких пакетика по цене 55 рублей за пакет, на сумму $3 \cdot 55 = 165$ рублей.

Заполним таблицу.

	Цена за 50 г	**Цена за 100 г**	**Цена за 1200 г**	**Краска**	**Всего**
Окр.	80	160	$160 \cdot 12 = 1920$	—	1920
Неокр.	60	120	$120 \cdot 12 = 1440$	165	$1440 + 165 = 1605$

Видим, что дешевле вариант покупки неокрашенной шерсти, эта покупка будет стоить 1605 рублей.

Ответ: 1605.

11. Своему клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок. Либо скидку 30% на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, либо скидку 15% на звонки абонентам стационарных телефонов, либо 25% на услуги мобильного интернета.

Клиент посмотрел распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 200 рублей на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 300 рублей на звонки абонентам стационарных телефонов и 260 рублей на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же, и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Какую скидку выгоднее выбрать? В ответе запишите, сколько рублей составит эта скидка.

Решение.

Посчитаем скидки (в рублях), которые клиент мог бы предположительно получить. Скидка 30% от 200 рублей на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе составит $200 : 100 \cdot 30 = 60$ рублей. Скидка 15% от 300 рублей на звонки абонентам стационарных телефонов составит $300 : 100 \cdot 15 = 45$ рублей. Скидка 25% на услуги мобильного интернета составит $260 : 100 \cdot 25 = 65$ рублей. Наиболее выгодная скидка составит 65 рублей.

Ответ: 65.

12. В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 5000 руб., он получает сертификат на 500 рублей, который можно обменять в том же магазине на любой товар ценой не выше 500 руб. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Лидия Львовна хочет приобрести сумку ценой 4800 руб., платок ценой 450 руб. и кошелёк ценой 300 руб. В каком случае Лидия Львовна заплатит за покупку меньше всего?

1) Если купит все три товара сразу.

2) Если купит сначала сумку и платок, а кошелёк получит за сертификат.

3) Если купит сначала сумку и кошелёк, а платок получит за сертификат.

В ответ запишите, сколько рублей заплатит Лидия Львовна за покупку в этом случае.

Решение.

Для того чтобы заплатить за покупку меньше всего, нужно использовать сертификат. Значит, случай 1 не будет самым дешевым. Если купить сначала сумку и любой из двух других предметов, третий получишь по сертификату бесплатно, значит, нужно по сертификату получить товар подороже, то есть платок, это случай 3. Посчитаем, сколько рублей заплатит Лидия Львовна за покупку в этом случае: $4800 + 300 = 5100$.

Ответ: 5100.

13. В среднем гражданин Иван Семёнович в дневное время расходует 110 кВт · ч электроэнергии в месяц, а в ночное время — 135 кВт · ч электроэнергии. Раньше у Ивана Семёновича в квартире был установлен однотарифный счётчик, и всю электроэнергию он оплачивал по тарифу 3,23 руб. за кВт · ч. Год назад Иван Семенович установил двухтарифный счётчик, при этом дневной расход электроэнергии оплачивается по тарифу 3,43 руб. за кВт · ч, а ночной расход оплачивается по тарифу 2,68 руб. за кВт · ч. В течение 12 месяцев режим потребления и тарифы оплаты электроэнергии не менялись. На сколько больше заплатил бы Иван Семёнович за этот период, если бы не поменял счётчик? Ответ дайте в рублях.

Решение.

1-й способ.

Посчитаем, сколько платил бы Иван Семёнович в месяц, если бы не поменял счётчик. $(110 + 135) \cdot 3{,}23 = 791{,}35$ руб. Посчитаем, сколько заплатил Иван Семёнович за этот период по двухтарифному счётчику. $110 \cdot 3{,}43 + 135 \cdot 2{,}68 = 739{,}1$ руб. За месяц экономия составила $791{,}35 - 739{,}1 = 52{,}25$ рублей, за год $52{,}25 \cdot 12 = 627$ рублей.

2-й способ.

По двухтарифному счётчику Иван Семёнович за каждый месяц за дневное время заплатил больше на $110 \cdot (3{,}43 - 3{,}23) = 22$ руб., а в ночное время меньше на $135 \cdot (3{,}23 - 2{,}68) = 74{,}25$ руб. Экономия за месяц $74{,}25 - 22 = 52{,}25$ руб., за год $52{,}25 \cdot 12 = 627$ рублей.

Ответ: 627.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Для проведения детского праздника нужно заказать 72 одинаковых подарка с конфетами в одной из трёх фирм. В каждом подарке 2 кг конфет. В таблице приведены цены на конфеты, а также на подарочные упаковки. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	**Цена конфет (руб. за 1 кг)**	**Цена упаковки (руб. за один подарок)**
А	150	45
Б	155	30
В	165	20

2. Чтобы перевезти 70 легковых автомобилей на 1100 км, можно воспользоваться услугами одной из трёх транспортных компаний. Стоимость перевозки и вместимость грузовиков для каждой компании указаны в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

Компания	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 50 км)	Количество автомобилей в одном грузовике
А	833	6
Б	1630	12
В	2380	18

3. Оператор сотовой связи предлагает три тарифных плана. В таблице для каждого тарифного плана указана месячная абонентская плата, включённое в тариф время разговора и цена каждой минуты сверх включённого времени.

Тарифный план	Абонентская плата	Цена каждой минуты сверх включённого
Тариф «200»	300 руб. за 200 мин в месяц	2 руб. за 1 мин сверх 200 мин
Тариф «400»	550 руб. за 400 мин в месяц	1,5 руб. за 1 мин сверх 400 мин
Тариф «600»	850 руб. за 600 мин в месяц	1 руб. за 1 мин сверх 600 мин

Абонент предполагает, что его телефонные разговоры составят 500 минут в месяц и, исходя из этого, выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, выбрав самый дешёвый тарифный план?

4. В качестве новогоднего подарка оператор сотовой связи предлагает своим пользователям на выбор одну из трёх скидок: 35% на звонки внутри сети, 25% на звонки абонентам других компаний или 30% на отправку текстовых сообщений. Клиент тратит в месяц 150 рублей на звонки внутри сети, 250 рублей на звонки абонентам других компаний и 200 рублей на отправку текстовых сообщений. Какую скидку нужно выбрать клиенту, чтобы получить наибольшую выгоду? В ответе запишите, сколько рублей составит эта скидка.

5. Магазин предоставляет своим постоянным посетителям на выбор одну из трёх дисконтных карт. Скидка, предоставляемая владельцу карты, а также стоимость её месячного обслуживания указаны в таблице. В прошлом месяце клиент приобрёл в магазине товаров на сумму 3800 рублей и выбирает максимально выгодную дисконтную карту, исходя из того, что в следующем месяце он приобретёт товаров на ту же сумму. Сколько рублей составят его месячные траты после получения карты, если цена купленных товаров в следующем месяце действительно окажется 3800 рублей?

Дисконтная карта	**Скидка на приобретение товаров**	**Стоимость обслуживания (руб. в месяц)**
«Бронзовая»	5%	0
«Серебряная»	10%	100
«Золотая»	15%	400

Вариант 2

1. Клиент кладёт на банковский счёт 30 000 рублей на срок 1 год. Какой вклад он должен выбрать, чтобы к концу этого срока получить на счету наибольшую сумму? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Вклад	**Обслуживание счёта***	**Процентная ставка (% годовых)****
А	400 руб. в год	3
Б	80 руб. в месяц	4,5
В	Бесплатно	2

* В начале года или месяца со счёта снимается указанная сумма в уплату за ведение счёта.

** В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.

2. Спортивный центр предлагает своим посетителям три программы занятий.

Программа	**Плата в месяц**	**Стоимость дополнительных занятий**
«Первая»	нет	400 руб. за занятие
«Вторая»	4300 руб. в месяц за 12 занятий	400 руб. за каждое занятие сверх 12
«Третья»	7900 руб. в месяц за 24 занятия	400 руб. за каждое занятие сверх 24

Клиент желает посетить в спортивном центре 16 занятий в месяц и, исходя из этого, выбирает наиболее дешёвую программу. Сколько рублей заплатит клиент за месяц?

3. Для съёмок исторического фильма нужно заказать 26 комплектов кожаной брони в одной из трёх фирм. На каждый комплект расходуется 2,5 $м^2$ кожи. В таблице приведена цена кожи, а также пошива брони. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	**Цена кожи (руб. за 1 $м^2$)**	**Цена пошива (руб. за один комплект)**
А	300	3200
Б	320	3000
В	350	2800

4. Чтобы перевезти 315 человек на 250 км, можно воспользоваться предложением одной из трёх туристических фирм. Стоимость перевозки и количество мест в автобусах для каждой фирмы указаны в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

Фирма	**Стоимость перевозки одним автобусом (руб. на 100 км)**	**Количество мест**
А	1280	43
Б	2030	68
В	2050	73

5. Фирме нужно приобрести 18 кубометров намывного песка у одного из трёх поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	**Цена песка (руб. за 1 $м^3$)**	**Стоимость доставки (руб.)**	**Дополнительные условия**
А	170	3600	—
Б	180	3300	При заказе на сумму больше 20 000 руб. доставка бесплатно
В	190	3300	При заказе на сумму больше 15 000 руб. доставка бесплатно

Вариант 3

1. Для кровельных работ можно использовать один из двух видов материалов: металлочерепицу или мягкую черепицу. Для первого вида работ понадобится 60 м^2 металлочерепицы и 10 кг крепежа. Для второго — 40 м^2 мягкой черепицы и 7 кг крепежа. Квадратный метр металлочерепицы стоит 220 рублей, квадратный метр мягкой черепицы стоит 380 рублей, 1 кг крепежа стоит 40 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

2. Для отделки фонтана управление по благоустройству города должно заказать 60 мраморных плит одной из трёх фирм. Площадь каждой плиты составляет 0,35 м^2. Цена материала, а также стоимость резки указаны в таблице. Сколько будет стоить заказ, если выбрать самый дешёвый вариант?

Фирма	Цена мрамора (руб. за 1 м^2)	Резка мрамора (руб. за одну плиту)	Дополнительные условия
А	4200	150	—
Б	4700	120	—
В	5200	80	При заказе на сумму больше 100 000 руб. резка бесплатно

3. Компания из четырёх человек едет из Москвы в Новосибирск. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Один билет на поезд стоит 1300 рублей. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 3200 км, а цена бензина равна 19 руб. за литр. Сколько рублей будет стоить самая дешёвая поездка для этой компании?

4. Строительной фирме нужно приобрести 2650 килограммов листовой стали у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость стали (руб. за тонну)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	25 600	3400	
Б	23 700	6500	При заказе на сумму больше 75 000 руб. доставка бесплатно
В	24 600	4500	При заказе более 2,5 тонн доставка бесплатно

5. Оптовый склад, продающий замочно-скобяные изделия и хозяйственные товары, предоставляет своим постоянным покупателям одну из трёх скидок: 3% на замочно-скобяные изделия, 3% на хозяйственные товары, либо 2% на все товары. Фирма покупает в месяц замочно-скобяных изделий на 3800 рублей и хозяйственных товаров на 8800 рублей и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодную скидку. Сколько рублей в месяц составит скидка?

Вариант 4

1. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,02 средней цены C, показателей функциональности P, качества K и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле $R = 3\,(3P + 4K + 2D) - 0{,}02C$.

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических чайников. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей электрических чайников.

Модель чайника	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	2900	2	1	2
Б	4500	3	3	4
В	3100	4	2	4
Г	3200	2	4	3

2. Для перевозки 65 тонн груза на 1800 км можно использовать одну из трёх компаний. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей для каждой компании указаны в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

Компания	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъёмность одного автомобиля (тонн)
А	4200	4
Б	6100	6
В	11600	12

3. В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 15 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 5%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Н. хочет приобрести кондиционер ценой 9900 руб., соковыжималку ценой 5800 руб. и кулер ценой 5200 руб. В каком случае Н. заплатит за покупку меньше всего?

1) Н. купит все три товара сразу.

2) Н. купит сначала кондиционер и соковыжималку, а потом кулер со скидкой.

3) Н. купит сначала кондиционер и кулер, а потом соковыжималку со скидкой.

В ответ запишите, сколько рублей заплатит Н. за покупку в этом случае.

4. В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трёх магазинах Москвы (по данным на февраль 2013 года).

Наименование продукта	A	B	C
Сахар (1 кг)	50	26	72
Молоко (1 литр)	50	44	94
Картофель (1 кг)	22	13	74
Яйца (1 десяток)	99	44	92
Мясо (говядина)	459	487	890
Растительное масло (1 литр)	90	72	99

Определите, в каком из этих магазинов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 2 л молока, 3 кг картофеля, 2 кг говядины, 1 л подсолнечного масла. В ответе запишите стоимость данного набора продуктов в этом магазине (в рублях).

5. В I банке 1 евро можно купить за 39,5 рубля. Во II банке 20 евро можно купить за 802 рубля. В III банке 30 евро можно купить за 1176 рублей. Какую наименьшую сумму (в рублях) придется заплатить за 60 евро?

Вариант 5

1. Независимое агентство каждый месяц определяет рейтинги R новостных сайтов на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель оценивается целыми числами от -2 до 2. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле $R = 25 \cdot \left(\frac{2In + Op + 3Tr}{6} + 2\right)$.

В таблице даны оценки каждого показателя для нескольких новостных сайтов. Определите наивысший рейтинг новостных сайтов, представленных в таблице. Запишите его в ответе, округлив до целого числа.

Сайт	Информативность	Оперативность	Объективность
A	2	−2	0
D	1	2	−2
H	1	1	1
F	−1	2	−2

2. Варя загружает на свой компьютер из Интернета файл размером 35 Мб за 25 секунд. Галя загружает файл размером 24 Мб за 15 секунд, а Маша загружает файл размером 66 Мб за 40 секунд. Сколько секунд будет загружаться файл размером 660 Мб на компьютер с наибольшей скоростью загрузки?

3. В первом банке один фунт стерлингов можно купить за 45,9 рублей. Во втором банке 20 фунтов — за 928 рублей. В третьем банке 15 фунтов стоят 720 рублей. Какую наименьшую сумму (в рублях) придётся заплатить за 10 фунтов стерлингов?

4. В среднем гражданин Иван Иванович в дневное время расходует 130 кВт · ч электроэнергии в месяц, а в ночное время — 115 кВт · ч электроэнергии. Раньше у Ивана Ивановича в квартире был установлен однотарифный счётчик, и всю электроэнергию он оплачивал по тарифу 3,23 руб. за кВт · ч. Год назад Иван Иванович установил двухтарифный счётчик, при этом дневной расход электроэнергии оплачивается по тарифу 3,43 руб. за кВт · ч, а ночной расход оплачивается по тарифу 2,68 руб. за кВт · ч. В течение 12 месяцев режим потребления и тарифы оплаты электроэнергии не менялись. На сколько больше заплатил бы Иван Иванович за этот период, если бы не поменялся счётчик? Ответ дайте в рублях.

5. Мебельный салон заключает договоры с производителями мебели. В договорах указывается, какой процент от суммы, вырученной за продажу мебели, поступает в доход мебельного салона.

Фирма-производитель	**Процент от выручки, поступающий в доход салона**	**Примечания**
«Шкафур»	2%	Изделия ценой до 25 000 руб.
«Шкафур»	4%	Изделия ценой свыше 25 000 руб.
«Стружка»	5%	Все изделия
«Омега»	4%	Все изделия

В прейскуранте приведены цены на четыре спальни. Определите, продажа какой спальни наиболее выгодна для салона. В ответе запишите, сколько рублей поступит в доход салона от продажи этой спальни.

Фирма-производитель	**Изделие**	**Цена**
«Шкафур»	Спальня «Мария»	17 000 руб.
«Шкафур»	Спальня «Уют»	29 000 руб.
«Стружка»	Спальня «Ваниль»	18 000 руб.
«Омега»	Спальня «Роза»	31 000 руб.

Теория вероятностей (B6)

В данном параграфе рассматриваются только наиболее простые из заданий, присутствующих в открытом банке по математике. Для охватывающего изучения всех тем задания ЕГЭ по теории вероятностей рекомендуется брошюра **«Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Теория вероятностей»**.

Диагностическая работа

1. Из 2000 собранных на заводе вентиляторов 4 штуки бракованных. Эксперт проверяет один наугад выбранный вентилятор из этих 2000. Найдите вероятность того, что проверяемый вентилятор окажется бракованным.

2. В стандартном наборе домино 28 костей, каждая разделена на 2 части, в которых может быть от нуля до шести точек (все кости в наборе разные). Найдите вероятность того, что наугад выбранная кость будет содержать 6 точек хотя бы в одной из частей.

3. В урне 10 красных, 7 жёлтых и 8 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что все 10 красных шаров остались в урне?

4. Из стандартной колоды в 36 карт выкинули два туза и всех дам. Из оставшихся 30 карт наугад вытягивают одну карту. Какова вероятность того, что эта карта окажется королём или тузом?

5. Монету подбрасывают три раза подряд. Найдите вероятность того, что при этих подбрасываниях «орёл» не появится ни разу.

6. Одновременно бросают два игральных кубика. Найдите вероятность P того, что «шестёрка» выпадет ровно на одном из этих кубиков. В ответе запишите величину $\frac{1}{P}$.

Вероятность события

Немного полезной информации

Случайным называют событие, которое может произойти или не произойти (заранее предсказать невозможно) во время наблюдения или испытания.

Пусть при проведении испытания (бросание монеты или кубика, вытягивание экзаменационного билета и т. д.) возможны n равновозможных исходов. Например, при подбрасывании монеты число всех исходов n равно 2, так как кроме выпадения решки или орла других исходов быть не может. При броске игрального кубика возможны 6 исходов, так как на верхней грани кубика равновозможно появление любого из чисел от 1 до 6. Пусть также некоторому событию A благоприятствуют m исходов.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных для этого события исходов к общему числу равновозможных исходов: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Например, пусть событие A состоит в выпадении нечётного числа очков при бросании кубика. Всего возможны 6 исходов: выпадение на верхней грани кубика 1, 2, 3, 4, 5, 6. При этом благоприятными для события A являются исходы с выпадением 1, 3, 5. Таким образом, $P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

Заметим, что всегда выполняется двойное неравенство $0 \leqslant m \leqslant n$, поэтому вероятность любого события A лежит на отрезке $[0; 1]$, то есть $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Задачи с решениями

1. Из 1000 собранных на заводе телевизоров 5 штук бракованных. Эксперт проверяет один наугад выбранный телевизор из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемый телевизор окажется бракованным.

Решение.

При выборе телевизора наугад возможны 1000 исходов, событию A «выбранный телевизор — бракованный» благоприятны 5 исходов. По определению вероятности $P(A) = \frac{5}{1000} = 0{,}005$.

Ответ: 0,005.

2. В урне 9 красных, 6 жёлтых и 5 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется жёлтым?

Решение.

Общее число исходов равно числу шаров: $9 + 6 + 5 = 20$. Число исходов, благоприятствующих данному событию, равно 6. Искомая вероятность равна $\frac{6}{20} = 0{,}3$.

Ответ: 0,3.

Противоположные события

Немного полезной информации

События A и B называются **противоположными** друг другу, если любой исход благоприятен ровно для одного из них. Например, в рассмотренной задаче №1 событие «выбранный телевизор — рабочий» является противоположным событию «выбранный телевизор — бракованный».

Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$. Из определения противоположных событий следует $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, значит, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Задачи с решениями

3. Из 30 билетов, предлагаемых на экзамене, школьник может ответить только на 27. Какова вероятность того, что школьник не сможет ответить на наугад выбранный билет?

Решение.

1-й способ.

Обозначим событие «школьник может ответить на билет» через A. Тогда $P(A) = \frac{27}{30} = 0{,}9$. Вероятность противоположного события равна $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

2-й способ.

Так как школьник может ответить на 27 билетов, то на 3 билета он ответить не может. Вероятность получить один из этих билетов равна $\frac{3}{30} = 0{,}1$.

Ответ: 0,1.

Объединение событий

Немного полезной информации

Два события A и B называют **несовместными**, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременно как событию A, так и событию B. Например, при бросании кубика событие «выпало число 3» и событие «выпало чётное число» несовместны. При этом событие «выпало число больше 3» и событие «выпало чётное число» совместны.

Пусть событие C означает, что произошло хотя бы одно из событий A и B. Тогда C называют **объединением событий** A и B, пишут $C = A \cup B$.

Если события A и B несовместны, то вероятность их объединения равна сумме вероятностей событий A и B:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Задачи с решениями

4. Имеются 20 карточек, на которых записаны числа от 1 до 20. Из них наугад выбирают одну карточку. Какова вероятность того, что на выбранной карточке будет число 20 или любое нечётное число?

Решение.

Обозначим через A событие «выбрана карточка с числом 20», через B — событие «выбрана карточка с нечётным числом». События A и B

несовместны. Вероятность события A равна $\frac{1}{20}$. Так как карточек с нечётными числами ровно половина от общего числа карточек, то $P(B) = \frac{1}{2}$.

Поэтому $P(A \cup B) = \frac{1}{20} + \frac{1}{2} = 0{,}55$.

Ответ: 0,55.

5. На подносе лежат одинаковые на вид пирожки: 4 с мясом, 2 с картошкой и 9 с капустой. Какова вероятность того, что случайно выбранный пирожок будет с мясом или картошкой?

Решение.

События выбора пирожка с мясом и с картошкой несовместны. Всего пирожков $4+2+9 = 15$. Вероятность выбора пирожка с мясом равна $\frac{4}{15}$, вероятность выбора пирожка с картошкой равна $\frac{2}{15}$. Вероятность выбора пирожка с мясом или картошкой равна $\frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{6}{15} = 0{,}4$.

Ответ: 0,4.

Пересечение событий

① *Немного полезной информации*

Два события A и B называют **независимыми**, если вероятность каждого из них не зависит от появления или непоявления другого события.

Например, выполним последовательно два подбрасывания монеты. Тогда событие «при первом подбрасывании выпала решка» и событие «при втором подбрасывании выпал орёл» являются независимыми: вероятность каждого из них равна $\frac{1}{2}$ независимо от того, что произошло при другом подбрасывании.

Рассмотрим другой пример. Пусть в урне находятся два чёрных и два белых шара. Сперва из урны наугад извлекают один шар. Затем из той же урны наугад извлекают ещё один шар. Обозначим через A событие «первый извлечённый шар — белый», а через B — «второй извлечённый шар — чёрный». Тогда события A и B являются зависимыми. Действительно, если событие A произошло, то в урне из трёх оставшихся шаров два чёрных и $P(B) = \frac{2}{3}$. Если же событие A не произошло, то в урне из трёх оставшихся шаров один чёрный и $P(B) = \frac{1}{3}$.

Пусть событие C означает, что произошло как событие A, так и B. Тогда C называют **пересечением событий** A и B, пишут $C = A \cap B$.

Если события A и B независимы, то вероятность их пересечения равна произведению вероятностей событий A и B:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Задачи с решениями

6. Монету подбрасывают четыре раза подряд. Какова вероятность того, что все четыре раза выпадет орёл?

Решение.

Обозначим через A_1, A_2, A_3, A_4 вероятности выпадения орла в каждом из четырёх подбрасываний. Эти события независимы, и

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{2}$. Поэтому

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$.

Ответ: 0,0625.

7. Одновременно бросают два игральных кубика. Найдите вероятность P того, что на одном кубике выпадет 5 очков, а на другом — чётное число очков. В ответе запишите величину $\frac{1}{P}$.

Решение.

Обозначим события: A — «на первом кубике выпало 5 очков», B — «на втором кубике выпало чётное число очков», C — «на втором кубике выпало 5 очков», D — «на первом кубике выпало чётное число очков». Тогда данное в условии событие происходит при появлении либо события $A \cap B$, либо события $C \cap D$. События $A \cap B$ и $C \cap D$

несовместны (так как события A и D не могут произойти одновременно). Поэтому искомая вероятность равна $P = P(A \cap B) + P(C \cap D)$. События A и B независимы, события C и D также независимы. Отсюда $P = P(A \cap B) + P(C \cap D) = P(A)P(B) + P(C)P(D) =$
$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. В ответе пишем $\frac{1}{P} = 6$.

Ответ: 6.

8. В группе сотрудников МЧС 240 человек. Их вертолётом в несколько приёмов доставляют в труднодоступный район по 30 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит сотрудников МЧС, случаен. Найдите вероятность того, что сотрудники МЧС Алексей М. и Петр К. полетят одним и тем же рейсом вертолёта. Результат округлите до сотых.

Решение.

Алексей М. попал на какой-нибудь рейс и занял одно из 240 возможных мест. Посчитаем вероятность того, что Петр К. попадёт в число тех 29 человек, которые летят вместе с Алексеем М. Будем считать исходом место, которое займет Петр К. Всего без учёта места Алексея М. 239 мест, из них 29 на том же рейсе, то есть благоприятных исходов 29. Вероятность равна $29 : 239 \approx 0{,}12$.

Ответ: 0,12.

9. На фабрике посуды 6% произведённых кастрюль имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 90% дефектных кастрюль. Остальные кастрюли поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке кастрюля не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Решение.

Пусть всего произвели x кастрюль. Качественных кастрюль $100\% - 6\% = 94\%$, то есть $0{,}94x$, они поступают в продажу. Кастрюль с дефектом 0,06 от общего числа, из них в продажу поступает 10%, то есть $0{,}06 \cdot 0{,}1x = 0{,}006x$. Всего в продажу поступило $0{,}94x + 0{,}006x = 0{,}946x$ кастрюль. Вероятность купить кастрюлю без дефектов равна $0{,}94x : 0{,}946x \approx 0{,}99$.

Ответ: 0,99.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. В тёмном шкафу лежат 50 носков, из них 4 носка зелёного цвета. Какова вероятность того, что вытащенный на ощупь носок окажется зелёного цвета?

2. В стандартном наборе домино 28 костей, каждая разделена на 2 части, в которых может быть от нуля до шести точек (все кости в наборе разные). Из стандартного набора убрали дубли 6 – 6, 5 – 5 и 4 – 4. Из оставшегося набора наугад выбирают одну кость. Найдите вероятность того, что эта кость окажется дублем.

3. Из стандартной колоды в 36 карт наугад вытягивают одну карту. Какова вероятность того, что эта карта окажется королём (любой масти), тузом (любой масти) или пиковой дамой?

4. Одновременно бросают четыре игральных кубика. Какова вероятность того, что на каждом из этих кубиков выпадет нечётное число очков?

5. На складе лежат 200 фонариков (без ламп), из них 10 бракованных, а также 500 ламп для фонариков, из них 30 бракованных. Эксперт наугад выбирает один фонарик и одну лампу, ввинчивает лампу в фонарик. Найдите вероятность того, что лампа будет гореть (для этого лампа и фонарик должны быть без брака).

6. В учебнике 24 задачи по стереометрии. Школьник не знает, как решить 6 из них. Учитель наугад выбирает из учебника задачу по стереометрии и вызывает школьника к доске, предлагая решить эту задачу. Найдите вероятность того, что школьник знает, как решить предложенную задачу.

Вариант 2

1. На детской карусели 20 мест, каждое сделано в виде какого-либо животного. Из этих мест только три сделаны в виде лошадки. Мальчик стоит рядом с работающей каруселью, которую остановят в некоторый заранее неизвестный момент. Найдите вероятность того, что после остановки карусели ближайшее к мальчику место будет сделано в виде лошадки.

2. На подносе лежат 40 пирожков, из них только 5 с капустой. Вася наугад берёт с подноса один пирожок. Вася не любит капусту и желает съесть пирожок с какой-либо другой начинкой. Какова вероятность того, что взятый пирожок действительно окажется с другой начинкой?

3. Стрелок за один выстрел попадает в мишень с вероятностью 0,7. Найдите вероятность того, что после трёх последовательных выстрелов мишень будет поражена хотя бы один раз.

4. Одновременно бросают два игральных кубика. Найдите вероятность P того, что сумма выпавших очков будет меньше 3. В ответе запишите величину $\frac{1}{P}$.

5. Из стандартной колоды в 36 карт наугад вытягивают одну карту, а затем наугад вытягивают ещё одну карту. Найдите вероятность P того, что обе вытянутые карты окажутся одной масти. В ответе запишите величину $\frac{1}{P}$.

6. В урне 5 красных, 9 жёлтых, 4 синих и 2 зелёных шара. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что достали жёлтый или зелёный шар?

Вариант 3

1. Одновременно подбрасывают две монеты. Найдите вероятность того, что выпадет один орёл и одна решка.

2. Для проведении лотереи было изготовлено 5000 билетов, из них 4980 билетов не содержат выигрыша. Какова вероятность получить выигрыш, если приобрести только один билет?

3. Из стандартной колоды в 36 карт наугад вытягивают одну карту. Найдите вероятность P того, что эта карта окажется дамой. В ответе запишите величину $\frac{1}{P}$.

4. Одновременно бросают два игральных кубика. Найдите вероятность P того, что сумма выпавших очков будет больше 11. В ответе запишите величину $\frac{1}{P}$.

5. На подносе лежат одинаковые на вид пирожки: 5 с творогом, 10 с капустой, 7 с картошкой, 8 с мясом. Какова вероятность того, что наугад взятый с подноса пирожок окажется с творогом или картошкой?

6. Стрелок за один выстрел попадает в мишень с вероятностью 0,6. Найдите вероятность того, что после трёх последовательных выстрелов мишень не будет поражена ни разу.

Вариант 4

1. Колесо европейской рулетки (устройства для игры в казино) разделено на ячейки. Из этих ячеек 18 чёрные, 18 красные и одна зелёная. В процессе игры шарик случайным образом падает в одну из ячеек. Найдите вероятность P того, что шарик упадёт в зелёную ячейку. В ответе запишите величину $\frac{1}{P}$.

2. Школьник на экзамене по истории наугад вытягивает один из 24 билетов. Известно, что среди всех этих билетов 6 содержат вопрос по XIX веку. Какова вероятность того, что в вытянутом билете не будет вопроса по XIX веку?

3. При сборке тумбочки столяр использует болты и гайки. У столяра есть мешок с 2000 болтов, из которых 40 бракованных, и мешок с 3000 гаек, из которых 90 бракованных. Столяр наугад достаёт из мешков один болт и одну гайку. Какова вероятность того, что эти болт и гайку удастся соединить (для этого оба изделия должны быть без брака)?

4. Одновременно бросают три игральных кубика. Какова вероятность того, что на каждом из этих кубиков выпадет чётное число очков?

5. Для проведения лотереи было изготовлено 4000 билетов, из них 8 билетов содержат выигрыш. Какова вероятность получить выигрыш, если приобрести только один билет?

6. На подносе лежат одинаковые на вид пирожки: 3 с творогом, 6 с капустой, 4 с картошкой, 7 с мясом. Какова вероятность того, что наугад взятый с подноса пирожок окажется с капустой или мясом?

Вариант 5

1. Колесо американской рулетки (устройства для игры в казино) разделено на ячейки. Из этих ячеек 18 чёрные, 18 красные и две зелёные. В процессе игры шарик случайным образом падает в одну из ячеек. Найдите вероятность P того, что шарик упадёт в зелёную ячейку. В ответе запишите величину $\frac{1}{P}$.

2. PIN-код к банковской карте состоит из упорядоченного набора четырёх цифр (каждая может принимать значения от 0 до 9). Злоумышленник, не зная PIN-код, пытается его подобрать, вводя наугад выбранные наборы цифр (каждый раз разные). На это у злоумышленника есть три попытки (после банковская карта блокируется). Какова вероятность того, что злоумышленнику не удастся подобрать PIN-код?

3. Из стандартной колоды в 36 карт выкинули все карты пиковой, трефовой и червовой масти. Из оставшихся девяти карт наугад вытягивают одну карту, а затем ещё одну карту. Найдите вероятность того, что вторая вытянутая карта будет старше первой.

4. Одновременно бросают два игральных кубика. Найдите вероятность P того, что на них выпадет одинаковое число очков. В ответе запишите величину $\frac{1}{P}$.

5. Из 3000 собранных на заводе холодильников 3 штуки бракованных. Эксперт проверяет один наугад выбранный холодильник из этих 3000. Найдите вероятность того, что проверяемый холодильник окажется бракованным.

6. На подносе лежат одинаковые на вид пирожки: 2 с творогом, 3 с капустой, 4 с картошкой, 1 с мясом. Какова вероятность того, что наугад взятый с подноса пирожок окажется с творогом или мясом?

Вариант 6

1. В некоторой школе из 350 получивших в январе по математике двойки 112 мальчиков. Найдите частоту получивших в январе двойки девочек в этой школе.

2. В соревнованиях по прыжкам в воду участвуют 180 спортсменок: 75 из России, 78 из Англии, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают спортсменки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

3. В чемпионате России участвуют 24 команды. С помощью жребия их нужно разделить на шесть групп по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6.

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда Тверской области окажется в шестой группе? Результат округлите до сотых.

4. Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 196 теннисистов, среди которых 40 участников из Москвы, в том числе Роман Исаев. Найдите вероятность того, что в первом туре Роман Исаев будет играть с каким-либо теннисистом из Москвы.

5. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 11, но не дойдя до отметки 2 часа.

6. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,06. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,05. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Вариант 7

1. Вероятность того, что аккумулятор бракованный, равна 0,02. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой два таких аккумулятора. Найдите вероятность того, что оба аккумулятора окажутся исправными.

2. По отзывам покупателей Иван Кузьмич оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,6. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Кузьмич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

3. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 32 пассажиров, равна 0,91. Вероятость того, что окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,47. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 18 до 31.

4. Вероятность того, что новый MP3-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,038. В некотором городе из 1000 проданных MP3-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую поступило 63 штуки. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

5. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, команде нужно набрать хотя бы 5 очков в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 4 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

6. Помещение освещается светильником с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,1. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Построение и исследование математических моделей (B14)

Диагностическая работа

1. Двое байкеров выехали одновременно из одного города в другой. Первый проехал весь путь с некоторой постоянной скоростью, которая превышала 50 км/ч. Второй проехал первую половину пути со скоростью на 16 км/ч меньше, чем скорость первого байкера, а вторую половину пути со скоростью 120 км/ч. В результате в другой город байкеры приехали одновременно. Найдите скорость первого байкера. Ответ дайте в км/ч.

2. Рыбнадзорный катер патрулирует участок вдоль берега реки длиной 180 км. Против течения реки он проплывает этот участок за время, на 1 час большее, чем по течению реки. Определите скорость течения реки, если скорость катера в стоячей воде равна 19 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

3. На сбор 1800 бонусов первый геймер тратит времени на 6 минут меньше, чем второй. Сколько бонусов в минуту собирает второй геймер, если первый собирает в минуту на 10 бонусов больше?

4. Петя и Вася покрасят вместе забор за 12 часов. Вася и Коля покрасят вместе этот же забор за 20 часов. Коля и Петя покрасят этот же забор за 15 часов. За сколько часов покрасят этот же забор Петя, Вася и Коля, работая одновременно?

5. Дачный бассейн объёмом 15 000 л первый насос заполняет на 20 минут дольше, чем второй насос. Сколько литров в минуту закачивает первый насос, если второй закачивает на 200 л в минуту больше?

6. На изготовление 200 деталей первый рабочий затратил времени на 10 мин меньше, чем второй на изготовление 360 таких же деталей. Сколько деталей в минуту изготавливает первый рабочий, если второй изготавливает в минуту на 2 детали меньше?

Задачи на движение

Немного полезной информации

Задания B14 — текстовые задачи на движение, сравнительную скорость выполнения определённого задания или на совместную работу. Чтобы решать задачи на движение, достаточно знать формулу пути при равномерном движении (то есть движении с постоянной скоростью) и её следствия для вычисления времени или скорости:

$$s = vt;\ \ v = \frac{s}{t};\ \ t = \frac{s}{v}.$$

Здесь s — путь, t — время, v — скорость.

В задачах на движение по течению или против течения реки нужно к тому же понимать, что при движении по течению (иногда говорят «вниз по течению») скорость реки прибавляется, а против течения («вверх по течению») — отнимается от собственной скорости транспорта (лодки, катера, теплохода). Скорость плота (бревна) совпадает со скоростью течения реки. На озере вода считается стоячей (скорость течения нулевая).

Чтобы составить уравнение, данные из условия и их следствия лучше всего занести в таблицу.

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
A	s_1	v_1	t_1
B	s_2	v_2	t_2

Конкретное содержание и последовательность заполнения клеток таблицы зависит от специфики задания. Рассмотрим типичные из них.

Задачи с решениями

7. Из одного города в другой выехали одновременно двое байкеров. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью 80 км/ч, а вторую — со скоростью на 24 км/ч больше, чем скорость первого байкера. Определите скорость первого байкера, если в другой город они приехали одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть скорость первого байкера равна x км/ч. Обозначим через s половину расстояния между городами. Первый байкер проехал $2s$ км за время $\frac{2s}{x}$ ч. Второй байкер проехал первую половину пути (то есть s) со скоростью 80 км/ч за время $t = \frac{s}{80}$ ч, а вторую — со скоростью на 24 км/ч больше, чем скорость первого байкера (то есть $(x + 24)$ км/ч) за время $\frac{s}{(x+24)}$ ч. Заполним таблицу для составления уравнения.

	Расстояние (км)	**Скорость (км/ч)**	**Время (ч)**
1-й байкер	$2s$	x	$\frac{2s}{x}$
2-й байкер (1-я половина пути)	s	80	$\frac{s}{80}$
2-й байкер (2-я половина пути)	s	$x+24$	$\frac{s}{x+24}$

Так как по условию время движения первого байкера равно времени движения второго байкера, то имеет место следующее уравнение:

$$\frac{2s}{x} = \frac{s}{80} + \frac{s}{x+24}.$$

Разделив обе части последнего равенства на s, получим дробно-рациональное уравнение, решаемое умножением левой и правой частей на общий знаменатель. Решают его последующим сокращением и получением целого уравнения (то есть уравнения без деления на переменную). Затем, после нахождения корней этого уравнения, их проверяют на соответствие реальному смыслу задачи (и на неравенство нулю общего знаменателя).

Решим наше уравнение.

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{80} + \frac{1}{x+24}, \qquad \Big|\times 80x(x+24) \neq 0,$$

$$160\,(x+24) = x\,(x+24) + 80x,$$

$$x^2 - 56x - 3840 = 0,$$

$$x_1 = -40, \quad x_2 = 96.$$

Первый корень явно не подходит по смыслу задачи, потому что скорость должна быть положительна. Следовательно, скорость первого байкера 96 км/ч.

Ответ: 96.

Примечание. Математическую модель задачи можно упростить, приняв длину половины пути за 1, тогда весь путь равен 2. Так можно делать, когда в задаче не задано численно ни одного участка пути.

8. Рыбнадзорный катер патрулирует участок реки длиной 180 км. Против течения реки он проплывает этот участок за время, на 1 час большее, чем по течению реки. Определите скорость катера в стоячей воде (собственная скорость), если скорость течения реки равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Обозначим скорость катера в стоячей воде через x км/ч. Тогда скорость катера по течению равна $x+1$ км/ч, а против течения — $x-1$ км/ч. Заполним таблицу по условию задачи.

	Расстояние (км)	**Скорость (км/ч)**	**Время (ч)**
По течению	180	$x+1$	$\dfrac{180}{x+1}$
Против течения	180	$x-1$	$\dfrac{180}{x-1}$

Составим и решим уравнение.

$$\frac{180}{x-1}-\frac{180}{x+1}=1, \qquad \Big|\times(x-1)(x+1)\neq 0,$$

$$180(x+1)-180(x-1)=(x-1)(x+1),$$

$$180x+180-180x+180=x^2-1,$$

$$x^2=361,$$

$$x_1=-19, \quad x_2=19.$$

Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи. Итак, скорость катера в стоячей воде равна 19 км/ч.

Ответ: 19.

Примечание. Среди задач данного раздела встречаются условия задержек в пути. Длительность таких пауз приходится дополнительно включать в уравнения. Не забывайте при этом переводить всё в одинаковые единицы.

9. Экипаж дальнобойщиков проехал из города на побережье расстояние 6800 км с некоторой постоянной скоростью и без остановок. На обратном пути он увеличил скорость на 5 км/ч, что позволило ему сделать остановку длительностью 5 часов и тем не менее затратить столько же времени, сколько он ехал из города на побережье. Найдите скорость при движении без остановок. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Обозначим безостановочную скорость через x км/ч. Тогда скорость движения на обратном пути равна $x+5$ км/ч. Табличная версия задачи имеет следующий вид:

	Расстояние (км)	**Скорость (км/ч)**	**Время (ч)**
Из города на побережье	6800	x	$\frac{6800}{x}$
Обратный путь	6800	$x+5$	$\frac{6800}{x+5}+5$

Составим и решим уравнение.

$$\frac{6800}{x} = \frac{6800}{x+5} + 5, \qquad \Big|\times x(x+5) \neq 0,$$
$$6800(x+5) = 6800x + 5x(x+5),$$
$$5x^2 + 25x - 6800 \cdot 5 = 0, \qquad \Big| : 5,$$
$$x^2 + 5x - 6800 = 0,$$
$$D = 27225 = 1089 \cdot 25,$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{1089 \cdot 25} = 33 \cdot 5 = 165,$$
$$x_1 = -85, \quad x_2 = 80.$$

Итак, скорость экипажа дальнобойщиков по пути из города к побережью равна 80 км/ч.

Ответ: 80.

Задачи на совместную работу

Немного полезной информации

Скорость присутствует не только в задачах на движение, но и в задачах на сравнительную быстроту выполнения какого-либо задания. Поэтому и математические модели соответствующих задач строятся совершенно аналогично.

Задачи с решениями

10. На сбор 2400 бонусов первый геймер тратит времени на 20 минут меньше, чем второй. Сколько бонусов в минуту собирает второй геймер, если первый собирает в минуту на 20 бонусов больше?

Решение.

Пусть второй геймер собирает x бонусов в минуту, тогда первый собирает $x+20$ бонусов в минуту. Табличная версия задачи имеет следующий вид:

	Число бонусов	**Скорость сбора (бонусы/мин)**	**Время сбора (мин)**
Первый геймер	2400	$x+20$	$\frac{2400}{x+20}$
Второй геймер	2400	x	$\frac{2400}{x}$

Составим и решим уравнение.

$$\frac{2400}{x} - \frac{2400}{x+20} = 20,$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+20} = \frac{20}{2400},$$

$$\frac{x+20-x}{x(x+20)} = \frac{1}{120},$$

$$\frac{20}{x(x+20)} = \frac{1}{120},$$

$$x(x+20) = 20 \cdot 120,$$

$$x^2 + 20x - 2400 = 0,$$
$$x_1 = -60, \quad x_2 = 40.$$

Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи. Итак, второй геймер собирает 40 бонусов в минуту.

Ответ: 40.

11. Винни Пух и Пятачок могут полить огород за 35 минут. Пятачок и Кролик могут вместе полить этот же огород за 63 минуты. Кролик и Винни Пух вместе поливают огород за 45 минут. За сколько минут польют огород Винни Пух, Пятачок и Кролик, работая вместе?

Решение.

1-й способ.

Эта задача составлена по мотивам старинной загадки о совместном поедании косули волком, львом и лисой. И в то время вовсе не предполагалось решать её при помощи уравнения. Достаточно использовать понятие наименьшего общего кратного и немного сообразительности.

Вспомним, что наименьшее общее кратное (НОК) нескольких чисел — это наименьшее натуральное число, которое без остатка делится на каждое из этих чисел.

$НОК(35; 63; 45) = НОК(5 \cdot 7; 7 \cdot 9; 9 \cdot 5) = 5 \cdot 7 \cdot 9 = 315.$

Пусть каждая пара поливает одинаковые огороды в течение 315 минут. Далее поставим вопрос: сколько огородов полито в результате такой работы? Наглядно ответ можно получить, составив несложную таблицу.

Винни и Пятачок	35 мин	35 мин	35 мин	35 мин	35 мин	35 мин	35 мин	35 мин	35 мин	Итого 315 мин
Пятачок и Кролик	63 мин	63 мин	63 мин	63 мин	63 мин					Итого 315 мин
Кролик и Винни	45 мин	45 мин	45 мин	45 мин	45 мин	45 мин	45 мин			Итого 315 мин

По табличной версии каждый из участников полива реально работал по $315 \cdot 2 = 630$ мин. И за это время все трое вместе полили бы

$9+5+7=21$ огород. Следовательно, один огород все три сказочных персонажа польют за $630:21=30$ минут.

Ответ: 30.

2-й способ.

Пусть Винни Пух поливает самостоятельно весь огород (берём его за 1) за B минут, Пятачок — за P минут, а Кролик — за K минут. Тогда за одну минуту Винни поливает часть огорода, равную $\frac{1}{B}$, Пятачок — $\frac{1}{P}$, Кролик — $\frac{1}{K}$. Таким образом, сообщение о том, что Винни и Пятачок вместе поливают огород за 35 минут, математически выражается следующим уравнением:

$\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{P}\right)\cdot 35=1$, что равносильно уравнению $\frac{1}{B}+\frac{1}{P}=\frac{1}{35}$.

Составив аналогично два других уравнения, получим систему

$$\begin{cases} \frac{1}{B}+\frac{1}{P}=\frac{1}{35}, \\ \frac{1}{P}+\frac{1}{K}=\frac{1}{63}, \\ \frac{1}{B}+\frac{1}{K}=\frac{1}{45}. \end{cases}$$

Сложив все уравнения системы, получим

$$2\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{P}+\frac{1}{K}\right)=\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{45}.$$

Приведём правую часть к общему знаменателю:

$$2\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{P}+\frac{1}{K}\right)=\frac{9}{315}+\frac{5}{315}+\frac{7}{315},$$

$$2\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{P}+\frac{1}{K}\right)=\frac{21}{315},$$

$$\frac{1}{B}+\frac{1}{P}+\frac{1}{K}=\frac{1}{30},$$

$$30\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{P}+\frac{1}{K}\right)=1.$$

Последнее равенство означает, что Винни, Пятачок и Кролик польют вместе огород за 30 минут.

Ответ: 30.

Ещё один из классических видов школьных текстовых задач — задачи, в которых насосы или трубы наполняют бассейны, баки или другие ёмкости.

12. Бак летнего душа объёмом 600 литров можно заполнить одним из двух насосов. Первый закачивает на 5 литров в минуту больше, чем второй, и поэтому на заполнение всего бака тратит на 6 минут меньше второго насоса. Определите, сколько литров в минуту закачивает второй насос.

Решение.

Пусть второй насос закачивает x литров в минуту, тогда первый — $x+5$ литров в минуту. Заполним следующую таблицу:

	Скорость закачки (л/мин)	**Объём бака (л)**	**Время наполнения (мин)**
1-й насос	$x+5$	600	$\frac{600}{x+5}$
2-й насос	x	600	$\frac{600}{x}$

Составим и решим уравнение.

$$t_2 - t_1 = 6,$$

$$\frac{600}{x} - \frac{600}{x+5} = 6,$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{6}{600},$$

$$\frac{x+5-x}{x(x+5)} = \frac{1}{100},$$

$$\frac{5}{x(x+5)} = \frac{1}{100},$$

$$x(x+5) = 500,$$

$$x^2 + 5x - 500 = 0,$$

$$x_1 = -25, \quad x_2 = 20.$$

Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи. Итак, второй насос закачивает 20 литров в минуту.

Ответ: 20.

13. Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, следующий час — со скоростью 110 км/ч, а затем два часа — со скоростью 85 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Средняя скорость находится так: всё пройденное расстояние делится на затраченное время. Найдем расстояние, которое проехал автомобиль. $60 \cdot 2 + 110 \cdot 1 + 85 \cdot 2 = 400$ (км). Время, затраченное на весь путь, равно $2 + 1 + 2 = 5$ (ч). Средняя скорость равна $400 : 5 = 80$ (км/ч).

Ответ: 80.

14. Путешественник переплыл море на теплоходе со средней скоростью 35 км/ч. Обратно он летел на самолете со скоростью 315 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Расстояние, пройденное путешественником в один конец, обозначим за a. Всего путешественник преодолел $a + a = 2a$ км. На морскую часть пути он потратил $a : 35$, а на воздушную $a : 315$ ч. Средняя скорость равна

$$\frac{2a}{\frac{a}{35}+\frac{a}{315}} = \frac{2}{\frac{1}{35}+\frac{1}{315}} = 63 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 63.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Двое байкеров выехали одновременно из одного города в другой. Первый проехал весь путь со скоростью 96 км/ч. Второй проехал первую половину пути со скоростью 80 км/ч. С какой скоростью пришлось ехать второму байкеру вторую половину пути, если в другой город они приехали одновременно? Ответ дайте в км/ч.

2. Катер проплыл по течению реки от пристани A до пристани B расстояние в 437 км. Против течения реки он проплыл то же самое расстояние на 4 часа дольше, чем по течению. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

3. На сбор 3000 бонусов первый геймер тратит времени на 10 минут меньше, чем второй. Сколько бонусов в минуту собирает второй геймер, если первый собирает на 10 бонусов в минуту больше?

4. Катя и Таня вместе могут вымыть окно за 15 минут. Таня и Настя могут вымыть это же окно за 21 минуту. Настя и Катя вымоют это окно за 35 минут. За сколько минут могут вымыть окно Катя, Таня и Настя, если будут мыть его вместе?

5. Бассейн объёмом 18 000 л первый насос наполняет на 10 минут медленнее, чем второй насос. Сколько литров в минуту закачивает первый насос, если второй закачивает в минуту на 300 л больше?

6. Первый рабочий изготавливает 200 деталей за время, которое второй рабочий потратит на изготовление 180 таких же деталей. За сколько минут оба рабочих, работая вместе, изготовят 760 таких же деталей, если первый изготавливает в минуту на 2 детали больше, чем второй?

Вариант 2

1. Двое байкеров выехали одновременно из одного города в другой. Первый проехал весь путь с некоторой постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью на 16 км/ч меньше, чем скорость первого байкера, а вторую половину пути со скоростью на 24 км/ч больше скорости первого байкера. В результате в другой город байкеры приехали одновременно. Найдите скорость первого байкера. Ответ дайте в км/ч.

2. Экипаж дальнобойщиков проехал расстояние 6375 км с определённой скоростью без остановок. На обратном пути он планирует сделать остановку на 10 часов для отдыха. Для этого на обратном пути ему необходимо увеличить скорость на 10 км/ч по сравнению с прямым маршрутом. Найдите (в км/ч) значение первоначальной скорости.

3. На сбор 3640 бонусов первый геймер тратит времени на 9 минут меньше, чем второй. Сколько бонусов в минуту собирает второй геймер, если первый собирает на 9 бонусов в минуту больше?

4. Малыш и Карлсон вместе съедают торт за 20 минут. Карлсон и Фрекен Бок съедают вместе этот же торт за 30 минут. Фрекен Бок и Малыш съедают этот же торт за 24 минуты. За сколько минут съедят этот торт Малыш, Карлсон и Фрекен Бок, если будут есть его все вместе?

5. Бак летнего душа объёмом 800 л первый насос заполняет на 24 минуты медленнее, чем второй насос. Сколько литров в минуту закачивает первый насос, если второй закачивает на 30 л в минуту больше?

6. Первые три часа волк бежал со скоростью 20 км/ч, следующий час — со скоростью 45 км/ч, а затем два часа — со скоростью 15 км/ч. Найдите среднюю скорость волка на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Вариант 3

1. Двое велосипедистов выехали одновременно из города по направлению к турбазе. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью, которая была больше 15 км/ч. Второй велосипедист первую половину пути проехал со скоростью 30 км/ч, а вторую — со скоростью на 4 км/ч меньше, чем скорость первого велосипедиста. На турбазу оба приехали одновременно. Найдите скорость первого велосипедиста. Ответ дайте в км/ч.

2. На сбор 3000 бонусов первый геймер тратит времени на 50 минут меньше, чем второй на сбор 5500 бонусов. Сколько бонусов в минуту собирает второй геймер, если первый собирает на 5 бонусов в минуту больше?

3. Полежайкин и Галина Сергеевна съедают пиццу за 42 минуты. Галина Сергеевна и Пуговка съедают вместе эту же пиццу за 56 минут. Пуговка и Полежайкин съедают эту же пиццу за 48 минут. За сколько минут съедят эту пиццу Полежайкин, Галина Сергеевна и Пуговка, если будут есть её вместе?

4. Скорость катера береговой охраны в стоячей воде равна 20 км/ч. Путь длиной 396 км по течению реки он проплывает на 4 ч быстрее, чем против течения реки. Найдите скорость течения реки (в км/ч).

5. Сестра вышла из дома на 1 мин 40 с раньше брата. Тем не менее в школу, находящуюся на расстоянии 300 м от дома, они пришли одновре-

менно. Определите время движения сестры (в мин), если скорость брата на 0,5 м/с больше скорости сестры.

6. Первый рабочий изготавливает 200 деталей за 10 минут. Вместе со вторым рабочим они изготавливают 760 деталей за столько же минут, за сколько второй, работая один, изготавливает 360 деталей. Сколько деталей в минуту изготавливает второй рабочий?

Вариант 4

1. Двое велосипедистов выехали одновременно из турбазы в город. Первый проехал весь путь с некоторой постоянной скоростью. Второй велосипедист первую половину пути проехал со скоростью 20 км/ч, а на второй половине его скорость была на 6 км/ч больше скорости первого велосипедиста. В город оба приехали одновременно. Определите скорость второго велосипедиста на второй половине пути. Ответ дайте в км/ч.

2. На сбор 4000 бонусов первый геймер тратит времени столько же, сколько второй на сбор 3600 бонусов. Сколько бонусов в минуту собирает второй геймер, если первый собирает на 4 бонуса в минуту больше?

3. Кот Матроскин и Шарик выпивают вместе бак молока за 56 минут. Шарик и Дядя Фёдор выпивают такой же бак молока за 72 минуты. Дядя Фёдор и Кот Матроскин выпивают такой же бак молока за 63 минуты. За сколько минут выпьют такой же бак молока Кот Матроскин, Шарик и Дядя Фёдор, если будут делать это одновременно?

4. Катер береговой охраны патрулирует участок реки длиной 396 км. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите скорость катера в стоячей воде (в км/ч), если против течения катер проплывает патрулируемый участок на 4 часа медленнее, чем по течению.

5. Расстояние от дома до школы, равное 480 м, брат проходит на 2 мин 40 с быстрее, чем сестра. Определите скорость брата (в м/с), если скорость сестры на 0,5 м/с меньше, чем скорость брата.

6. Первый и второй рабочий, работая вместе, изготавливают 38 деталей в минуту. 200 таких же деталей первый рабочий изготавливает за то же время, за которое второй изготавливает 180 таких же деталей. Сколько деталей в минуту изготавливает первый рабочий самостоятельно?

Вариант 5

1. Расстояние между городами А и В равно 325 км. Из города А в город В со скоростью 50 км/ч выехал первый автобус, а через час после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 75 км/ч второй автобус. На каком расстоянии от города А автобусы встретятся? Ответ дайте в километрах.

2. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 72 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 15 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

3. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 90 метров, второй — длиной 130 метров. Сначала второй сухогруз отстаёт от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 700 метров. Через 18 минут после этого уже первый сухогруз отстаёт от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 880 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

4. Первые 180 км автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, следующие 210 км — со скоростью 100 км/ч, а затем 120 км — со скоростью 50 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

5. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 10 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 70 км/ч, и через 20 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

6. Бизнесмен Глазарян получил в 1995 году прибыль в размере 2000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Глазарян за 1997 год?

Вариант 6

1. Из двух городов, расстояние между которыми равно 324 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автобуса. Через сколько часов автобусы встретятся, если их скорости равны 55 км/ч и 80 км/ч?

2. Из пункта А круговой трассы выехал велосипедист. Через 45 минут он ещё не вернулся в пункт А и из пункта А следом за ним отправился мотоциклист. Через 15 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а ещё через 45 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 90 км. Ответ дайте в км/ч.

3. Паша и Маша выполняют одинаковый тест. Паша отвечает за час на 6 вопросов теста, а Маша — на 12. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Паша закончил свой тест позже Маши на 50 минут. Сколько вопросов содержит тест?

4. Бизнесмен Зайчиков получил в 2000 году прибыль в размере 3000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 200% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Зайчиков за 2003 год?

5. Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, вторую треть — со скоростью 30 км/ч, а последнюю — со скоростью 130 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

6. Двое рабочих, работая вместе, изготавливают 760 деталей за 20 минут. Первый, работая один, изготавливает 200 таких же деталей за то же время, за какое второй изготавливает 180 таких же деталей. На сколько деталей в минуту первый рабочий изготавливает больше, чем второй?

Тренировочные варианты к части 1

Вариант 1

1. На День учителя полагается дарить букет из нечётного числа цветов. Астры стоят 15 рублей за штуку. У Миши есть 70 рублей. Из какого наибольшего числа астр он может купить букет Марье Ивановне на День учителя?

2. На графике (см. рис. 34) показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте на протяжении восьми суток, начиная с 0 часов 4 июля. На оси абсцисс отмечаются дни, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по графику разницу между наибольшим и наименьшим значениями температуры воздуха в период с 4 июля по 9 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.

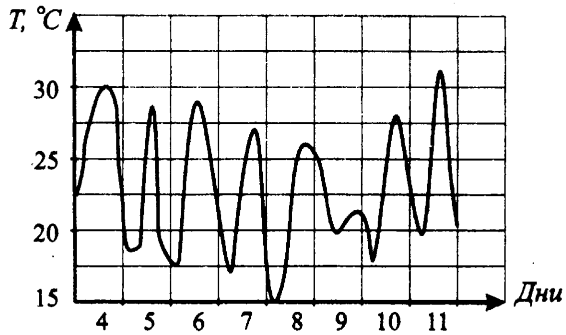


Рис. 34.

3. Для перевозки 45 тонн груза на 1200 км можно воспользоваться услугами одной из трёх транспортных компаний. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей для каждой компании указана в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

Компания	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъёмность автомобилей (тонн)
А	350	5
Б	410	6
В	680	9

4. Среди изготовленных на заводе 1000 деталей 6 деталей бракованных. Эксперт проверяет одну наугад выбранную деталь. Какова вероятность того, что она будет без брака?

5. Первый рабочий обрабатывает 600 деталей на 10 минут быстрее, чем второй рабочий. Сколько деталей в минуту обрабатывает второй рабочий, если первый обрабатывает в минуту на 10 деталей больше?

Вариант 2

1. Кекс стоит 5 руб. 20 коп. Какое наибольшее число кексов можно купить на 40 рублей?

2. Первый посев семян тыквы рекомендуется проводить в мае при дневной температуре воздуха не менее +4 °C. На графике (см. рис. 35) жирными точками показан прогноз дневной температуры воздуха в первые две недели мая. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите, в течение скольких дней за этот период можно производить посев тыквы.

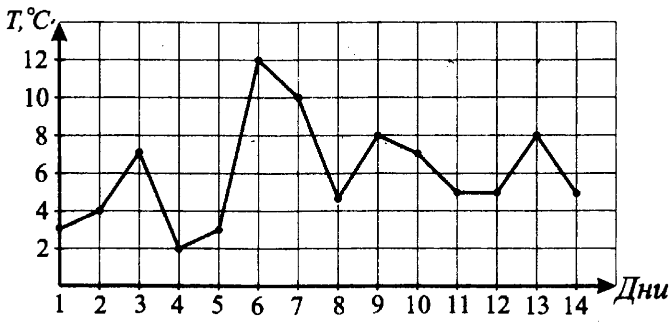


Рис. 35.

3. Телефонная компания предлагает три тарифных плана. В таблице для каждого тарифного плана указаны месячная абонентская плата, включённое в тариф время разговора и цена минуты сверх включённого в тариф времени.

Тарифный план	**Абонентская плата**	**Включено в тариф**	**Цена минуты сверх включённого в тариф**
«Повременный»	120 руб.	нет	0,3 руб. за 1 мин
«Комбинированный»	205 руб.	320 мин в месяц	0,3 руб. за 1 мин сверх 320 мин
«Безлимитный»	280 руб.	без ограничений	—

Абонент предполагает, что его телефонные разговоры составят 500 минут в месяц и, исходя из этого, выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей заплатит абонент за месяц, если продолжительность его разговоров действительно будет равна 500 минут?

4. Для проведения лотереи было изготовлено 8000 билетов, из них только 20 содержат выигрыш. Какова вероятность, купив один билет, остаться без выигрыша?

5. Катер береговой охраны заступил в наряд в 18:00 и проплыл по течению реки 240 км. Задержавшись на 2 часа, он отправился в обратный путь против течения реки и прибыл в начальный пункт в 18:00 на следующие сутки. Определите скорость катера в стоячей воде (в км/ч), если скорость течения реки 2 км/ч.

Вариант 3

1. Тихоокеанский лайнер рассчитан на 500 пассажиров и 35 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 30 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на лайнере, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

2. На диаграмме (см. рис. 36) показано количество солнечных дней в городе N за каждый месяц 1950 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество солнечных дней. Определите по диаграмме количество месяцев в 1950 году, в которых количество солнечных дней было ровно 15.

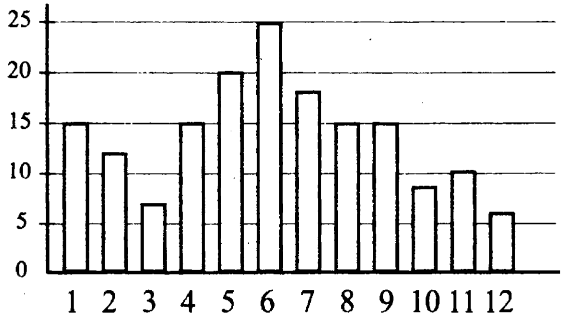


Рис. 36.

3. Для отделки набережной требуется заказать 35 одинаковых гранитных плит в одной из трёх фирм. Площадь каждой плиты равна 1,2 м^2. В таблице приведены цены на гранит, а также на резку плит. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	**Цена гранита (руб. за 1 м^2)**	**Резка (руб. за одну плиту)**
А	2600	150
Б	3000	130
В	3400	120

4. На подносе лежат одинаковые на вид пирожки: 4 с творогом, 8 с капустой, 6 с картошкой, 2 с мясом. Какова вероятность того, что наугад взятый с подноса пирожок окажется с творогом или капустой?

5. Аня, Таня и Яна вместе почистят мешок картошки за 42 мин. Аня и Таня почистят такой же мешок картошки за 56 мин. Таня и Яна почистят такой же мешок картошки за 72 мин. За сколько минут почистят такой же мешок картошки Аня и Яна?

Вариант 4

1. В пачке бумаги 350 листов формата А4. За неделю в суде расходуется 600 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в суд на 12 недель?

2. На графике (см. рис. 37) показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте на протяжении восьми суток, начиная с 0:00 часов 4 июля. На оси абсцисс отмечается время в днях, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по графику, в какой день июля температура воздуха первый раз превысила 35 градусов.

3. Клиент хочет арендовать машину на двое суток для поездки протяжённостью 1600 км. Помимо аренды, клиент должен оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Сколько рублей заплатит клиент, если выберет самый дешёвый вариант? Цена дизельного топлива 18 руб. за литр, АИ-95 — 21 руб. за литр, АИ-98 — 23 руб. за литр.

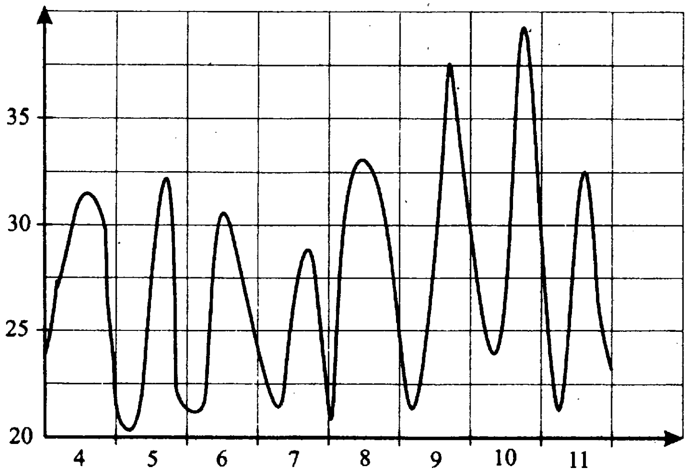


Рис. 37.

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	7	2100
Б	АИ-95	10	2000
В	АИ-98	8	1800

4. Одновременно бросают два игральных кубика. Найдите вероятность P того, что ни на одном из этих кубиков не выпадет «шестёрка». В ответе запишите величину $\frac{1}{P}$.

5. Первый байкер проехал путь из столицы до провинциального городка с некоторой постоянной скоростью. Скорость второго байкера, выехавшего одновременно с первым по тому же маршруту, в первой половине пути была равна 70 км/ч. Вторую половину пути он ехал со скоростью на 39 км/ч больше скорости первого байкера. В результате в городок они приехали одновременно. Найдите скорость второго байкера (в км/ч) на второй половине пути.

Вариант 5

1. Анна Ивановна купила льготный месячный проездной билет на автобус. За месяц она сделала 36 поездок. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 320 рублей, а разовая поездка — 9 рублей?

2. На графике (см. рис. 38) жирными точками показано изменение биржевой стоимости акций фармацевтической компании с 7 июня по 5 июля. По оси абсцисс отложены числа месяца, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линией. 9 июня бизнесмен приобрёл 20 акций этой компании. 5 из них он продал 24 июня, а 2 июля — остальные 15. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?

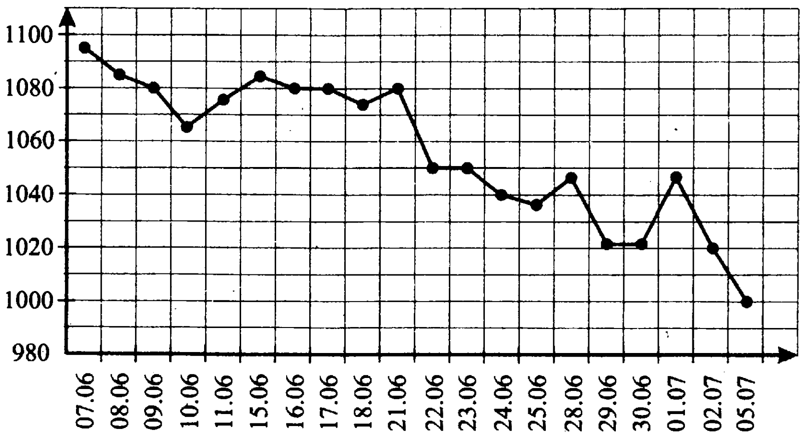


Рис. 38.

3. Компания из четырёх человек едет на дачу. Можно ехать автобусом, а можно — на своей машине. Один билет на автобус стоит 39 рублей. Автомобиль расходует 8 литров бензина на 100 километров пути, расстояние до дачи равно 40 км, а цена бензина равна 25 руб. за литр. Сколько рублей будет стоить самая дешёвая поездка для этой компании?

4. Одновременно бросают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что выпавшие на кубиках числа будут иметь одинаковую чётность (оба чётны, либо оба нечётны).

5. Первый геймер собрал 6000 бонусов за определённое время. Одновременно с ним начал собирать бонусы второй геймер. Через 1 ч второй геймер сделал перерыв на 60 мин и снова сел за свой компьютер. В результате оба геймера собрали по 6000 бонусов одновременно. Сколько в среднем бонусов в минуту собирал первый геймер, если второй собирал в среднем на 5 бонусов в минуту больше?

Вариант 6

1. Васе нужно пить витамины 3 раза в день по 0,05 г в течение 90 дней. В одной упаковке 80 драже по 0,05 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

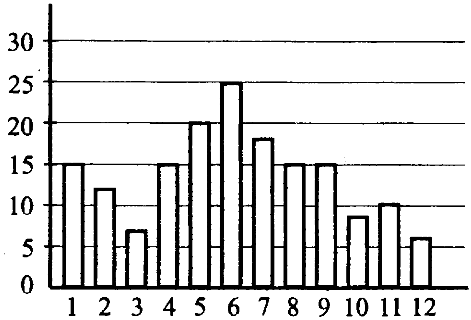


Рис. 39.

2. На диаграмме (см. рис. 39) показано количество солнечных дней в городе N за каждый месяц 1950 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество солнечных дней. Определите по диаграмме количество месяцев в 1950 году, в которых число солнечных дней было больше 5, но меньше 23.

3. Для проведения детского праздника нужно заказать 32 одинаковых подарка с конфетами в одной из трёх фирм. В каждом подарке 1,6 кг конфет. В таблице приведены цены на конфеты, а также на подарочные упаковки. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена конфет (руб. за 1 кг)	Цена упаковки (руб. за один подарок)
А	145	40
Б	175	20
В	160	30

4. Школьник на экзамене по литературе наугад вытягивает один из 30 билетов. Известно, что среди всех этих билетов 3 содержат вопрос по творчеству А.С. Пушкина. Какова вероятность того, что в вытянутом билете не будет вопроса по творчеству А.С. Пушкина?

5. Зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (руб.) для данного предприятия задаётся формулой $q = 270\,000 - 15\,000p$. Найдите минимальный уровень цены p, при котором значение выручки предприятия $s = p \cdot q$ за месяц составит не менее 1 200 000 рублей.

Вариант 7

1. Для приготовления маринада для баклажанов на 1 литр воды требуется 15 г лимонной кислоты. Лимонная кислота продаётся в пакетиках по 20 г. Какое наименьшее число таких пакетиков нужно купить хозяйке для приготовления 5 литров маринада?

2. На графике (см. рис. 40) представлено изменение биржевой стоимости акций компании «Распадская» за 4 месяца 2010 года. По оси абсцисс отложено время, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях. Определите по графику, в каком месяце цена акции первый раз упала ниже 160 рублей. В ответе запишите календарный номер месяца.

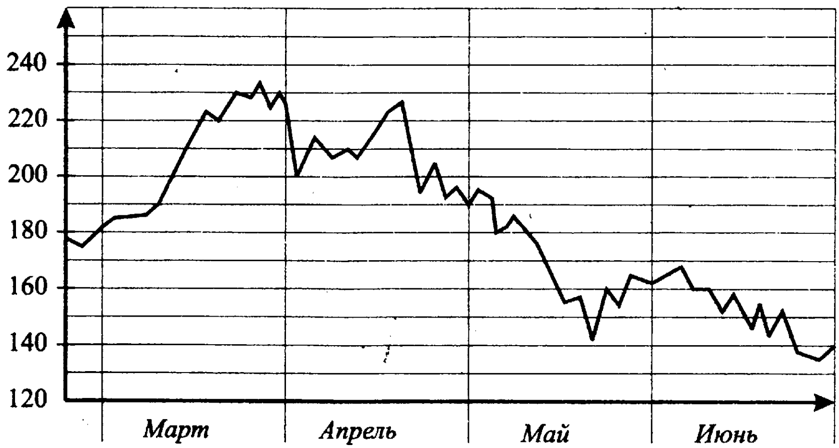


Рис. 40.

3. Чтобы перевезти 16 тракторов на 900 км, можно воспользоваться услугами одной из трёх компаний. Стоимость перевозки и вместимость грузовиков для каждой компании указана в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку тракторов?

Компания	Стоимость перевозки одним грузовиком (руб. на 50 км)	Количество тракторов в одном грузовике
А	1300	6
Б	2300	9
В	3800	16

4. Из стандартной колоды в 36 карт выкинули все тузы. Из оставшихся 32 карт наугад вытягивают одну. Какова вероятность того, что эта карта окажется королём или дамой?

5. Катер рыбнадзора с 4:00 патрулирует участок реки длиной 240 км, двигаясь по течению реки. Сделав перерыв 2 ч, он начинает плыть против течения реки и прибывает в начальный пункт в 4:00 на следующие сутки. Определите скорость течения реки (в км/ч), если скорость катера в стоячей воде равна 22 км/ч.

Вариант 8

1. Подоходный налог составляет 13% от заработной платы почтальона. После удержания налога на доходы почтальон получил 7830 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата почтальона?

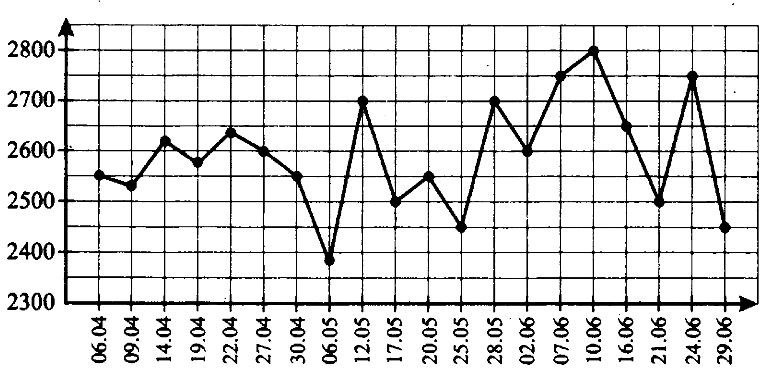


Рис. 41.

2. На графике (см. рис. 41) жирными точками показано изменение биржевой стоимости акций фармацевтической компании с 6 апреля по 29 июня. По оси абсцисс отложены числа месяца, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линией. 6 апреля бизнесмен приобрёл 20 акций этой компании. 5 из них он продал 27 апреля, а 12 мая — остальные 15. Сколько рублей приобрёл бизнесмен в результате этих операций?

3. Оператор сотовой связи предлагает три тарифных плана. В таблице для каждого тарифного плана указаны месячная абонентская плата, включённое в тариф время разговора и цена каждой минуты сверх включённого в тариф времени.

Тарифный план	**Абонентская плата в месяц**	**Дополнительная плата**
«100»	160 руб. за 100 мин	2 руб. за 1 мин сверх 100 мин
«200»	300 руб. за 200 мин	1,5 руб. за 1 мин сверх 200 мин
«300»	420 руб. за 300 мин	1 руб. за 1 мин сверх 300 мин

Абонент предполагает, что его телефонные разговоры составят 250 минут в месяц и, исходя из этого, выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей заплатит абонент за месяц, если продолжительность его разговоров действительно будет равна 250 минут?

4. На складе лежат 100 фонариков (без ламп), из них 10 бракованных, а также 200 ламп для фонариков, из них 8 бракованных. Эксперт наугад выбирает один фонарик и одну лампу, ввинчивает лампу в фонарик. Найдите вероятность того, что лампа будет гореть (для этого лампа и фонарик должны быть без брака).

5. Первый байкер проехал путь из города в деревню с постоянной скоростью 91 км/ч. Второй байкер, выехав одновременно с первым, первую половину того же пути ехал со скоростью 70 км/ч, затем увеличил скорость и в результате приехал в ту же деревню одновременно с первым байкером. С какой скоростью (в км/ч) второй байкер проехал вторую половину пути?

Вариант 9

1. В книжном магазине проходит рекламная акция: приобретая две детские книжки, покупатель получает третью книжку в подарок. Книжка стоит 36 рублей. Какое наибольшее число книжек получит покупатель за 200 рублей?

2. На диаграмме (см. рис. 42) показана среднемесячная температура воздуха в городе N за каждый месяц 1984 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме количество месяцев, в которых среднемесячная температура была отрицательной.

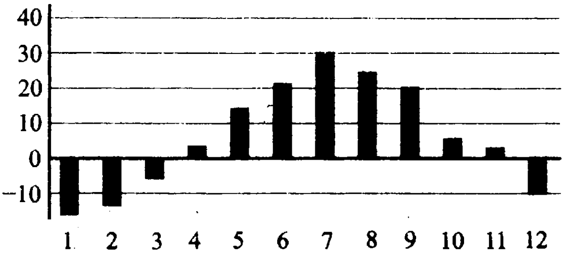


Рис. 42.

3. Строительной фирме нужно приобрести 35 000 килограммов цемента у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

Фирма	**Стоимость цемента (руб. за тонну)**	**Стоимость доставки (руб.)**	**Дополнительные условия**
А	1800	3400	—
Б	1600	8500	При заказе на сумму больше 60 000 руб. доставка бесплатно
В	1840	4500	При заказе более 25 тонн доставка бесплатно

4. В урне 7 красных, 8 жёлтых и 5 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что все 8 жёлтых шаров остались в урне?

5. Через первую трубу резервуар объёмом 4000 л наполняется на 20 мин быстрее, чем через вторую трубу. За сколько минут обе трубы вместе наполнят резервуар объёмом 9000 л, если через первую трубу поступает в минуту на 10 л воды больше, чем через вторую?

Вариант 10

1. Таксист за месяц проехал 3000 км. Стоимость 1 л бензина 22 руб. Средний расход бензина на 100 км составляет 7 л. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

2. На графике (см. рис. 43) жирными точками показано изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в период с 6 апреля по 29 июня. По горизонтали указываются даты, по вертикали — цена одной акции в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линией. Весной бизнесмен купил пакет акций по цене 140 рублей за акцию, а потом продал все свои акции по наибольшей цене за весь этот период. В результате этих операций прибыль бизнесмена составила 13 860 рублей. Сколько акций было в пакете?

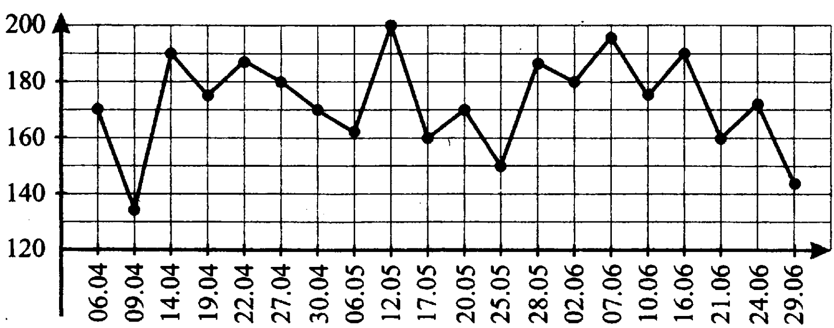


Рис. 43.

3. Фитнес-центр предлагает своим посетителям три программы занятий.

Программа	**Плата в месяц**	**Стоимость дополнительных занятий**
«А»	нет	200 руб. за занятие
«В»	3000 руб. в месяц за 16 занятий	180 руб. за занятие сверх 16
«С»	3500 руб. в месяц за 20 занятий	150 руб. за занятие сверх 20

Посетитель желает заниматься в фитнес-центре 18 раз в месяц и, исходя из этого, выбирает наиболее дешёвую программу. Сколько рублей заплатит посетитель за месяц?

4. Одновременно бросают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что на одном кубике выпадет чётное число очков, а на другом — нечётное.

5. Двое рабочих, работая вместе, обрабатывают 900 деталей за 20 мин. Сколько деталей в минуту обрабатывает первый рабочий, если 200 деталей он обрабатывает за то же время, за которое второй обрабатывает 250 деталей?

Вариант 11

1. На складе 20 000 флаконов шампуня. Среди них 20% — это шампунь для детей. Среди шампуня для взрослых 25% флаконов предназначено для мужчин. Сколько флаконов предназначено для мужчин?

2. На графике (см. рис. 44) представлено изменение биржевой стоимости акций компании «Лукойл» за 3 дня июня. По оси абсцисс отложено время в часах, по оси ординат – стоимость одной акции в рублях. Определите по графику, какую наибольшую прибыль мог получить бизнесмен, если он купил 320 акций 25 июня и продал их в тот же день.

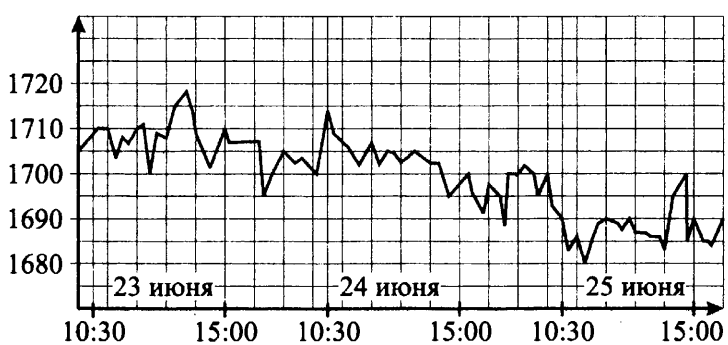


Рис. 44.

3. Для спектакля нужно заказать 14 костюмов в одной из трёх фирм. На каждый костюм расходуется 2,2 $м^2$ ткани. В таблице приведена стоимость ткани, а также пошива костюма. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена ткани (руб. за 1 $м^2$)	Цена пошива (руб. за один комплект)
А	220	1200
Б	260	1000
В	180	1800

4. При сборке тумбочки столяр использует болты и гайки. У столяра есть мешок с 3000 болтов, из которых 90 бракованных, и мешок с 4000 гаек, из которых 40 бракованных. Столяр наугад достаёт из мешков один болт и одну гайку. Какова вероятность того, что эти болт и гайку удастся соединить (для этого оба изделия должны быть без брака)?

5. Первый геймер собирает 4000 бонусов за то же время, за которое второй геймер собирает 5000 бонусов. За какое время (в минутах) они вместе соберут 18 000 бонусов, если второй геймер собирает в минуту на 5 бонусов больше, чем первый?

Вариант 12

1. В магазине продают нитки разной толщины. Длина тонкой нити, намотанной на катушку, равна 180 м. Длина толстой нити, намотанной на такую же катушку, составляет 50% от длины тонкой. В магазине купили 8 катушек с тонкой ниткой и 6 катушек с толстой ниткой. Сколько метров составляет суммарная длина нити, купленной в этом магазине?

2. На графике (см. рис. 45) жирными точками показано изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании за 3 месяца 2010 года. По горизонтали указаны дни, по вертикали — стоимость одной акции в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линией. Бизнесмен купил пакет из 250 акций 14 апреля, а потом продал все свои акции с 12 мая по 17 мая. Какое наибольшее количество рублей мог потерять бизнесмен в результате этих операций?

3. Чтобы перевезти 200 человек на 150 км, можно воспользоваться услугами одной из трёх фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и количе-

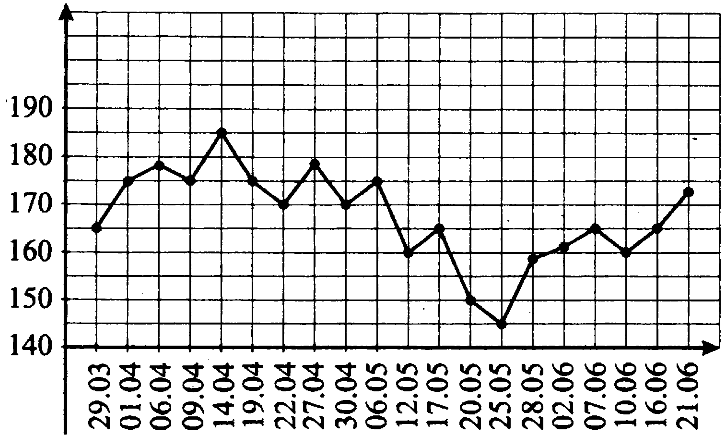


Рис. 45.

ство мест в автобусах для каждой фирмы указаны в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

Фирма	Стоимость перевозки одним автобусом (руб. на 100 км)	Количество мест
А	3280	38
Б	3900	46
В	6700	76

4. Одновременно подбрасывают три монеты. Найдите вероятность того, что выпадет хотя бы одна решка.

5. Две трубы вместе заполняют резервуар объёмом 9000 л за 1 ч 40 мин. Первая труба закачивает в минуту на 10 л воды больше, чем вторая труба. За сколько минут первая труба самостоятельно наполнит резервуар объёмом 4000 л?

Вариант 13

1. Телевизор стоил 6200 рублей. После снижения цены он стал стоить 4340 рублей. На сколько процентов была снижена цена на телевизор?

2. На диаграмме (см. рис. 46) показана среднемесячная температура воздуха в городе N за каждый месяц 1984 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по

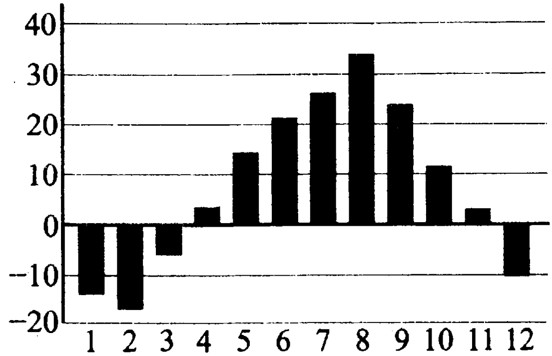


Рис. 46.

диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в период с марта по декабрь 1984 года включительно.

3. Фирме нужно приобрести 20 кубометров песка у одного из трёх поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Фирма	**Цена песка (руб. за 1 м^3)**	**Стоимость доставки (руб.)**	**Дополнительные условия**
А	160	2600	—
Б	170	2500	При заказе на сумму свыше 5000 руб. доставка бесплатно
В	280	2000	При заказе на сумму свыше 5500 руб. доставка бесплатно

4. В некоторой школе из 170 получивших за первую четверть по математике пятерки 102 девочки. Найдите частоту получивших за первую четверть пятерки мальчиков в этой школе.

5. Первые 140 км автомобиль ехал со скоростью 70 км/ч, следующие 220 км — со скоростью 80 км/ч, а затем 30 км — со скоростью 120 км/ч, после чего был оштрафован сотрудником ГИБДД. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Вариант 14

1. На автозаводе выпустили 300 000 грузовых и легковых автомобилей. Из них 35% — грузовые. Среди легковых 40% внедорожников. Сколько внедорожников выпустил автозавод?

2. На графике (см. рис. 47) представлено изменение биржевой стоимости акций энергетической компании за 3 дня июня. По оси абсцисс отложено время в часах, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях. Определите по графику наименьшую цену акции за 24 июня.

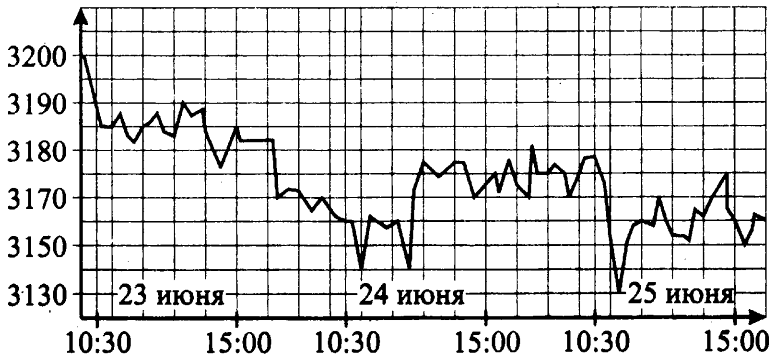


Рис. 47.

3. Для кровельных работ можно использовать один из видов материалов: металлочерепицу или мягкую черепицу. Для первого вида работ понадобится 90 м^2 металлочерепицы и 15 кг крепежа. Для второго — 65 м^2 мягкой черепицы и 8 кг крепежа. Квадратный метр металлочерепицы стоит 240 рублей, квадратный метр мягкой черепицы стоит 350 рублей, 1 кг крепежа стоит 50 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

4. Перед началом первого тура чемпионата области по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 141 теннисист, среди которых 50 участников из Долгопрудного, в том числе Иван Кусаев. Найдите вероятность того, что в первом туре Иван Кусаев будет играть с каким-либо теннисистом из Долгопрудного.

5. Колонна автобусов, двигаясь равномерно со скоростью 24 км/ч, проезжает мимо радиотелескопа, длина которого равна 300 метрам, за 1 минуту. Найдите длину колонны автобусов в метрах.

Вариант 15

1. Иван Петрович взял в банке кредит на покупку мебели в размере 27 000 руб. на год под 16%. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей Иван Петрович должен вносить в банк ежемесячно?

2. На графике (см. рис. 48) представлено изменение биржевой стоимости акций банка за 3 месяца 2010 года. По горизонтали указаны даты, по вертикали — цена одной акции в рублях. Бизнесмен в указанный период купил пакет из 500 акций этого банка, а затем продал его с наибольшей прибылью. Какое наибольшее количество рублей мог получить бизнесмен в результате этих операций?

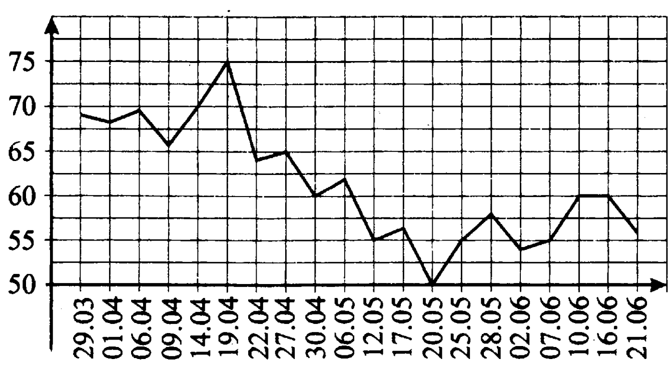


Рис. 48.

3. В таблице приведены условия банковского вклада в трёх различных банках. Предполагается, что клиент кладёт на счёт 30 000 рублей на срок 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Вклад	Обслуживание счёта*	Процентная ставка (% годовых)**
А	220 руб. в год	10
Б	25 руб. в месяц	11
В	Бесплатно	9,5

* В начале года или месяца со счёта снимается указанная сумма в уплату за ведение счёта.

** В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.

4. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 12, но не дойдя до отметки 3 часа.

5. Первую треть дороги заяц бежал со скоростью 30 км/ч, вторую треть — со скоростью 50 км/ч, а последнюю — со скоростью 15 км/ч. Найдите среднюю скорость зайца на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Вариант 16

1. Подоходный налог составляет 13% от заработной платы. Заработная плата почтальона составляет 7800 рублей. Сколько рублей получит почтальон после удержания налога?

2. На графике (см. рис. 49) представлено изменение биржевой стоимости акций угледобывающей компании с утра 23 июня по вечер 25 июня 2010 года. По оси абсцисс отложено время, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях. Определите по графику, какого числа цена акции первый раз упала ниже 1138 рублей. Рабочий день биржи начинается в 10:30.

3. Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок: либо скидку 20% на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, либо скидку 15% на звонки абонентам соседних регионов, либо 10% на услуги мобильного интернета. Клиент посмотрел распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 100 рублей на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 200 рублей на звонки абонентам соседних регионов и 320 рублей на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце

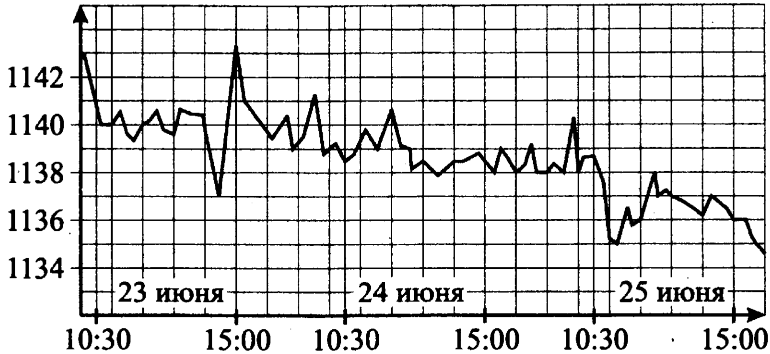


Рис. 49.

затраты будут такими же, и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Какую скидку следует выбрать? В ответе запишите, сколько рублей составит эта скидка.

4. В группе сотрудников МЧС 275 человек. Их вертолётом в несколько приёмов доставляют в труднодоступный район по 25 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит сотрудников МЧС, случаен. Найдите вероятность того, что сотрудники МЧС Михаил М. и Николай К. полетят одним и тем же рейсом вертолёта. Результат округлите до сотых.

5. Два связиста отправляются одновременно в одном направлении из одного и того же места разматывать кабели. Они двигаются по прямой. Скорость первого на 1,5 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между связистами станет равным 150 метрам?

Часть 2.

Алгебра и начала анализа.
Материал 7 – 11 классов

Решение уравнений (B7)

Диагностическая работа

1. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{16}}(14-x) = -2$.

2. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+11} = \frac{1}{81}$.

3. Найдите решение уравнения $\left(\frac{1}{13}\right)^{x+11} = 13^x$.

4. Найдите корень уравнения $\sqrt{38-11x} = 4$.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{-21+10x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6. Найдите корень уравнения $2x^2 - 13x + 15 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

7. Найдите корень уравнения $\frac{4}{13}x = -3\frac{2}{13}$.

8. Найдите корень уравнения $\cos\frac{\pi(x-4)}{6} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наименьший положительный корень.

Понятие уравнения

ⓘ *Немного полезной информации*

Уравнение — это равенство, в котором содержится неизвестная величина (переменная). Напомним основные правила, с помощью которых можно решить уравнение.

- При умножении суммы на множитель каждое слагаемое умножают на этот множитель:

$a(d + c - r) = ad + ac - ar$:

$$8(x + 2y - 3) = 8x + 16y - 24;$$

$-a(-b + d - c) = ab - ad + ac$:

$$-7(-1 + 3x - 4) = 7 - 21x + 28.$$

- При переносе слагаемого из одной части уравнения в другую перед этим слагаемым меняют знак:

$$5 - x = 3 - 2x$$
$$-x + 2x = 3 - 5$$

- Знаки перед каждым слагаемым в уравнении можно одновременно поменять на противоположные:

$$5 - x = 3 - 2x,$$
$$-5 + x = -3 + 2x.$$

- Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю и все другие множители при этом имеют смысл. Например, $(x + 5)(x - 2) = 0$, если или $x + 5 = 0$, или $x - 2 = 0$. Отсюда получаем два корня уравнения: $x = -5$; $x = 2$.

Задачи с решениями

1. Решите уравнение $(x + 5)\sqrt{x - 2} = 0$.

Решение.

Пусть $(x + 5)\sqrt{x - 2} = 0$. Значит, либо $(x + 5) = 0$, либо $\sqrt{x - 2} = 0$. То есть либо $x = -5$, либо $x = 2$. При $x = -5$ множитель $\sqrt{x - 2}$ не будет иметь смысла (так как подкоренное выражение должно быть неотрицательно), поэтому заданное уравнение имеет один корень: $x = 2$.

Ответ: 2.

Уравнения бывают разные, в этом разделе мы разберём основные виды простейших уравнений.

Линейные уравнения

Немного полезной информации

Линейные уравнения — это уравнения вида $ax = b$, где неизвестным является x, а буквы a и b обозначают заданные числа.

Если $a = 0$, то либо уравнение не имеет корней (как, например, уравнение $0x = 7$), либо x может быть любым числом (если $0x = 0$). При $a \neq 0$ корень уравнения находят по формуле:

$$x = b : a.$$

Задачи с решениями

2. Найдите корень уравнения $-5x = 3$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на -5.

$x = 3 : (-5)$; $x = -0{,}6$ — корень заданного уравнения.

Ответ: $-0{,}6$.

3. Найдите корень уравнения $-5x + 4 = 3$.

Решение.

$$\begin{aligned} -5x &= 3 - 4, \\ -5x &= -1, \\ 5x &= 1, \\ x &= 1 : 5, \\ x &= 0{,}2. \end{aligned}$$

Ответ: $0{,}2$.

4. Найдите корень уравнения $-5x - 4 = 3x - 2$.

Решение.

$$\begin{aligned} -5x - 3x &= -2 + 4, \\ -8x &= 2, \\ x &= 2 : (-8), \\ x &= -0{,}25. \end{aligned}$$

Ответ: $-0{,}25$.

5. Найдите корень уравнения $-5\frac{2}{3}x = 1\frac{5}{12}$.

Решение.

$x = 1\frac{5}{12} : \left(-5\frac{2}{3}\right)$,

$1\frac{5}{12} : \left(5\frac{2}{3}\right) = \frac{17}{12} : \frac{17}{3} = \frac{17}{12} \cdot \frac{3}{17} = \frac{3}{12} = 3 : 12 = 0{,}25$,

$x = -0{,}25.$

Ответ: $-0{,}25$.

Квадратные уравнения

Немного полезной информации

Квадратные уравнения — это уравнения вида
$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Основная формула для решения квадратного уравнения:
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$

Задачи с решениями

6. Решите уравнение $3x^2 + 4x - 207 = 0$. Если корней более одного, в ответ запишите меньший корень.

Решение.

$3x^2 + 4x - 207 = 0$. Для данного уравнения $a = 3$, $b = 4$ и $c = -207$. Подставим эти значения в формулу для нахождения корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-207)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{2500}}{6} = \frac{-4 \pm 50}{6};$$

$$x_1 = \frac{-4 - 50}{6} = -9, \quad x_2 = \frac{-4 + 50}{6} = \frac{46}{6}.$$

Получили два различных корня. Так как $-9 < \dfrac{46}{6}$, то $x = -9$ — меньший корень исходного уравнения.

Ответ: -9.

7. Решите уравнение $x^2 = 36$.

1-й способ.

Решение.

Неполное квадратное уравнение можно решить разложением на множители.

$$x^2 - 36 = 0,$$

$$(x-6)(x+6)=0,$$
$$x_1=6,\quad x_2=-6.$$

Ответ: $6; -6$.

2-й способ.

Также уравнение $x^2=36$ можно решить и по-другому:

$$x_{1;2}=\pm\sqrt{36},$$
$$x_{1,2}=\pm 6,$$
$$x_1=6,\quad x_2=-6.$$

Ответ: $6; -6$.

8. Решите уравнение $x^2=36x$.

Решение.

$$x^2-36x=0.$$

Вынесем x за скобку:

$$x(x-36)=0,$$
$$x_1=0,\quad x_2=36.$$

Ответ: $0; 36$.

Дробно-рациональные уравнения

Задачи с решениями

9. Решите уравнение $\dfrac{5x-6}{3x+4}=8$.

Решение.

$\dfrac{5x-6}{3x+4}=\dfrac{8}{1}$. Приведём к общему знаменателю: $\dfrac{5x-6}{3x+4}=\dfrac{8(3x+4)}{1(3x+4)}$.

Так как дроби с одинаковым знаменателем равны, то их числители тоже должны быть равны:

$$5x-6=8(3x+4),$$
$$5x-6=24x+32,$$
$$5x-24x=32+6,$$

$$-19x = 38,$$
$$x = -2.$$

При $x = -2$ знаменатель $3x + 4$ не равен нулю, значит, это корень исходного уравнения.

Ответ: -2.

10. Решите уравнение $\dfrac{2x-21}{x+12} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

Решение.

Превратим это уравнение в пропорцию — равенство двух дробей:

$$\frac{2x-21}{x+12} = \frac{x}{1}.$$

В пропорции произведение крайних членов равно произведению средних (если говорить образным языком, «умножаем крест-накрест»):

$$\frac{2x-21}{x+12} \quad \frac{x}{1}.$$

Получим $x(x + 12) = 2x - 21$; $x^2 + 12x = 2x - 21$; $x^2 + 10x + 21 = 0$. Полученное уравнение имеет два корня: $x_1 = -3$; $x_2 = -7$. Убеждаемся, что оба числа являются корнями исходного уравнения, и пишем в ответ бóльшее из них.

Ответ: -3.

Иррациональные уравнения

Немного полезной информации

При решении иррациональных уравнений нам приходится возводить обе части уравнения в квадрат. Нужно помнить, что квадратный корень не может быть отрицательным. Если в уравнении квадратный корень равен выражению, которое может быть отрицательным, необходимо делать проверку. Например, в уравнении $\sqrt{2x + 87} = -11$ корней нет.

Задачи с решениями

11. Решите уравнение $\sqrt{2x + 87} = 11$.

Решение.

Возведём обе части уравнения в квадрат.

$$\left(\sqrt{2x+87}\right)^2 = 11^2,$$
$$2x + 87 = 121,$$
$$2x = 121 - 87,$$
$$2x = 34,$$
$$x = 17.$$

Ответ: 17.

В этом уравнении проверка не нужна, но гораздо проще проверить получившийся ответ, чем понять, нужна проверка или нет. Кроме того, проверка позволяет понять, не сделаны ли были ошибки в вычислениях во время решения уравнения.

12. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{5x+39}{16}} = \dfrac{1}{2}$.

Решение.

$$\left(\sqrt{\frac{5x+39}{16}}\right)^2 = \frac{1}{4},$$
$$\frac{5x+39}{16} = \frac{4}{16},$$
$$5x + 39 = 4,$$
$$5x = 4 - 39,$$
$$5x = -35,$$
$$x = -7.$$

Проверка: $\sqrt{\dfrac{5\cdot(-7)+39}{16}} = \dfrac{1}{2}$, $\sqrt{\dfrac{4}{16}} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: -7.

13. Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+63} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите бо́льший из них.

Решение.

$$(\sqrt{2x+63})^2 = (-x)^2,$$
$$2x + 63 = x^2,$$
$$x^2 - 2x - 63 = 0,$$
$$x_1 = -7, \ x_2 = 9.$$

Выполняем проверку: $x_1 = -7$ подходит, так как

$\sqrt{2(-7)+63} = \sqrt{49} = -(-7)$;

$x_2 = 9$ не является корнем, потому что квадратный корень равен «$-x$», а значит, x должно быть неположительным числом. Другими словами, при проверке получим $\sqrt{2 \cdot 9 + 63} \neq -9$.

Ответ: -7.

14. Найдите корень уравнения $\sqrt{87 - 10x} = \sqrt{87 - x^2}$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите бо́льший из них.

Решение.

$$\begin{aligned} 87 - 10x &= 87 - x^2, \\ -10x &= -x^2, \\ x^2 - 10x &= 0, \\ x(x - 10) &= 0, \\ x_1 &= 0, \\ x_2 &= 10. \end{aligned}$$

Выполняем проверку: $x_1 = 0$ подходит; $x_2 = 10$ не является корнем, так как выражение $\sqrt{(87 - 10 \cdot 10)}$ не имеет смысла.

Ответ: 0.

Показательные уравнения

Немного полезной информации

Самые простые показательные уравнения решают приведением обеих частей уравнения к одному основанию: $a^x = a^y$, откуда получают $x = y$.

При этом нужно помнить, что $a^{-k} = \dfrac{1}{a^k} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^k$,

обратно $a^k = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-k}$; $a^0 = 1$; $a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}$; $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

Задачи с решениями

15. Найдите корень уравнения $9^{x-24} = 729$.

Решение.

Заметим, что $729 = 9^3$.

$$\begin{aligned} 9^{x-24} &= 9^3, \\ x-24 &= 3, \end{aligned}$$

$$x = 3 + 24,$$

$x = 27$ — корень исходного уравнения.

Ответ: 27.

16. Найдите корень уравнения $5^{2x+4} = \frac{1}{25}$.

Решение.

$$5^{2x+4} = 5^{-2},$$
$$2x + 4 = -2,$$
$$2x = -2 - 4,$$
$$x = -3.$$

Ответ: -3.

Логарифмические уравнения

Немного полезной информации

По определению логарифма: $\log_a x = y$, если $x = a^y$. При таком способе решения проверка не нужна.

Помните! **Основание логарифма и основание степени при этом переходе совпадают!**

Самые простые логарифмические уравнения также решают приведением логарифмов в обеих частях уравнения к одному основанию: $\log_a x = \log_a y$, откуда $x = y$. В таких случаях при решении логарифмических уравнений нужно делать проверку, чтобы под знаком логарифма было только положительное число. При этом нужно помнить, что в выражении $\log_a x$ переменные $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, а также что $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a a^k = k$; $c \log_a b = \log_a b^c$.

Задачи с решениями

17. Найдите корень уравнения $\log_2 (x + 8) = 5$.

Решение.

По определению логарифма:

$$x + 8 = 2^5,$$
$$x + 8 = 32,$$
$$x = 24.$$

Проверяем: $x + 8 = 24 + 8 > 0$. Вообще говоря, проверка здесь не нужна.

Ответ: 24.

18. Найдите корень уравнения $\log_5(2x + 8) = -1$.

Решение.

$2x + 8 = 5^{-1}$; $2x + 8 = \frac{1}{5}$; $2x + 8 = 0{,}2$; $2x = 0{,}2 - 8$; $2x = -7{,}8$; $x = -7{,}8 : 2$; $x = -3{,}9$.

Проверка здесь не нужна.

Ответ: $-3{,}9$.

19. Найдите корень уравнения $\log_{15}(3x - 9) = \log_{15}(x - 17)$.

Решение.

$3x - 9 = x - 17$, $3x - x = -17 + 9$, $2x = -8$, $x = -4$.

Проверка: $\log_{15}(3 \cdot (-4) - 9) = \log_{15}(-4 - 17)$. Под знаком логарифма не может стоять отрицательное число, поэтому $x = -4$ не является корнем этого уравнения.

Ответ: корней нет.

20. Найдите корень уравнения $\log_5(3x - 9) = 2\log_5 6$.

Решение.

$$\begin{aligned} \log_5(3x-9) &= \log_5 6^2, \\ 3x - 9 &= 6^2, \\ 3x - 9 &= 36, \\ 3x &= 36 + 9, \\ 3x &= 45, \\ x &= 15. \end{aligned}$$

Проверка: $\log_5(3 \cdot 15 - 9) = 2\log_5 6$,

$\log_5(36) = \log_5 36$,

$x = 15$ — корень уравнения.

Ответ: 15.

Тригонометрические уравнения

ⓘ *Немного полезной информации*

Как правило, решение любого тригонометрического уравнения сводится к решению одного из трёх видов простейших тригонометрических уравнений: $\sin x = a$, $\cos x = a$ или $\operatorname{tg} x = a$.

Для всех тригонометрических уравнений характерно то, что мы получаем бесконечное число корней уравнения, хотя пишем при этом одно или два выражения для корней. Это происходит потому, что тригонометрические функции периодические, то есть повторяющиеся через определённый промежуток — период. То есть если у нас есть один корень, то будет и ещё бесконечно много, отличающихся друг от друга на величину, равную периоду.

В приведённых задачах требуется в ответе указать наибольший отрицательный или наименьший положительный корень. Часто при решении таких уравнений возникают формулы вида $x = 1 + 4k$, $x = 3 + 4k$, где $k \in Z$. Разберёмся, что это означает и как по этим формулам получить корни уравнения.

Запись $k \in Z$ означает, что k может быть любым целым числом, то есть может принимать значения $0; 1; -1; 2; -2; \ldots; 419; -419$ и так далее. Число 419 мы взяли для примера.

Подставим некоторые значения k в первую формулу:

$k = 0, \qquad x = 1 + 4 \cdot 0 = 1;$
$k = 1, \qquad x = 1 + 4 \cdot 1 = 5;$
$k = -1, \qquad x = 1 + 4 \cdot (-1) = 1 - 4 = -3;$
$k = 2, \qquad x = 1 + 4 \cdot 2 = 9;$
$k = -2, \qquad x = 1 + 4 \cdot (-2) = 1 - 8 = -7.$

Так можно будет получить сколь угодно много различных корней.

Теперь подставим значения k во вторую формулу:

$k = 0, \qquad x = 3 + 4 \cdot 0 = 3;$
$k = 1, \qquad x = 3 + 4 \cdot 1 = 7;$
$k = -1, \qquad x = 3 + 4 \cdot (-1) = 3 - 4 = -1;$
$k = 2, \qquad x = 3 + 4 \cdot 2 = 11;$
$k = -2, \qquad x = 3 + 4 \cdot (-2) = 3 - 8 = -5.$

Попробуем найти наибольший отрицательный корень. Выбираем отрицательное число, которое ближе всего к нулю. Для первой формулы это -3, для второй — это -1, ближе к нулю (и больше) число -1, значит, наибольший отрицательный корень равен -1.

Теперь попробуем найти наименьший положительный корень. Выбираем положительное число, которое ближе всего к нулю. По первой формуле это 1, по второй — это 3, ближе к нулю (и меньше) число 1, значит, наименьший положительный корень равен 1.

Некоторые значения обратных тригонометрических функций

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	π

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Уравнение $\cos x = a$ имеет корни при $-1 \leqslant a \leqslant 1$, общая формула:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \text{ где } k \in Z. \quad (1)$$

Для уравнения $\cos x = -b$ удобно применять формулу

$$x = \pi \pm \arccos b + 2\pi k, \text{ где } k \in Z. \quad (2)$$

Чтобы найти наибольший отрицательный или наименьший положительный корни, нужно подставить в формулу $k = 0$, $k = 1$, $k = -1$ и выбрать необходимые числа.

Задачи с решениями

21. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos\dfrac{2\pi x}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

Так как в правой части стоит отрицательное число, воспользуемся формулой (2).

$\dfrac{2\pi x}{3} = \pi \pm \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k$, где $k \in Z$.

С помощью таблицы значений обратных тригонометрических функций находим $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6}$. Тогда $\dfrac{2\pi x}{3} = \pi \pm \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in Z$. Разделим каждый член уравнения на π.

$\dfrac{2x}{3} = 1 \pm \dfrac{1}{6} + 2k$, где $k \in Z$. Теперь умножим каждый член уравнения на 3, а потом разделим на 2, получим

$$2x = 3 \pm \frac{3}{6} + 6k,$$

$$x = 1{,}5 \pm 0{,}25 + 3k.$$

Наименьший положительный корень уравнения получаем при $k = 0$. Это корень $x = 1{,}5 - 0{,}25 = 1{,}25$.

Ответ: 1,25.

Немного полезной информации

Уравнение $\sin x = a$ имеет корни при $-1 \leqslant a \leqslant 1$, корни находят как совокупность $x = \arcsin a + 2\pi k$ и
$x = \pi - \arcsin a + 2\pi k$, где $k \in Z$.

Для уравнения $\sin x = -b$ удобно применять формулы $x = -\arcsin b + 2\pi k$, $x = \pi + \arcsin b + 2\pi k$, где $k \in Z$.

Задачи с решениями

22. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin\dfrac{\pi x}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

$$\frac{\pi x}{4} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k, \quad \frac{\pi x}{4} = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k, \text{ где } k \in Z.$$

$$\frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad \frac{\pi x}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

Делим каждый член уравнения на π.

$$\frac{x}{4} = \frac{1}{4} + 2k, \quad \frac{x}{4} = 1 - \frac{1}{4} + 2k.$$

Умножаем на 4.

$x = 1 + 8k$, $x = 3 + 8k$, где $k \in Z$.

Наибольший отрицательный корень уравнения получится при $k = -1$. То есть $x = 1 - 8 = -7$ или $x = 3 - 8 = -5$. При этом -5 — бóльшее число.

Ответ: -5.

Немного полезной информации

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, где $k \in Z$.

Задачи с решениями

23. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{3} = \sqrt{3}$.

Решение.

$$\frac{2\pi x}{3} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k, \text{ где } k \in Z,$$

$$\frac{2\pi x}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi k,$$

$$2x = 1 + 3k,$$

$$x = 0{,}5 + 1{,}5k.$$

Наименьший положительный корень уравнения получаем при $k = 0$. Это корень $x = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Найдите корень уравнения $\log_7(21 + x) = \log_7(2x + 3)$.

2. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{10-3x} = 32$.

3. Найдите корень уравнения $49^{x-8} = 7$.

4. Найдите корень уравнения $\sqrt{7x + 15} = 8$.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{6 - 5x} = -2x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите бóльший из них.

6. Найдите корень уравнения $\frac{4}{6}x = -3\frac{2}{3}$.

7. Найдите корень уравнения $\frac{x + 31}{x - 3} = -4$.

8. Найдите корень уравнения $x^2 - 7x - 18 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Вариант 2

1. Найдите корень уравнения $\log_3(7 - x) = 2\log_3 7$.

2. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{16}\right)^{5-2x} = 2$.

3. Найдите корень уравнения $8^{-6+2x} = 8$.

4. Найдите корень уравнения $\sqrt{54 + 3x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

5. Найдите корень уравнения $\frac{6}{7}x = 4\frac{2}{7}$.

6. Найдите корень уравнения $x = \frac{-3x + 4}{x - 3}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

7. Найдите корень уравнения $2x^2 + 11x + 15 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите бóльший из них.

8. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x^2 - 8x + 16} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Вариант 3

1. Найдите корень уравнения $\log_8(5-x)=3$.

2. Найдите корень уравнения $7^{3-2x}=7$.

3. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+5}=27^x$.

4. Найдите корень уравнения $\sqrt{59-11x}=9$.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{112-6x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6. Найдите корень уравнения $-\frac{x+4}{x+7}=-6$.

7. Найдите корень уравнения $2x^2+x-21=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите бóльший из них.

8. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin\frac{\pi(x-2)}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 4

1. Найдите корень уравнения $\log_5(7+x)=3$.

2. Найдите корень уравнения $7^{-6+x}=343$.

3. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3}=3$.

4. Найдите корень уравнения $\sqrt{10-3x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите бóльший из них.

5. Найдите корень уравнения $x^2-25=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6. Найдите корень уравнения $x^2+2x-15=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

7. Найдите корень уравнения $\frac{x-9}{x-3}=6$.

8. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\frac{\pi(x+3)}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Вариант 5

1. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} = 4^x$.

2. Найдите корень уравнения $\sqrt{50-17x} = 4$.

3. Найдите корень уравнения $\dfrac{x+12}{x-3} = -4$.

4. Найдите корень уравнения $\dfrac{x}{x+7} = 8$.

5. Найдите корень уравнения $-\frac{4}{3}x = -3\frac{2}{6}$.

6. Найдите корень уравнения $x^2+9x+8=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

7. Найдите корень уравнения $2x^2-6x+4=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите бóльший из них.

8. Найдите корень уравнения $\cos\dfrac{\pi(x+2)}{6} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Вычисления и преобразования (B11)

Диагностическая работа

1. Найдите значение выражения $\left(\frac{2}{3}+2\frac{4}{5}\right)\cdot 4{,}5$.

2. Найдите значение выражения $3^{0,34}\cdot 27^{1,22}$.

3. Найдите значение выражения $5^{\sqrt{3}+1}\cdot 5^{1-\sqrt{3}}$.

4. Найдите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{3}a)^2\cdot\sqrt[5]{a^4}}{5a^{2,8}}$ при $a>0$.

5. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{7}}\sqrt{7}$.

6. Найдите значение выражения $33\cdot 7^{\log_7 8}$.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{17\sin 13^\circ\cos 13^\circ}{\sin 26^\circ}$.

8. Найдите значение выражения $\dfrac{5\cos\alpha+3\sin\alpha}{2\sin\alpha+7\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=1{,}5$.

Действия с обыкновенными дробями

ⓘ *Немного полезной информации*

Вспомним, как производить простейшие вычисления с обыкновенными дробями. Чтобы перемножить дроби, нужно умножить их числители и записать результат в числитель, а потом перемножить знаменатели и результат записать в знаменатель:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}=\frac{ad}{bc},$$

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 5}{7\cdot 6}=\frac{25}{42}.$$

Если числитель и знаменатель дроби делятся на одно и то же число, то на него обычно делят каждый из них и называют это «сократить дробь»:

$$\frac{20}{30} = \frac{20:10}{30:10} = \frac{2}{3}.$$

Иногда сокращение выполняют во время умножения дробей:

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 6} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}.$$

Если дроби смешанные (с выделенной целой частью), то нужно их перевести в обыкновенные (состоящие только из числителя и знаменателя). Для этого целую часть умножают на знаменатель, прибавляют числитель и результат записывают в числитель, а знаменатель оставляют прежним:

$$3\frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{17}{5},$$

$$3\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3 \cdot 5 + 4}{5} \cdot \frac{5}{19} = \frac{19}{5} \cdot \frac{5}{19} = 1.$$

Чтобы перевести неправильную дробь (числитель больше знаменателя) в смешанную (выделить целую часть), нужно числитель разделить на знаменатель с остатком. Тогда неполное частное будет целой частью, остаток будет числителем, а знаменатель останется тем же:

$$\frac{19}{5} = 19 : 5 = 3 \text{ (остаток 4)},$$

$$\frac{19}{5} = 3\frac{4}{5}.$$

Чтобы перевести обыкновенную дробь в десятичную, надо числитель разделить на знаменатель:

$$\frac{6}{25} = 6 : 25 = 0{,}24.$$

Десятичную дробь можно перевести в обыкновенную. Например, 0,201 читается как «ноль целых двести одна тысячная». Пишем $\frac{201}{1000}$.

Чтобы умножить обыкновенную дробь на десятичную, нужно или обыкновенную перевести в десятичную, или десятичную в обыкновенную:

$$\frac{2}{5}\cdot 0{,}25 = 2:5\cdot 0{,}25 = 0{,}4\cdot 0{,}25 = 0{,}100 = 0{,}1;$$

$$\frac{2}{5}\cdot 0{,}25 = \frac{2}{5}\cdot\frac{25}{100} = \frac{50}{500} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}.$$

Чтобы разделить число на обыкновенную дробь, нужно в этой дроби поменять местами числитель со знаменателем и умножить число на полученную дробь:

$$\frac{a}{b}:\frac{d}{c} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

$$\frac{2}{5}:\frac{3}{4} = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{15}.$$

Чтобы целое число записать в виде обыкновенной дроби, нужно записать его со знаменателем 1:

$$15 : 3\frac{6}{7} = \frac{15}{1} : \frac{3\cdot 7+6}{7} = \frac{15}{1} : \frac{27}{7} = \frac{15}{1}\cdot\frac{7}{27} = \frac{15\cdot 7}{1\cdot 27} =$$

$$= \frac{5\cdot 7}{1\cdot 9} = \frac{35}{9}.$$

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители и записать числитель новой дроби, а знаменатель оставить прежним. Чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно вычесть их числители и записать числитель новой дроби, а знаменатель оставить прежним. Если у дробей есть целая часть, то нужно сначала сложить или вычесть целые части:

$$\frac{5}{6}-\frac{1}{6} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$3\frac{4}{5}+2\frac{3}{5} = 3+2+\frac{4+3}{5} = 5+\frac{7}{5} = 6\frac{2}{5}.$$

Можно при сложении и вычитании дробей сразу перевести все дроби в обыкновенные (без целой части):

$$3\frac{4}{5}+2\frac{3}{5} = \frac{3\cdot 5+4}{5}+\frac{2\cdot 5+3}{5} = \frac{19}{5}+\frac{13}{5} = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5},$$

$$-\frac{3}{8}-2\frac{1}{8}=-\left(\frac{3}{8}+2\frac{1}{8}\right)=-2\frac{4}{8}=-2\frac{1}{2}.$$

Сложить дроби с разными знаменателями можно двумя способами.

1. Умножим числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительные множители так, чтобы новый знаменатель был равен наименьшему общему кратному знаменателей исходных дробей. Сложим полученные дроби с одинаковым знаменателем:

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=\frac{3^{\backslash 3}}{8}+\frac{5^{\backslash 2}}{12}=\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}+\frac{5\cdot 2}{12\cdot 2}=\frac{9+10}{24}=\frac{19}{24}.$$

2. Умножим числитель и знаменатель первой дроби на знаменатель второй и наоборот. Сложим полученные дроби с одинаковым знаменателем:

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=\frac{3^{\backslash 12}}{8}+\frac{5^{\backslash 8}}{12}=\frac{3\cdot 12}{8\cdot 12}+\frac{5\cdot 8}{12\cdot 8}=\frac{36}{96}+\frac{40}{96}=$$
$$=\frac{36+40}{96}=\frac{76}{96}=\frac{19}{24}.$$

Разберём ещё пример сложения и пример вычитания дробей.

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{2^{\backslash 4}}{5}+\frac{3^{\backslash 5}}{4}=\frac{2\cdot 4}{5\cdot 4}+\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{8}{20}+\frac{15}{20}=\frac{23}{20}=1\frac{3}{20};$$

$$2\frac{2}{3}-4\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 3+2}{3}-\frac{4\cdot 4+3}{4}=\frac{8}{3}-\frac{19}{4}=\frac{8^{\backslash 4}}{3}-\frac{19^{\backslash 3}}{4}=$$
$$=\frac{32}{12}-\frac{57}{12}=-\frac{57-32}{12}=-\frac{25}{12}=-2\frac{1}{12}.$$

Задачи с решениями

1. Найдите значение выражения $\left(-\frac{7}{8}+4\frac{2}{3}\right)\cdot 9{,}6$.

Решение.

1) $-\frac{7}{8}+4\frac{2}{3}=-\frac{7}{8}+\frac{4\cdot 3+2}{3}=-\frac{7}{8}+\frac{14}{3}=$

$$=-\frac{7^{\backslash 3}}{8}+\frac{14^{\backslash 8}}{3}=-\frac{21}{24}+\frac{112}{24}=\frac{112-21}{24}=\frac{91}{24}.$$

2) $\frac{91}{24} \cdot 9{,}6 = \frac{91}{24} \cdot 9\frac{6}{10} = \frac{91}{24} \cdot \frac{96}{10}$.

Сокращаем 96 и 24, $96 : 24 = 4$,

$\frac{91}{24} \cdot \frac{96}{10} = \frac{91 \cdot 4}{10} = \frac{364}{10} = 36\frac{4}{10} = 36{,}4$.

Ответ: 36,4.

Действия со степенями

Немного полезной информации

Вспомним основные формулы.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m};$$

$$a^n : a^m = a^{n-m};$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m};$$

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Задачи с решениями

2. Найдите значение выражения $5^7 \cdot 5^{10} : 5^{15}$.

Решение.

$5^7 \cdot 5^{10} : 5^{15} = 5^{7+10-15} = 5^2 = 25$.

Ответ: 25.

3. Найдите значение выражения $\frac{x^{18} \cdot x^7}{x^{20}}$ при $x = 8$.

Решение.

$\frac{x^{18} \cdot x^7}{x^{20}} = x^{18+7-20} = x^5 = 8^5 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 64 \cdot 64 \cdot 8 =$
$= 32\,768$.

Ответ: 32 768.

4. Найдите значение выражения $2^9 \cdot 11^6 : 22^6$.

Решение.

$2^9 \cdot 11^6 : 22^6 = \frac{2^9 \cdot 11^6}{22^6} = \frac{2^9 \cdot 11^6}{(2 \cdot 11)^6} = \frac{2^9 \cdot 11^6}{2^6 \cdot 11^6} = \frac{2^9}{2^6} =$
$= 2^{9-6} = 2^3 = 8.$

Ответ: 8.

5. Найдите значение выражения $121^2 \cdot 3^2 : 99$.

Решение.

$$121^2 \cdot 3^2 : 99 = \frac{\left(11^2\right)^2 \cdot 3^2}{11 \cdot 3^2} = \frac{3^2 \cdot 11^4}{3^2 \cdot 11} = 11^{4-1} = 11^3 = 1331.$$

Ответ: 1331.

6. Найдите значение выражения $2^{\sqrt{12}-6} \cdot 2^{3-\sqrt{12}}$.

Решение.

$$2^{\sqrt{12}-6} \cdot 2^{3-\sqrt{12}} = 2^{\sqrt{12}-6+3-\sqrt{12}} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Ответ: 0,125.

7. Найдите значение выражения $0{,}4^{\frac{1}{9}} \cdot 5^{\frac{2}{9}} \cdot 10^{\frac{8}{9}}$.

Решение.

$0{,}4^{\frac{1}{9}} \cdot 5^{\frac{2}{9}} \cdot 10^{\frac{8}{9}} = \left(0{,}4 \cdot 5^2 \cdot 10^8\right)^{\frac{1}{9}} = \left(0{,}4 \cdot 25 \cdot 10^8\right)^{\frac{1}{9}} =$
$= \left(10 \cdot 10^8\right)^{\frac{1}{9}} = \left(10^9\right)^{\frac{1}{9}} = 10^1 = 10.$

Ответ: 10.

8. Найдите значение выражения $9^{\frac{2}{7}} \cdot 81^{\frac{5}{14}}$.

Решение.

$$9^{\frac{2}{7}} \cdot 81^{\frac{5}{14}} = 9^{\frac{2}{7}} \cdot \left(9^2\right)^{\frac{5}{14}} = 9^{\frac{2}{7}} \cdot 9^{\frac{10}{14}} = 9^{\frac{2}{7}} \cdot 9^{\frac{5}{7}} = 9^{\frac{2}{7}+\frac{5}{7}} = 9^{\frac{7}{7}} = 9.$$

Ответ: 9.

9. Найдите значение выражения $\frac{x^{-10} \cdot x^{-8}}{x^{-19}}$ при $x = 5$.

Решение.

$$\frac{x^{-10} \cdot x^{-8}}{x^{-19}} = x^{(-10)+(-8)-(-19)} = x^{-18+19} = x^1 = x = 5.$$

Ответ: 5.

Действия с многочленами

Немного полезной информации

Вспомним основные правила действий с многочленами.

Распределительный закон:

$$a \cdot (b + c - k) = ab + ac - ak.$$

Этот закон позволяет не только раскрывать скобки, но и упрощать вычисления.

$38 \cdot 46 + 38 \cdot 254 - 38 \cdot 200 = 38(46 + 254 - 200) = 38 \cdot 100 = 3800.$

Переместительные законы:

$$a - b + c - k = a + c - b - k,$$
$$a \cdot b : c \cdot k = a \cdot b \cdot k : c.$$

Если в примере написана алгебраическая сумма (то есть встречаются только знаки «+» и «−»), то слагаемые можно поменять местами, но перемещать их нужно вместе с тем знаком, который стоит перед слагаемым.

Например, $38 - 126 + 236 - 141 = 236 - 126 + 38 - 141 = 110 + 38 - 141 = 148 - 141 = 7.$

Если в примере есть только действия умножение и деление (и нет скобок), то есть встречаются только знаки «·» и «:», то числа можно поменять местами, но перемещать их опять-таки нужно вместе с тем знаком, который стоит перед числом.

Например, $64 : 9 \cdot 45 : 16 = 64 : 16 \cdot 45 : 9 = 4 \cdot 45 : 9 = 45 : 9 \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20.$

Задачи с решениями

10. Найдите значение выражения $3x(3x-15)-9x^2+8x+11$ при $x = 200$.

Решение.

Упростим данное выражение.

$3x(3x - 15) - 9x^2 + 8x + 11 = (3x)^2 - 15 \cdot 3x - 9x^2 + 8x + 11 =$
$= 9x^2 - 45x - 9x^2 + 8x + 11 = -37x + 11.$

Подставим значение переменной $x = 200$.

$-37x + 11 = -37 \cdot 200 + 11 = -7400 + 11 = -7389.$

Ответ: -7389.

11. Найдите значение выражения $\frac{(7a)^2 - 7a}{7a^2 - a}$.

Решение.

$$\frac{7a(7a-1)}{a(7a-1)} = \frac{7a}{a} = 7.$$

Ответ: 7.

12. Найдите значение выражения $\frac{3\left(3x^3\right)^2 \cdot (5y)^3}{(15x^2y)^3}$.

Решение.

$$\frac{3\left(3x^3\right)^2 \cdot (5y)^3}{(15x^2y)^3} = \frac{3 \cdot 3^2\left(x^3\right)^2 \cdot 5^3y^3}{15^3\left(x^2\right)^3y^3} = \frac{3^3x^6 \cdot 5^3y^3}{3^3 \cdot 5^3x^6y^3} = 1.$$

Ответ: 1.

13. Найдите значение выражения $\frac{3\left(k^3\right)^8 + 13\left(k^6\right)^4}{\left(4k^{12}\right)^2}$.

Решение.

$$\frac{3\left(k^3\right)^8 + 13\left(k^6\right)^4}{\left(4k^{12}\right)^2} = \frac{3k^{24} + 13k^{24}}{16k^{24}} = \frac{16k^{24}}{16k^{24}} = 1.$$

Ответ: 1.

14. Найдите значение выражения $\frac{25x^2 - 9}{5x + 3} - 5x$.

Решение.

$$\frac{25x^2 - 9}{5x + 3} - 5x = \frac{(5x+3)(5x-3)}{5x+3} - 5x = (5x - 3) - 5x = -3.$$

Ответ: -3.

15. Найдите значение выражения

$$(25a^2 - 4) \cdot \left(\frac{1}{5a-2} - \frac{1}{5a+2}\right).$$

Решение.

$$(25a^2 - 4) \cdot \left(\frac{1}{5a-2} - \frac{1}{5a+2}\right) =$$

$$= (5a-2)(5a+2) \cdot \left(\frac{5a+2}{(5a-2)(5a+2)} - \frac{5a-2}{(5a-2)(5a+2)}\right) =$$

$$= (5a-2)(5a+2)\frac{5a+2-(5a-2)}{(5a-2)(5a+2)} =$$

$$= (5a-2)(5a+2)\frac{4}{(5a-2)(5a+2)} = 4.$$

Ответ: 4.

16. Найдите $\dfrac{t(x)}{t\left(\frac{1}{x}\right)}$, если $t(x) = \left(x+\frac{5}{x}\right)\left(5x+\frac{1}{x}\right)$ при $x \neq 0$.

Решение.

$$t\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}+5x\right)\left(\frac{5}{x}+x\right) = t(x),$$

$$\frac{t(x)}{t\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{t(x)}{t(x)} = 1.$$

Ответ: 1.

17. Найдите $k(b)+k(5-b)$, если $k(b) = \dfrac{b(5-b)}{b-2{,}5}$ при $b \neq 2{,}5$.

Решение.

$$k(5-b) = \frac{(5-b)(5-(5-b))}{5-b-2{,}5} = \frac{(5-b)b}{2{,}5-b} = -k(b).$$

$k(b)+k(5-b) = k(b)-k(b) = 0.$

Ответ: 0.

18. Найдите $\dfrac{x}{y}$, если $\dfrac{6x-7y}{7x+6y} = 13$.

Решение.

$\dfrac{6x-7y}{7x+6y} = 13$, делим числитель и знаменатель на y.

$$\frac{6\cdot\frac{x}{y}-7}{7\cdot\frac{x}{y}+6} = 13,$$

$$6\cdot\frac{x}{y}-7 = 13\left(7\cdot\frac{x}{y}+6\right),$$

$$6\cdot\frac{x}{y}-7 = 91\cdot\frac{x}{y}+78,$$

$$85\cdot\frac{x}{y}+85 = 0,$$

$\frac{x}{y} = -1.$

Ответ: -1.

19. Найдите $\frac{2x+5y+9}{x+2y+4}$, если $\frac{x}{y} = 2$.

Решение.

Так как $\frac{x}{y} = 2$, то $x = 2y$. Подставим $2y$ вместо x в выражение

$$\frac{2x+5y+9}{x+2y+4}. \quad \frac{4y+5y+9}{2y+2y+4} = \frac{9y+9}{4y+4} = \frac{9(y+1)}{4(y+1)} = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

Ответ: 2,25.

20. Найдите значение выражения $\frac{9x^2+y^2-(3x+y)^2}{2xy}$.

Решение.

$$\frac{9x^2+y^2-(3x+y)^2}{2xy} = \frac{9x^2+y^2-(9x^2+6xy+y^2)}{2xy} =$$

$$= \frac{9x^2+y^2-9x^2-6xy-y^2}{2xy} = -\frac{6xy}{2xy} = -3.$$

Ответ: -3.

21. Найдите значение выражения $\frac{15abc-(-3cab)}{9bca}$.

Решение.

$$\frac{15abc-(-3cab)}{9bca} = \frac{15abc+3abc}{9abc} = \frac{18abc}{9abc} = 2.$$

Ответ: 2.

22. Найдите значение выражения $\frac{13a^8b^4-\left(3a^4b^2\right)^2}{a^8b^6}$ при $b = 4$.

Решение.

$$\frac{13a^8b^4-(3a^4b^2)^2}{a^8b^6} = \frac{13a^8b^4-9a^8b^4}{a^8b^6} = \frac{4a^8b^4}{a^8b^6} = \frac{4a^8b^4}{a^8b^6} =$$

$$= \frac{4}{b^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

23. Найдите значение выражения $4p(x) - 8x + 4$, если $p(x) = 2x - 6$.

Решение.

$4p(x) - 8x + 4 = 4(2x - 6) - 8x + 4 = 8x - 24 - 8x + 4 = -20.$

Ответ: -20.

24. Найдите значение выражения $x + 2y + 6z$, если $3x + y = 10$, $5y + 18z = 2$.

Решение.

Сложим левые и правые части выражений $3x+y = 10$ и $5y+18z = 2$. Получим $3x + 6y + 18z = 12$. Разделим на 3, получим $x + 2y + 6z = 4$.

Ответ: 4.

25. Найдите значение выражения $3k(3x) - 2k(x + 7) - 7x$, если $k(x) = x - 14$.

Решение.

$k(3x) = 3x - 14$. $k(x + 7) = x + 7 - 14 = x - 7$.

$3k(3x) - 2k(x + 7) - 7x = 3(3x - 14) - 2(x - 7) - 7x =$
$= 9x - 42 - 2x + 14 - 7x = 7x - 28 - 7x = -28.$

Ответ: -28.

Действия с корнями

Немного полезной информации

Вспомним основные формулы:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a};$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, если k нечётно и
$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{|a^m|}$, если k чётно;

$$\sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}.$$

Задачи с решениями

26. Найдите значение выражения $\dfrac{14\sqrt[18]{x}\sqrt[9]{x}}{\sqrt[6]{x}}$ при $x > 0$.

Решение.

$$\frac{14\sqrt[18]{x}\sqrt[9]{x}}{\sqrt[6]{x}} = \frac{14x^{\frac{1}{18}}x^{\frac{1}{9}}}{x^{\frac{1}{6}}} = 14x^{\frac{1}{18}+\frac{1}{9}-\frac{1}{6}} = 14x^{\frac{1}{18}+\frac{2}{18}-\frac{3}{18}} =$$

$$= 14x^0 = 14.$$

Ответ: 14.

27. Найдите значение выражения $\sqrt{406^2 - 294^2}$.

Решение.

$$\sqrt{406^2 - 294^2} = \sqrt{(406+294)(406-294)} = \sqrt{700 \cdot 112} =$$

$$= \sqrt{7 \cdot 100 \cdot 7 \cdot 16} = 10 \cdot 7 \cdot 4 = 280.$$

Ответ: 280.

28. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{1{,}4} \cdot \sqrt{8{,}4}}{\sqrt{0{,}06}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{1{,}4} \cdot \sqrt{8{,}4}}{\sqrt{0{,}06}} = \sqrt{\frac{1{,}4 \cdot 8{,}4}{0{,}06}} = \sqrt{\frac{1{,}4 \cdot 1{,}4}{0{,}01}} = \frac{1{,}4}{0{,}1} = 14.$$

Ответ: 14.

29. Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt{25\frac{3}{5}} - \sqrt{14\frac{2}{5}}\right) : \left(\sqrt{\frac{2}{45}}\right).$$

Решение.

$$\left(\sqrt{25\frac{3}{5}} - \sqrt{14\frac{2}{5}}\right) : \left(\sqrt{\frac{2}{45}}\right) = \left(\sqrt{\frac{128}{5}} - \sqrt{\frac{72}{5}}\right) : \left(\sqrt{\frac{2}{45}}\right) =$$

$$= \left(8\sqrt{\frac{2}{5}} - 6\sqrt{\frac{2}{5}}\right) : \left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = \left(2\sqrt{\frac{2}{5}}\right) : \left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = 2 : \frac{1}{3} = 6.$$

Ответ: 6.

30. Найдите значение выражения $\frac{(2\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}{4\sqrt{15} - 17}$.

Решение.

$$\frac{(2\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}{4\sqrt{15} - 17} = \frac{12 - 4\sqrt{15} + 5}{4\sqrt{15} - 17} = \frac{-4\sqrt{15} + 17}{4\sqrt{15} - 17} = -1.$$

Ответ: -1.

31. Найдите значение выражения $\sqrt{(a-5)^2} + \sqrt{(a-7)^2}$ при $5 < a < 7$.

Решение.

$\sqrt{(a-5)^2} + \sqrt{(a-7)^2} = |a-5| + |a-7|$. Так как $a > 5$, то $|a-5| = a-5$. Так как $a < 7$, то $|a-7| = 7-a$. Значит, $|a-5| + |a-7| = (a-5) + (7-a) = 7-5 = 2$.

Ответ: 2.

32. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{5}x\right)^2 \cdot \sqrt[5]{x^4}}{x^{2,8}}$ при $x > 0$.

Решение.

$$\frac{\left(\sqrt{5}x\right)^2 \cdot \sqrt[5]{x^4}}{x^{2,8}} = \frac{5x^2 \cdot x^{\frac{4}{5}}}{x^{2,8}} = 5x^{2+\frac{4}{5}-2,8} = 5x^{2+0,8-2,8} = 5x^0 = 5.$$

Ответ: 5.

33. Найдите значение выражения $\dfrac{17\sqrt[3]{\sqrt[18]{x}} - 8\sqrt[6]{\sqrt[9]{x}}}{3\sqrt{\sqrt[27]{x}}}$ при $x > 0$.

Решение.

$$\frac{17\sqrt[3]{\sqrt[18]{x}} - 8\sqrt[6]{\sqrt[9]{x}}}{3\sqrt{\sqrt[27]{x}}} = \frac{17\sqrt[3\cdot18]{x} - 8\sqrt[6\cdot9]{x}}{3\sqrt[2\cdot27]{x}} = \frac{17\sqrt[54]{x} - 8\sqrt[54]{x}}{3\sqrt[54]{x}} = \frac{9\sqrt[54]{x}}{3\sqrt[54]{x}} = 3.$$

Ответ: 3.

34. Найдите $\dfrac{f(3-x)}{f(3+x)}$, если $f(x) = \sqrt[3]{x(6-x)}$ при $|x| \neq 3$.

Решение.

$f(3-x) = \sqrt[3]{(3-x)(6-(3-x))} = \sqrt[3]{(3-x)(3+x)}$,

$f(3+x) = \sqrt[3]{(3+x)(6-(3+x))} = \sqrt[3]{(3+x)(3-x)} = f(3-x)$,

$\dfrac{f(3-x)}{f(3+x)} = 1$.

Ответ: 1.

Логарифмические выражения

① *Немного полезной информации*

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Тогда $a^{\log_a x} = x$.

Вспомним основные формулы.

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,\ y > 0;$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,\ y > 0;$$

$$\log_a(x^b) = b\log_a x; \quad \log_{a^b}(x) = \frac{1}{b}\log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}, \ x \neq 1.$$

Пусть $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$. Тогда $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

Задачи с решениями

35. Найдите значение выражения $\log_7 4{,}9 + \log_7 10$.

Решение.

$\log_7 4{,}9 + \log_7 10 = \log_7(4{,}9 \cdot 10) = \log_7 49 = \log_7(7^2) = 2.$

Ответ: 2.

36. Найдите значение выражения $6^{2\log_6 5}$.

Решение.

$6^{2\log_6 5} = 6^{\log_6 5^2} = 5^2 = 25.$

Ответ: 25.

37. Найдите значение выражения $8^{\log_2 3}$.

Решение.

$8^{\log_2 3} = \left(2^3\right)^{\log_2 3} = 2^{3\cdot\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^3 = 3^3 = 27.$

Ответ: 27.

38. Найдите значение выражения $\log_{0,25} 8$.

Решение.

$\log_{0,25} 8 = \log_{\frac{1}{4}} 8 = \log_{2^{-2}} 2^3 = \dfrac{1}{-2} \cdot 3\log_2 2 = -1{,}5.$

Ответ: $-1{,}5$.

39. Найдите значение выражения $\log_{16}\log_3 9$.

Решение.

$\log_{16}\log_3 9 = \log_{16} 2 = \log_{2^4} 2 = \dfrac{1}{4}\log_2 2 = \dfrac{1}{4} = 0{,}25.$

Ответ: 0,25.

40. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{15}} \sqrt{15}$.

Решение.

$\log_{\frac{1}{15}} \sqrt{15} = \log_{15^{-1}} 15^{0,5} = -1 \cdot 0{,}5 \cdot \log_{15} 15 = -0{,}5.$

Ответ: $-0{,}5$.

41. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_{25} 7}{\log_{625} 7}$.

Решение.

$$\frac{\log_{25} 7}{\log_{625} 7} = \frac{\log_{25} 7}{\log_{25^2} 7} = \frac{\log_{25} 7}{\frac{1}{2}\log_{25} 7} = 1 : \frac{1}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

42. Найдите значение выражения $\log_{11} 3 \cdot \log_9 11$.

Решение.

$$\log_{11} 3 \cdot \log_9 11 = \frac{\log_{11} 3}{\log_{11} 9} = \frac{\log_{11} 3}{\log_{11} 3^2} = \frac{\log_{11} 3}{2\log_{11} 3} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

43. Найдите значение выражения $105 \cdot \log_4 \sqrt[3]{4}$.

Решение.

$$105 \cdot \log_4 \sqrt[3]{4} = 105 \cdot \log_4 4^{\frac{1}{3}} = 105 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_4 4 = 35.$$

Ответ: 35.

44. Найдите значение выражения $(\log_2 32) \cdot (\log_3 27)$.

Решение.

$(\log_2 32) \cdot (\log_3 27) = (\log_2 2^5) \cdot (\log_3 3^3) = (5\log_2 2) \cdot (3\log_3 3) =$
$= 5 \cdot 3 = 15.$

Ответ: 15.

45. Найдите значение выражения $\dfrac{7^{\log_3 18}}{7^{\log_3 2}}$.

Решение.

$$\frac{7^{\log_3 18}}{7^{\log_3 2}} = 7^{\log_3 18 - \log_3 2} = 7^{\log_3 (18:2)} = 7^{\log_3 9} = 7^2 = 49.$$

Ответ: 49.

46. Найдите значение выражения $(1-\log_3 15)(1-\log_5 15)$.

Решение.

$$(1-\log_3 15)(1-\log_5 15) = (\log_3 3 - \log_3 15)(\log_5 5 - \log_5 15) =$$

$$= \left(\log_3 \frac{3}{15}\right)\left(\log_5 \frac{5}{15}\right) = \left(\log_3 \frac{1}{5}\right)\left(\log_5 \frac{1}{3}\right) = (-\log_3 5)(-\log_5 3) =$$

$$= \frac{1}{\log_5 3}\cdot \log_5 3 = 1.$$

Ответ: 1.

47. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_5 50}{2+\log_5 2}$.

Решение.

$$\frac{\log_5 50}{2+\log_5 2} = \frac{\log_5 50}{\log_5 25+\log_5 2} = \frac{\log_5 50}{\log_5(25\cdot 2)} = \frac{\log_5 50}{\log_5 50} = 1.$$

Ответ: 1.

48. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_7 4}{\log_7 5}+\log_5 0{,}25$.

Решение.

$$\frac{\log_7 4}{\log_7 5}+\log_5 0,25 = \log_5 4+\log_5 0{,}25 = \log_5(4\cdot 0{,}25) = \log_5 1 = 0.$$

Ответ: 0.

49. Найдите значение выражения $\log^3_{\sqrt{5}} 25$.

Решение.

$$\log^3_{\sqrt{5}} 25 = (\log_{\sqrt{5}} 25)^3 = \left(\log_{5^{0,5}} 5^2\right)^3 = \left(\frac{1}{0{,}5}\cdot 2\cdot \log_5 5\right)^3 = 4^3 = 64.$$

Ответ: 64.

Тригонометрические выражения

50. Найдите значение выражения $\dfrac{32(\sin^2 18^\circ-\cos^2 18^\circ)}{\cos 36^\circ}$.

Решение.

$$\frac{32(\sin^2 18^\circ-\cos^2 18^\circ)}{\cos 36^\circ} = \frac{-32(\cos^2 18^\circ-\sin^2 18^\circ)}{\cos 36^\circ} =$$

$$= \frac{-32(\cos 36^\circ)}{\cos 36^\circ} = -32.$$

Ответ: -32.

51. Найдите значение выражения $\dfrac{3\cos 35^\circ}{\sin 55^\circ}$.

Решение.

$$\frac{3\cos 35^\circ}{\sin 55^\circ} = \frac{3\cos 35^\circ}{\sin(90^\circ - 35^\circ)} = \frac{3\cos 35^\circ}{\cos 35^\circ} = 3.$$

Ответ: 3.

52. Найдите значение выражения $14\sqrt{6}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}$.

Решение.

$$14\sqrt{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = 14\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2} = 42.$$

Ответ: 42.

53. Найдите значение выражения $3\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6}\cos 7\pi$.

Решение.

$$3\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}\cos 7\pi = 3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(6\pi+\pi) = \frac{9}{2}\cos\pi = -\frac{9}{2} = -4{,}5.$$

Ответ: $-4{,}5$.

54. Найдите значение выражения $\dfrac{16}{\sin\left(-\dfrac{29\pi}{4}\right)\cos\dfrac{65\pi}{4}}$.

Решение.

$$\frac{16}{\sin\left(-\frac{29\pi}{4}\right)\cos\frac{65\pi}{4}} = -\frac{16}{\sin\frac{29\pi}{4}\cos\frac{65\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{16}{\sin\left(7\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(16\pi+\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= -\frac{16}{-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{16}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = 16 : \frac{1}{2} = 16\cdot 2 = 32.$$

Ответ: 32.

55. Найдите значение выражения $-5\sqrt{3}\cos(-390^\circ)$.

Решение.

$$-5\sqrt{3}\cos(-390°) = -5\sqrt{3}\cos(390°) = -5\sqrt{3}\cos(360° + 30°) =$$

$$= -5\sqrt{3}\cos 30° = -5\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-15}{2} = -7{,}5.$$

Ответ: $-7{,}5$.

56. Найдите значение выражения $4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-750°)$.

Решение.

$$4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-750°) = -4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(750°) = -4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(720° + 30°) =$$

$$= -4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,30° = -4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = -4.$$

Ответ: -4.

57. Найдите значение выражения $\dfrac{28\sin 316°}{\sin 44°}$.

Решение.

$$\frac{28\sin 316°}{\sin 44°} = \frac{28\sin(360° - 44°)}{\sin 44°} = \frac{28\sin(-44°)}{\sin 44°} =$$

$$= -\frac{28\sin 44°}{\sin 44°} = -28.$$

Ответ: -28.

58. Найдите значение выражения $\dfrac{12\,\mathrm{tg}\,168°}{\mathrm{tg}\,12°}$.

Решение.

$$\frac{12\,\mathrm{tg}\,168°}{\mathrm{tg}\,12°} = \frac{12\,\mathrm{tg}(180° - 12°)}{\mathrm{tg}\,12°} = \frac{12\,\mathrm{tg}(-12°)}{\mathrm{tg}\,12°} = -\frac{12\,\mathrm{tg}\,12°}{\mathrm{tg}\,12°} = -12.$$

Ответ: -12.

59. Найдите значение выражения $\dfrac{6}{\sin^2 22° + \sin^2 112°}$.

Решение.

$$\frac{6}{\sin^2 22° + \sin^2 112°} = \frac{6}{\sin^2 22° + \sin^2(90° + 22°)} =$$

$$= \frac{6}{\sin^2 22° + \cos^2(22°)} = 6.$$

Ответ: 6.

60. Найдите $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ и $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Решение.

$\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = 17 - 1 = 16$. Так как $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg}\alpha > 0$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{16} = 4$.

Ответ: 4.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $\left(3\frac{4}{5} + 1\frac{5}{6}\right) \cdot 3$.
2. Найдите значение выражения $\dfrac{2^{0,48}}{4^{1,24}}$.
3. Найдите значение выражения $(9x^2 + 4y^2 - (3x - 2y)^2) : xy$.
4. Найдите значение выражения $\dfrac{a^{2,35}}{a^{2,97} \cdot a^{1,38}}$ при $a = 2{,}5$.
5. Найдите значение выражения $3^{2+\log_3 5}$.
6. Найдите значение выражения $\log_2 \log_2 256$.
7. Найдите значение выражения $\dfrac{18(\sin^2 36^\circ - \cos^2 36^\circ)}{\cos 72^\circ}$.
8. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin\alpha \cdot (5\cos\alpha + 2)}{(10\cos\alpha + 4) \cdot \cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 5$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $3^{2\frac{1}{3}} \cdot 9^{1\frac{1}{3}}$.
2. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{2{,}1} \cdot \sqrt{1{,}4}}{\sqrt{6}}$.
3. Найдите значение выражения $\dfrac{x^{-8} \cdot x^6}{x^{-3}}$ при $x = 28$.
4. Найдите значение выражения $(9x^2 - 25) \cdot \left(\dfrac{1}{3x - 5} - \dfrac{1}{3x + 5}\right)$.
5. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_{10} 13}{\log_{10} \sqrt[7]{13}}$.

6. Найдите значение выражения $4^{\log_2 5}$.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{4\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$.

8. Найдите значение выражения $5\cos(\pi - \alpha) - 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\cos\alpha = -\dfrac{1}{4}$.

Вариант 3

1. Найдите значение выражения $5^8 \cdot 2^6 : 10^7$.

2. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3}}{\sqrt[12]{3}}\right)^2$.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{x^5 \cdot x^6}{x^9}$ при $x = 12$.

4. Найдите значение выражения $\dfrac{f(y)}{f\left(\frac{1}{y}\right)}$, если $f(y) = \left(2y - \frac{3}{y}\right)\left(3y - \frac{2}{y}\right)$.

5. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_2 57}{\log_8 57}$.

6. Найдите значение выражения $\log_5 0{,}5 + \log_5 50$.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{8}{\sin^2 35^\circ + \sin^2 125^\circ}$.

8. Найдите значение выражения $4\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$.

Вариант 4

1. Найдите значение выражения $77^8 : 11^7 : 7^6$.

2. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{2\frac{2}{5}} - \sqrt{5\frac{2}{5}}\right) : \sqrt{0{,}6}$.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{5} + \sqrt{7})^2}{6 + \sqrt{35}}$.

4. Найдите значение выражения
$(13 - 2x)(13 + 2x) + 4x^2 + 5x - 69$ при $x = 68$.

5. Найдите значение выражения $\log_3 8 \cdot \log_2 27$.

6. Найдите значение выражения $5^{\log_{25} 64}$.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{8\sin 13^\circ}{\sin 347^\circ}$.

8. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\dfrac{3\cos\alpha + 2\sin\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha} = 1{,}6$.

Вариант 5

1. Найдите значение выражения $\sqrt{565^2 - 452^2}$.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}$.

3. Найдите $2g(y) - 10y + 3$, если $g(y) = 5y - 7$.

4. Найдите значение выражения $\dfrac{(8x)^2 - 8x}{8x^2 - x}$.

5. Найдите значение выражения $38\log_{25}\sqrt{5}$.

6. Найдите значение выражения $\dfrac{7}{3^{\log_3 8}}$.

7. Найдите значение выражения $\sqrt{3}\operatorname{tg} 750^\circ$.

8. Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + 3\cos(\pi + \beta)}{\cos(\beta - \pi)}$.

Производная и исследование функций (B9)

Диагностическая работа

1. Прямая $y = 4x + 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 2x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 50 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. В какой точке отрезка $[-7; -2]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

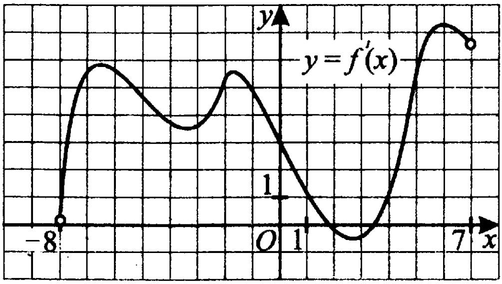


Рис. 50.

3. На рисунке 51 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.

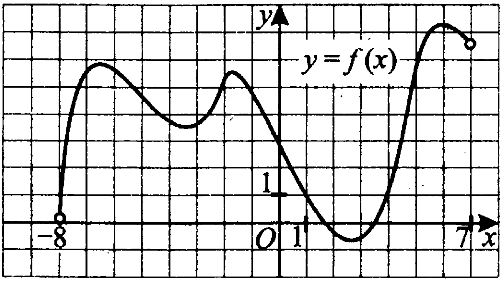


Рис. 51.

4. На рисунке 52 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 4)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 14$ или совпадает с ней.

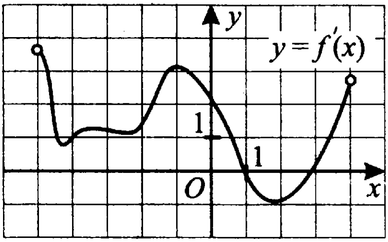


Рис. 52.

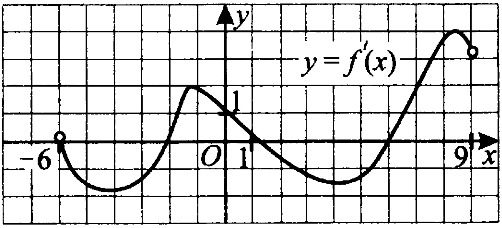


Рис. 53.

5. На рисунке 53 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-4; 4]$.

6. На рисунке 54 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

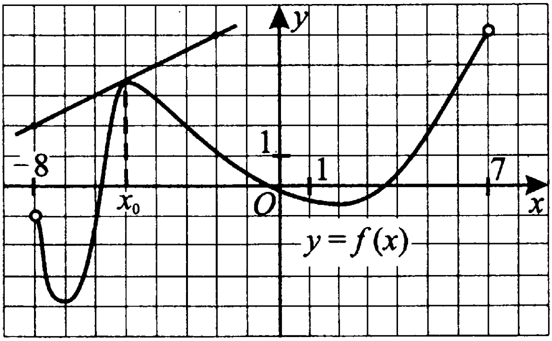


Рис. 54.

7. На рисунке 55 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - 4$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

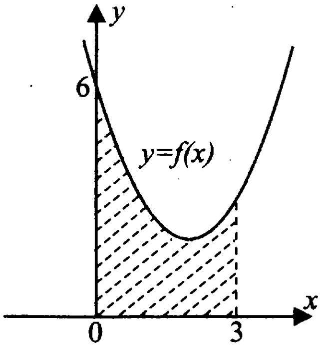


Рис. 55.

Понятие производной

Немного полезной информации

Производная определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю. Функцию, имеющую производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в этой точке). Процесс вычисления производной называется дифференцированием. Производная функции также является функцией.

Производной функции в точке называют число, равное пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при стремящемся к нулю приращении аргумента.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим рисунок 56. Здесь $\Delta x = x - x_0$ — это приращение (изменение) аргумента, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ — приращение функции.

По определению производной

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

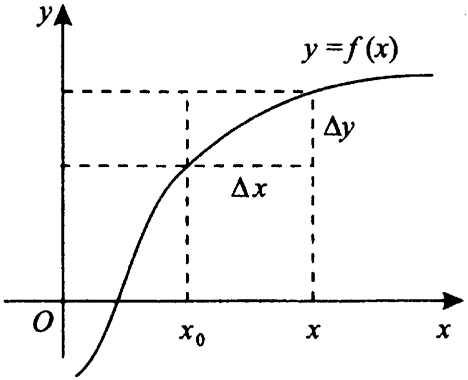


Рис. 56.

Производные некоторых элементарных функций

$$(c)' = 0, \text{ где } c = const;$$
$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \text{ где } \alpha = const;$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$
$$(\sin x)' = \cos x;$$
$$(\cos x)' = -\sin x;$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(a^x)' = a^x \ln a;$$
$$(e^x)' = e^x;$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Правила дифференцирования

$$(c \cdot u)' = c \cdot u', \ c - const;$$
$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$
$$y = f\big(g(x)\big),\ \ y' = f'_u(u) \cdot g'_x(x),\ \text{где}\ \ u = g(x).$$

Геометрический смысл производной

Значение производной функции в точке $x = x_0$ равно угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в точке с абсциссой x_0. Нужно помнить, что угловой коэффициент равен тангенсу угла наклона касательной (или, другими словами, тангенсу угла, образованного касательной и положительным направлением оси Ox).

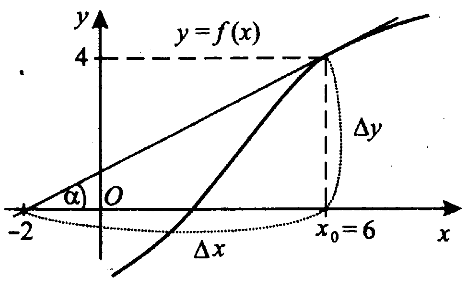


Рис. 57.

Например, на рисунке 57 $f'(x_0) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha = k_{\text{кас}}$.

Видим, что $\Delta y = 4,\ \Delta x = 8$. Тогда $f'(x_0) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4}{8} = 0{,}5$.

Обратите внимание, что Δy и Δx вместе с отрезком касательной образуют прямоугольный треугольник. Если в этом треугольнике мы разделим Δy на Δx, то получим абсолютное значение производной. Знак производной мы можем определить тремя способами.

1-й способ.

Если точка принадлежит промежутку возрастания функции, то значение производной в этой точке положительно, а если промежутку убывания, то значение производной отрицательно.

2-й способ.

Рассмотрим угол между касательной к графику функции в некоторой точке и осью абсцисс (это угол, отсчитываемый в положительном направлении — против часовой стрелки — от положительного направления оси Ox до касательной). Если угол острый, то значение производной в этой точке положительно, а если угол тупой, то значение производной в этой точке отрицательно.

3-й способ.

Возьмём координаты произвольной точки касательной (x_1, y_1). Теперь рассмотрим любую точку касательной, абсцисса которой x_2 больше, чем абсцисса первой точки. Если при этом и её ордината y_2 больше y_1, то производная положительна, если меньше — производная отрицательна.

Полезно знать, что угловые коэффициенты параллельных прямых равны и что прямая, параллельная оси абсцисс Ox, имеет угловой коэффициент, равный нулю.

Задачи с решениями

1. На рисунке 58 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

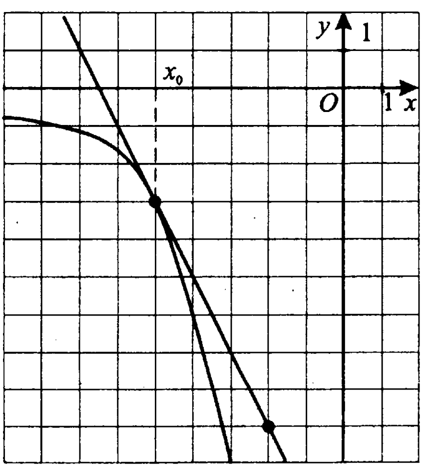


Рис. 58.

Решение.

По графику функции видно, что функция — убывающая, поэтому знак производной в точке касания — «минус». Выберем две точки касательной. Например, $(-2; -9)$ и $(-5; -3)$. Разность их абсцисс $\Delta x = 3$, разность ординат $\Delta y = 6$. Делим Δy на Δx, получаем $6 : 3 = 2$, ставим знак «$-$».

Ответ: -2.

Применение производной к исследованию функций

Разберём решение некоторых задач, связанных с геометрическим смыслом производной.

2. Прямая $y = 3x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 2x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Так как прямая $y = 3x - 5$ параллельна касательной, то угловой коэффициент касательной равен угловому коэффициенту прямой $y = 3x - 5$, то есть $k = 3$. Так как касательная проведена к графику функции $y = x^2 + 2x - 7$, то значение производной в точке касания равно значению углового коэффициента касательной, то есть $y'(x) = 3$.

Найдём производную функции $y = x^2 + 2x - 7$.

$y'(x) = (x^2 + 2x - 7)' = 2x + 2$. Из равенства $y'(x) = 3$ можно найти абсциссу точки касания. $2x + 2 = 3$; $2x = 1$; $x = 1 : 2$; $x = 0{,}5$.

Ответ: $x = 0{,}5$.

3. Прямая $y = -4x + 15$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 11$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания. Угловой коэффициент касательной $y = -4x + 15$ равен -4. Получим $y'(x) = -4$, где

$y'(x) = (x^3 + 3x^2 - 4x + 11)' = 3x^2 + 6x - 4$.

$3x^2 + 6x - 4 = -4$; $3x^2 + 6x = 0$; $3x(x + 2) = 0$, следовательно, $x = 0$, либо $x = -2$.

Мы получили два возможных значения для абсциссы точки касания. Выбрать одно из них можно, подставив найденные значения x в формулы функции и касательной. В точке касания значения функции и прямой должны совпасть.

При $x = 0$ $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 11 = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 11 = 11$;
$y_{\text{кас}} = -4x + 15 = -4 \cdot 0 + 15 = 15$.
$y(0) = 11$, $y_{\text{кас}}(0) = 15$.

Так как значения функции и касательной при $x = 0$ разные, абсцисса $x = 0$ нам не подходит.

Проверим при $x = -2$:
$y = x^3 + 3x^2 - 4x + 11 = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 11 =$
$-8 + 12 + 8 + 11 = 23$;
$y_{\text{кас}} = -4x + 15 = -4 \cdot (-2) + 15 = 8 + 15 = 23$.

Значения функции и касательной при $x = -2$ равны, значит, абсцисса точки касания $x = -2$.

Ответ: -2.

4. На рисунке 59 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Определите количество целых точек на этом интервале, в которых производная функции $f(x)$ положительна.

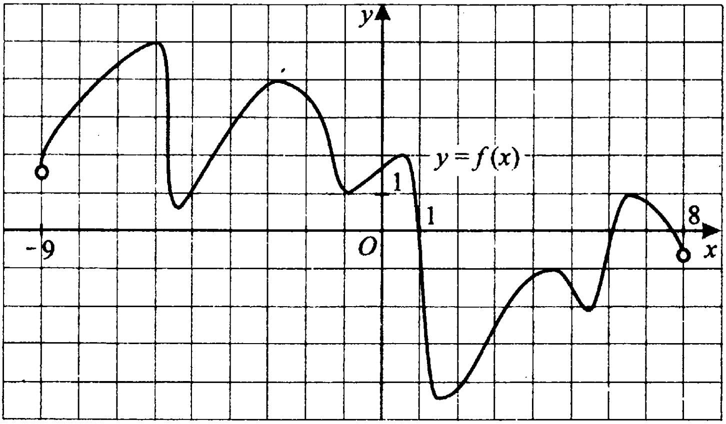


Рис. 59.

Решение.

Целые точки — это точки с целочисленными значениями абсцисс (x). Производная функции $f(x)$ положительна, если функция возрастает.

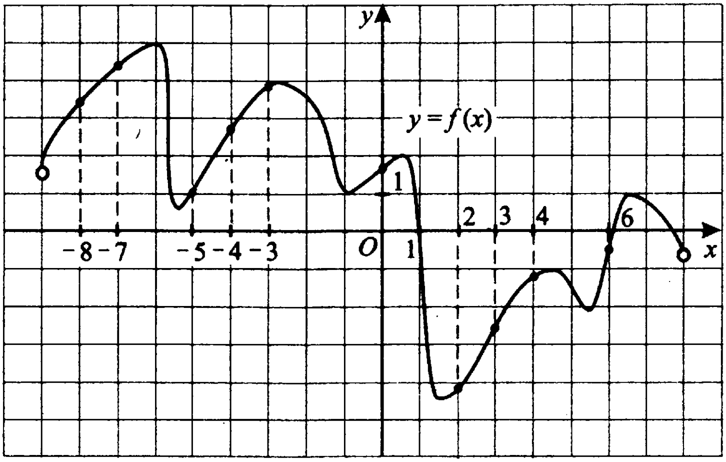


Рис. 60.

На рисунке 60 отмечены точки, принадлежащие промежуткам возрастания, в которых производная функции $f(x)$ положительна. Это точки -8; -7; -5; -4; -3; 0; 2; 3; 4; 6. Количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна, равно 10.

Ответ: 10.

5. На рисунке 59 изображён график функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. В какой точке отрезка $[-8; -4]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?

Решение.

Определяем на графике точку, у которой абсцисса x лежит на отрезке $[-8, -4]$, а ордината y наибольшая из возможных, то есть эта точка «самая высокая». Для данного графика это точка $(-6; 5)$. Значит, $f(x)$ принимает наибольшее значение в точке $x = -6$.

Ответ: -6.

6. На рисунке 59 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Найдите количество точек на отрезке $[-8; 3]$, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 3$.

Решение.

Нарисуем прямую $y = 3$ (см. рис. 61). Посчитаем количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 3$. По рисунку видно, что число таких точек равно 6.

Ответ: 6.

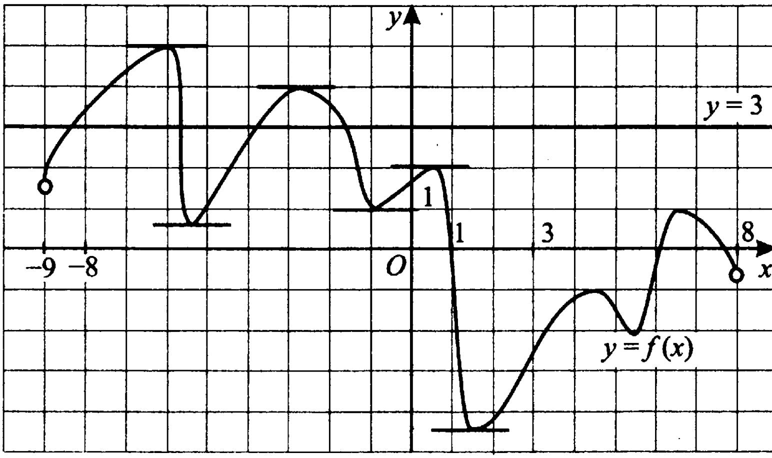


Рис. 61.

7. На рисунке 62 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 10)$. Найдите сумму точек экстремума функции $y = f(x)$.

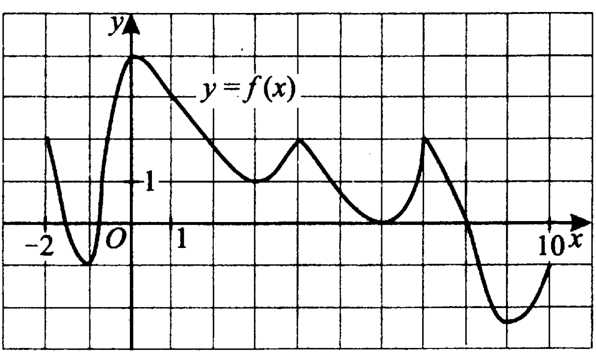


Рис. 62.

Решение.

На рисунке 62 изображён график функции $y = f(x)$. Говоря образно, точки экстремума — это те значения x, при которых на графике видны «горбики» и «впадинки». Видим, что точками экстремума данной функции являются точки $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 6$, $x = 7$ и $x = 9$. Сумма точек экстремума функции $y = f(x)$ равна $-1+0+3+4+6+7+9 = 28$.

Ответ: 28.

Теперь разберём несколько задач, в которых дан график производной функции.

8. На рисунке 63 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-7{,}5; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней.

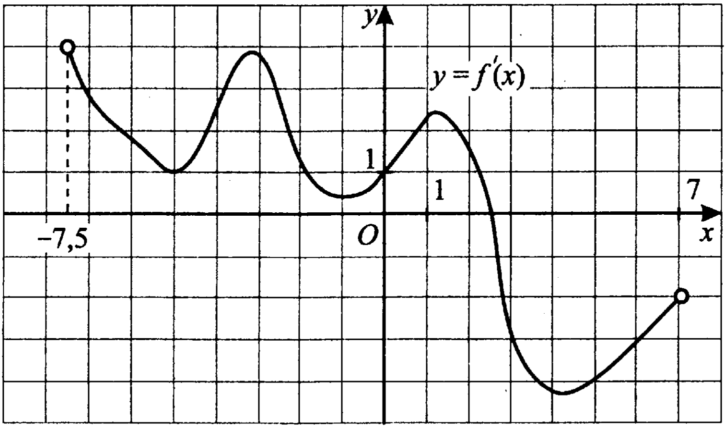


Рис. 63.

Решение.

Касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x+1$ или совпадает с ней, если её угловой коэффициент $k = 1$. Но значение углового коэффициента касательной равно значению производной в точке касания, то есть нам нужно найти точки, в которых производная $f'(x) = 1$. Построим прямую $y = 1$, параллельную оси Ox (см. рис. 64 на с. 166). Видим, что прямая и график функции имеют 4 общие точки. Это и значит, что $f'(x) = 1$ в этих четырёх точках, и в них касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней.

Ответ: 4.

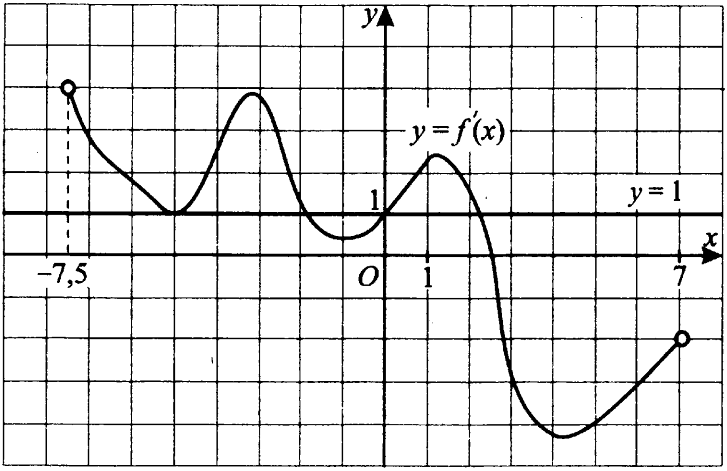


Рис. 64.

9. На рисунке 63 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-7{,}5; 7)$. Найдите промежутки возрастания функции. В ответе запишите количество целых точек, входящих в эти промежутки.

Решение.

Функция возрастает на промежутках, в которых её производная положительна. Найдём те целые точки на графике, в которых производная положительна (лежит выше оси абсцисс Ox). Видим, что эти точки лежат в интервале от $-7{,}5$ до $2{,}5$. Целых среди них 10.

Ответ: 10.

10. На рисунке 63 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на отрезке $(-7{,}5; 7)$. В какой точке отрезка $[-5; -2]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

Решение.

На отрезке $[-5; -2]$ производная функции $y = f'(x)$ положительна, следовательно, $f(x)$ на этом отрезке возрастает и принимает наименьшее значение на левом конце отрезка (или, другими словами, при наименьшем значении x). В данном случае это $x = -5$.

Ответ: -5.

11. На рисунке 65 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-4; 3]$.

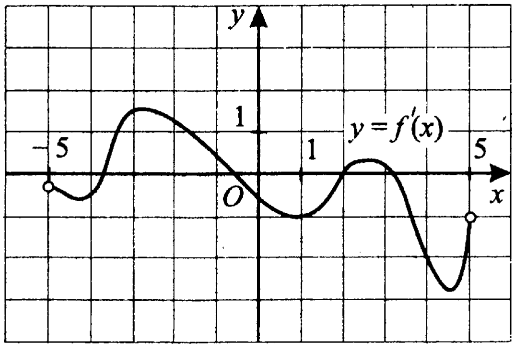


Рис. 65.

Решение.

Точка является точкой экстремума непрерывной функции, если при прохождении через эту точку производная меняет знак, то есть график производной пересекает ось абсцисс Ox. Производная функции $y = f'(x)$ на отрезке $[-4; 3]$ меняет знак три раза, поэтому количество точек экстремума функции $y = f(x)$ на данном промежутке равно 3.

Ответ: 3.

12. На рисунке 66 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите точку максимума функции $y = f(x)$ на интервале $(-3; 3)$.

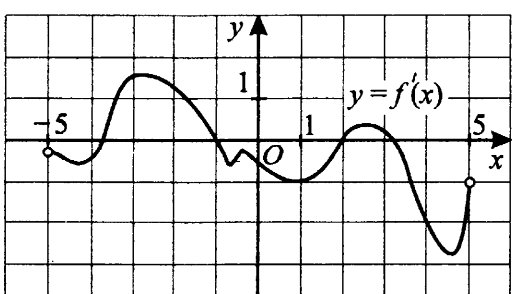


Рис. 66.

Решение.

Точка является точкой экстремума непрерывной функции, если при прохождении через неё знак производной меняется, то есть график производной пересекает ось абсцисс Ox. Таких точек на интервале $(-3; 3)$ две: $x = -1$ и $x = 2$.

Точка является точкой максимума непрерывной функции, если при прохождении через эту точку знак производной меняется с «+» на «−». В данном случае точкой максимума является точка $x = -1$ (см. рис. 67).

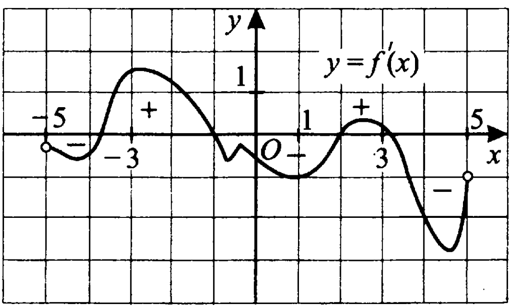


Рис. 67.

Ответ: -1.

13. На рисунке 66 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите промежутки возрастания функции $y = f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Решение.

Расставим знаки производной (см. рис. 67) и выберем промежутки, где производная положительна (на них функция возрастает). К точкам возрастания функции относятся также концы этих промежутков.

Видим, что целые точки, входящие в промежутки возрастания, — это $-3, -2, -1, 2$ и 3. Их сумма равна -1.

Ответ: -2.

14. На рисунке 68 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-2; 16)$. Найдите промежутки убывания функции $y = f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

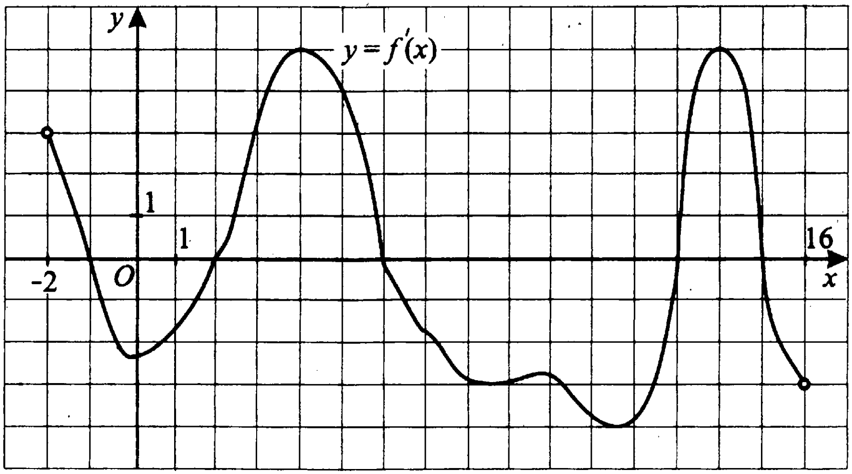


Рис. 68.

Решение.

Расставим знаки производной (см. рис. 69) и выберем промежутки, где производная отрицательна (на них функция убывает). Это и будут промежутки убывания: $[-1; 2]$, $[6; 13]$, $[15; 16)$. Длина наибольшего из них равна $13 - 6 = 7$.

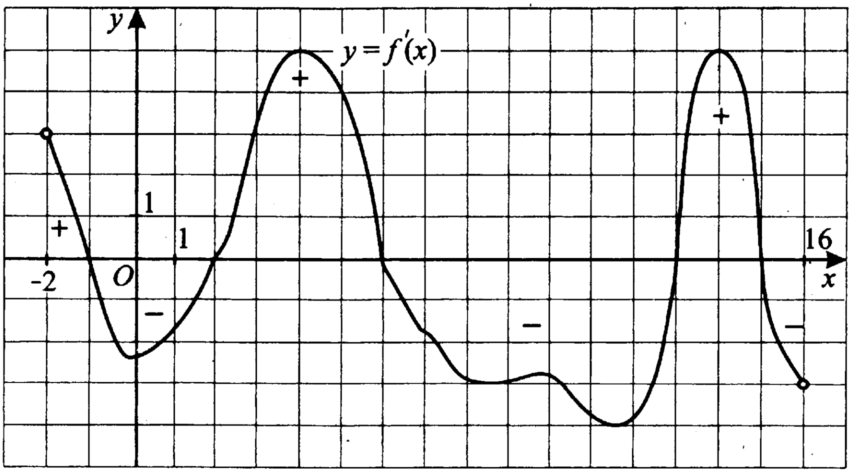


Рис. 69.

Ответ: 7.

15. На рисунке 70 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -1, 1, 2, 4, 6. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

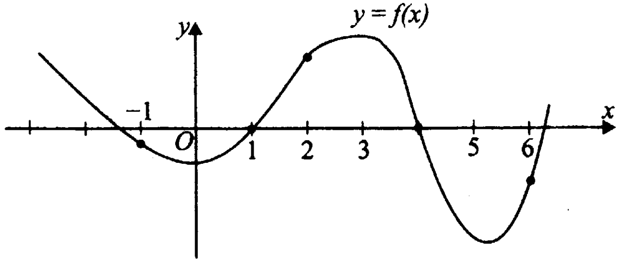


Рис. 70.

Решение.

Значение производной в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в точке с абсциссой x_0. $f'(x)$ наименьшее в точке, в которой касательная образует самый маленький тупой угол с осью Ox («горка» в этом месте на вид «самая крутая»). Проведём касательные в заданных точках (см. рис. 71). Тупые углы (а значит, $f'(x) < 0$) в точках $x = -1$ и $x = 4$. $\alpha < \beta$, значит, наименьшая производная в точке 4.

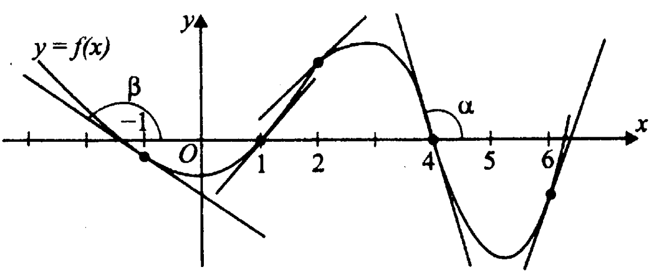


Рис. 71.

Ответ: 4

Первообразная

① *Немного полезной информации*

Пусть $f(x)$ — некоторая функция, заданная на числовом промежутке A. Если функция $F(x)$ такова, что для любого x из промежутка A

выполняется $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется **первообразной функцией** для функции $f(x)$.

Две первообразные для одной и той же функции отличаются на постоянную величину. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то при любом числе C функция $F(x) + C$ тоже будет первообразной для $f(x)$.

Все графики первообразных для одной и той же функции $f(x)$ получаются друг из друга сдвигом вдоль оси Oy (см. рис. 72).

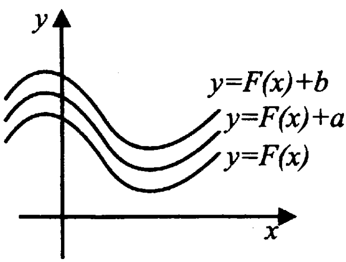


Рис. 72.

Процесс отыскания функции по заданной производной называют **интегрированием**.

Как проверить, правильно ли мы нашли первообразную для данной функции? Нужно найти производную от найденной первообразной. Например, $y = \frac{1}{3}x^3 + 5$ является первообразной функции $y = x^2$, потому что $\left(\frac{1}{3}x^3 + 5\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 0 = x^2$.

Задачи с решениями

16. На рисунке 73 изображён график функции $y = F(x)$, где $F(x)$ — первообразная функции $y = f(x)$.

Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 те, в которых функция $f(x)$ положительна. В ответе запишите количество найденных точек.

Решение.

Функция $f(x)$ является производной функции $F(x)$, поэтому $f(x) > 0$ на всех интервалах, где $F(x)$ возрастает. Находим по рисунку, какие точки принадлежат промежуткам возрастания $F(x)$ (исключая концы проме-

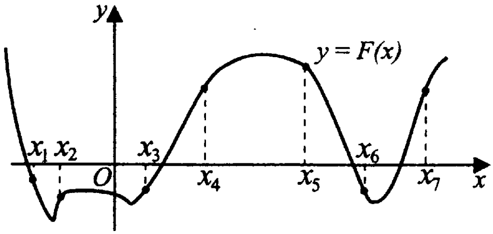


Рис. 73.

жутков, где $F'(x) = f(x) = 0$). Это точки x_2, x_3, x_4, x_7 — их количество равно 4.

Ответ: 4.

Площадь криволинейной трапеции и определённый интеграл

Немного полезной информации

На рисунке 74 изображена фигура, ограниченная снизу отрезком $[a; b]$, с боков отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, принимающей неотрицательные значения. Такую фигуру называют криволинейной трапецией, отрезок $[a;\ b]$ — её основанием.

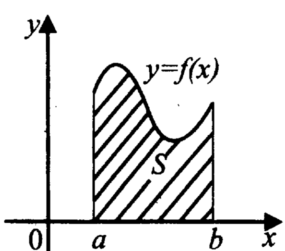


Рис. 74.

Площадь S криволинейной трапеции можно вычислить с помощью первообразной функции по формуле $S = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

Разность $F(b) - F(a)$ равна **определённому интегралу** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$, обозначаемому так: $\int\limits_a^b f(x)dx$ (читают: «интеграл от a до b эф от икс дэ икс»).

Можно написать формулу для площади криволинейной трапеции следующим образом: $S = \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. В этом состоит геометрический смысл определённого интеграла. Отметим, что формула $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ справедлива для функций любых знаков, а не только для неотрицательных.

Задачи с решениями

17. На рисунке 75 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна $F(x) = \frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 1$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

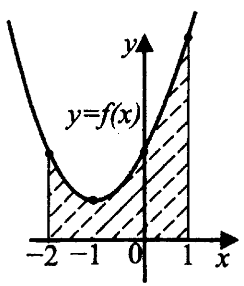


Рис. 75.

Решение.

Криволинейная трапеция на рисунке 75 ограничена отрезками прямых $x = -2$ и $x = 1$ и графиком функции $y = f(x)$. Для вычисления площади фигуры используем формулу $S = F(b) - F(a)$, в нашем случае $a = -2$, $b = 1$.

$$S = F(1) - F(-2) = \frac{2 \cdot 1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 -$$

$$- \left(\frac{2 \cdot (-2)^3}{3} + 2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 1\right) =$$

$$= \frac{2}{3} + 2 + 3 - 1 - \left(-\frac{16}{3} + 8 - 6 - 1\right) = \frac{2}{3} + \frac{16}{3} + 4 - 1 =$$

$$= \frac{18}{3} + 3 = 6 + 3 = 9.$$

Ответ: 9.

18. На рисунке 76 изображён график функции $y = f(x) = 5 - |x+1| - |x-2|$. Пользуясь рисунком, вычислите определённый интеграл $\int\limits_{-1}^{3} f(x)dx$.

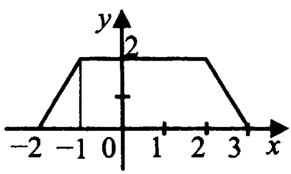


Рис. 76.

Решение.

Найдём определённый интеграл, посчитав площадь трапеции $ABCD$ (см. рис. 77)

$$\int\limits_{-1}^{3} f(x)dx = S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BA = \frac{3+4}{2} \cdot 2 = 7.$$

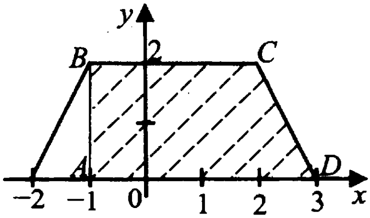


Рис. 77.

Ответ: 7.

19. На рисунке 78 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5;\ 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $F(x)$, которая является первообразной для функции $f(x)$, параллельна прямой $y = 3x + 8$ или совпадает с ней.

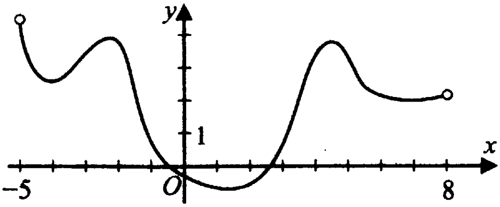


Рис. 78.

Решение.

Функция $y = f(x)$ является производной для $F(x)$, то есть $f(x) = F'(x)$. Значение углового коэффициента касательной равно значению производной в точке касания, то есть $f(x) = F'(x) = 3$. Проведём прямую $y = 3$, параллельную оси Ox (см. рис. 79). Она пересекает график в 5 точках. В этих точках касательная к графику функции $y = F(x)$ параллельна прямой $y = 3x + 8$ или совпадает с ней.

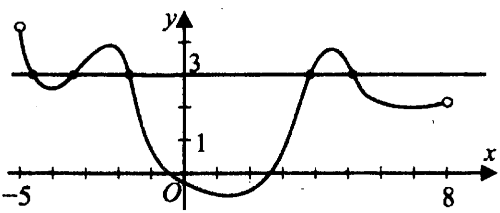


Рис. 79.

Ответ: 5.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Прямая $y = 2x - 7$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 6x^2 + 2x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 80 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 13$.

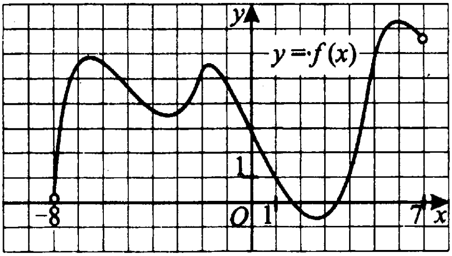


Рис. 80.

3. На рисунке 81 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 4x - 7$ или совпадает с ней.

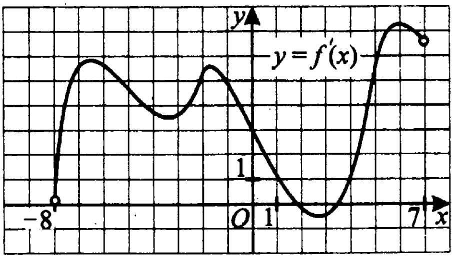


Рис. 81.

4. На рисунке 82 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. В какой точке отрезка $[-1; 7]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?

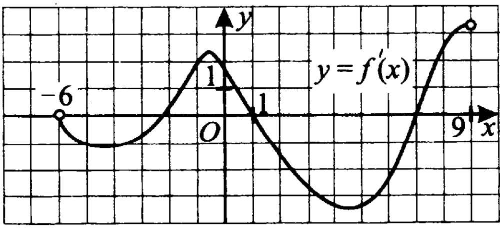


Рис. 82.

5. На рисунке 83 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-5; 8]$.

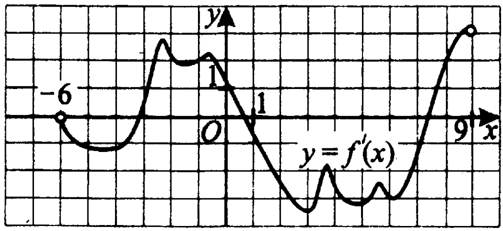


Рис. 83.

6. На рисунке 84 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

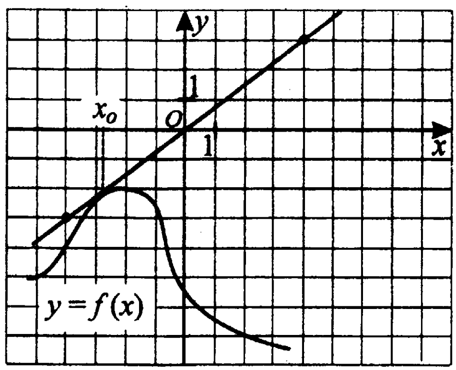


Рис. 84.

7. На рисунке 85 изображён график некоторой функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $(0; +\infty)$. Одна из первообразных этой функции равна $F(x) = \frac{-3}{x^2} + 2x - 3$.

Найдите площадь заштрихованной фигуры.

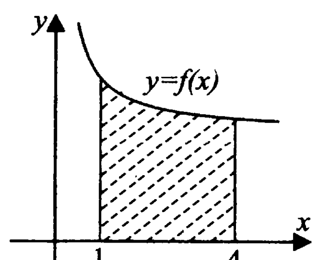


Рис. 85.

Вариант 2

1. Прямая $y = 47x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 7x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 86 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 5)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.

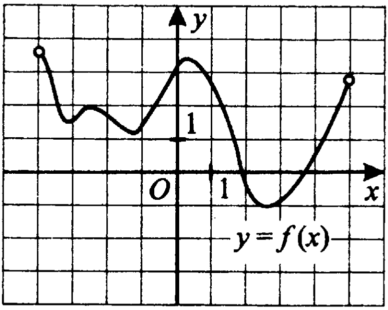


Рис. 86.

3. На рисунке 87 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 4)$. В какой точке отрезка $[-4; 1]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?

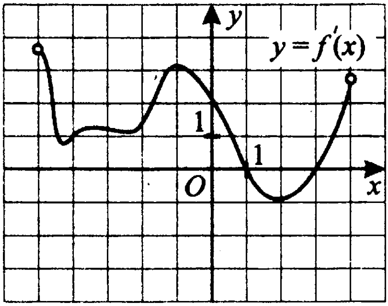


Рис. 87.

4. На рисунке 88 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 12$.

5. На рисунке 89 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

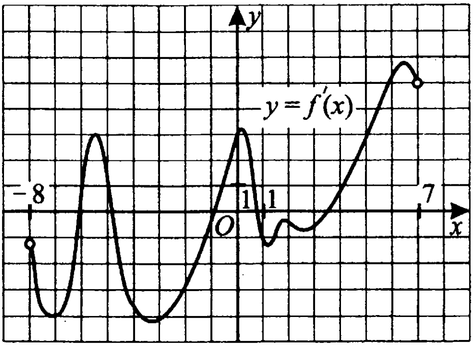


Рис. 88.

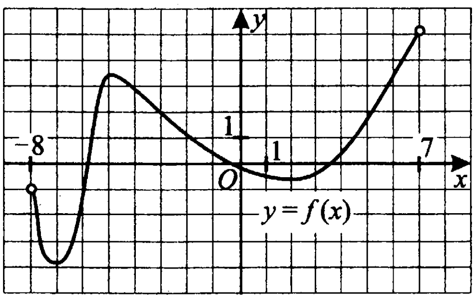


Рис. 89.

6. На рисунке 90 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

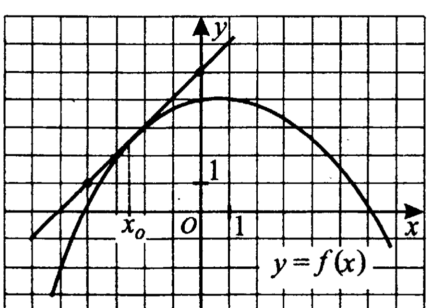


Рис. 90.

7. На рисунке 91 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определённый интеграл $\int\limits_{-1}^{3} f(x)dx$.

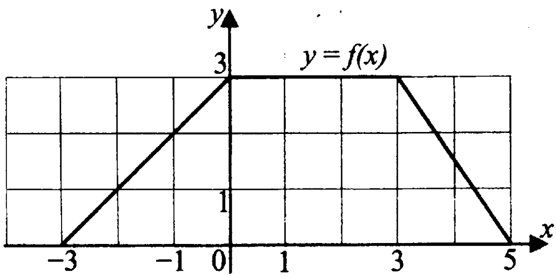


Рис. 91.

Вариант 3

1. Прямая $y = 3x + 14$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 6x^2 + 3x - 18$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 92 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

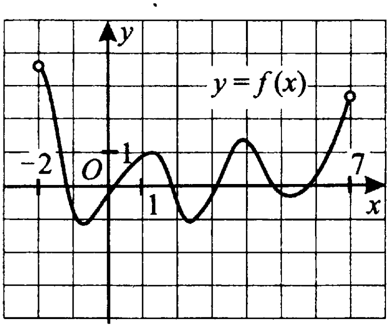


Рис. 92.

3. На рисунке 93 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. В какой точке отрезка $[-6; 1]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

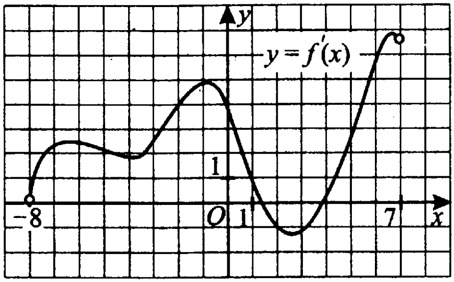


Рис. 93.

4. На рисунке 94 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

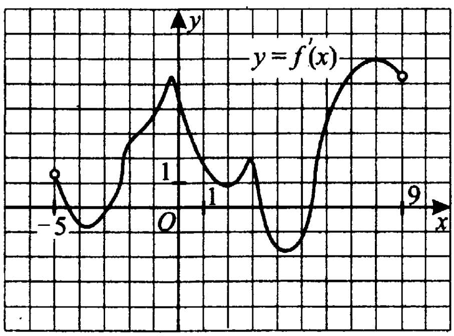


Рис. 94.

5. На рисунке 95 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 4)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$ на интервале $(-5; 4)$.

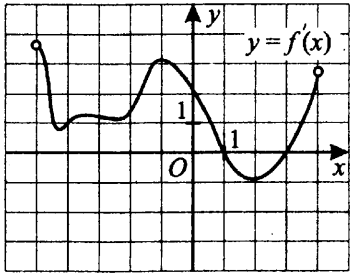


Рис. 95.

6. На рисунке 96 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

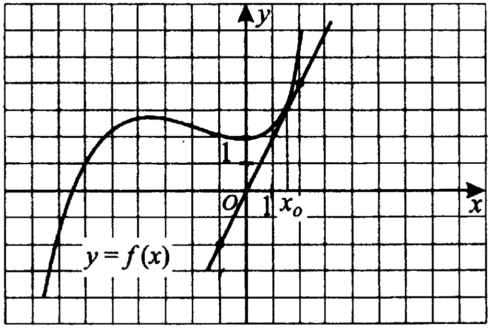


Рис. 96.

7. На рисунке 97 изображён график функции $y = F(x)$, которая является одной из первообразных функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определённый интеграл $\int\limits_{-3}^{6} f(x)dx$.

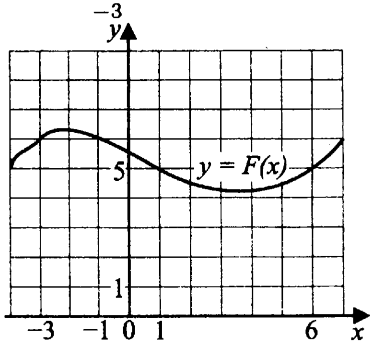


Рис. 97.

Вариант 4

1. Прямая $y = -3x + 2$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 8x + 1$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 98 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

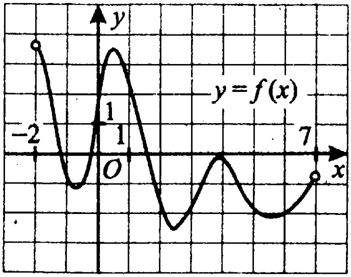


Рис. 98.

3. На рисунке 99 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 5)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

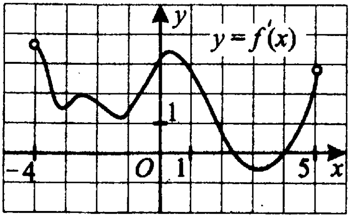


Рис. 99.

4. На рисунке 100 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

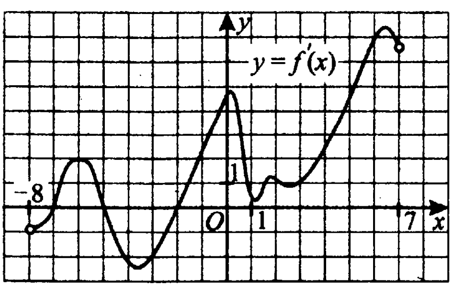


Рис. 100.

5. На рисунке 101 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$.

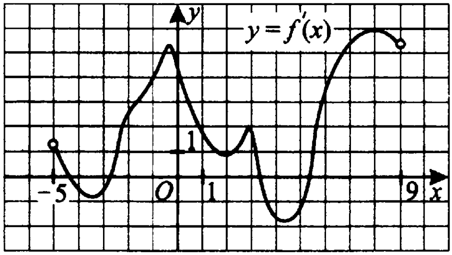


Рис. 101.

Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

6. На рисунке 102 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

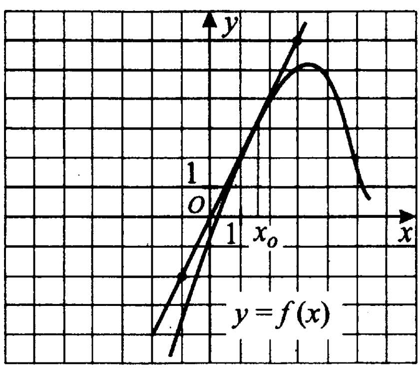


Рис. 102.

7. На рисунке 103 изображён график функции $y = F(x)$, где $F(x)$ — первообразная функции $y = f(x)$. Найдите количество точек на промежутке $[-5; 8]$, в которых функция $f(x)$ равна нулю.

Вариант 5

1. Прямая $y = -5x + 19$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 18$. Найдите абсциссу точки касания.

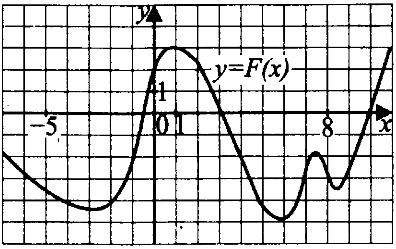


Рис. 103.

2. На рисунке 104 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -3$.

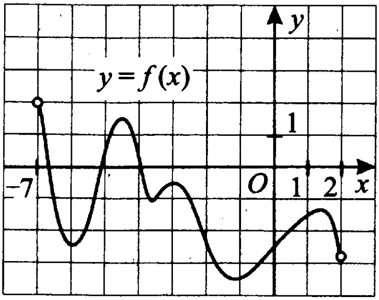


Рис. 104.

3. На рисунке 105 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

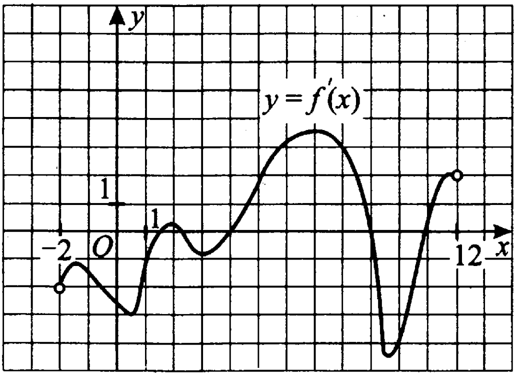


Рис. 105.

4. На рисунке 106 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 15$ или совпадает с ней.

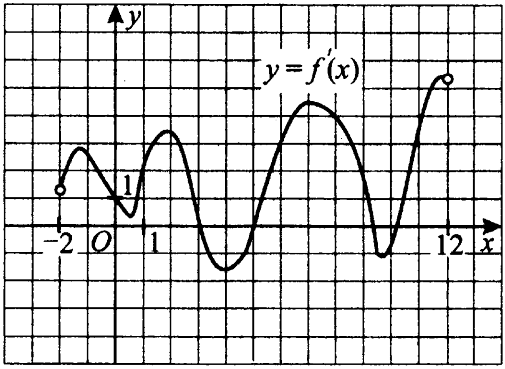


Рис. 106.

5. На рисунке 107 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 5)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-4; 5)$.

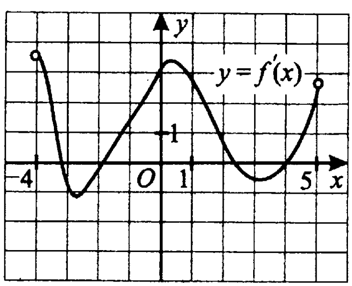


Рис. 107.

6. На рисунке 108 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

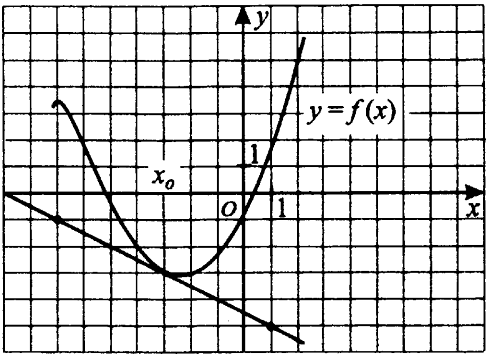


Рис. 108.

7. На рисунке 109 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8;\ 10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $F(x)$, которая является первообразной функции $f(x)$, параллельна прямой $y = 8 - 5x$ или совпадает с ней.

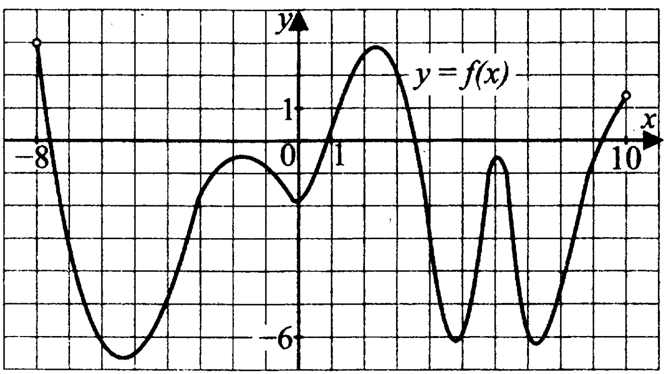


Рис. 109.

Вариант 6

1. На рисунке 110 изображён график функции $y = f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

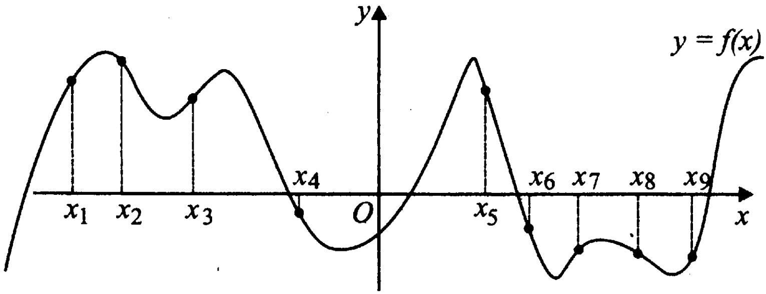


Рис. 110.

2. На рисунке 111 изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?

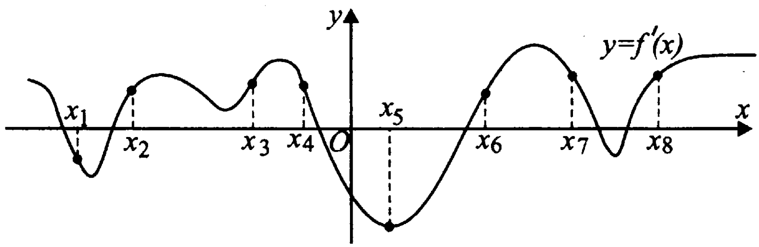


Рис. 111.

3. На рисунке 112 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-5, -4, -2, -1, 1, 3$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

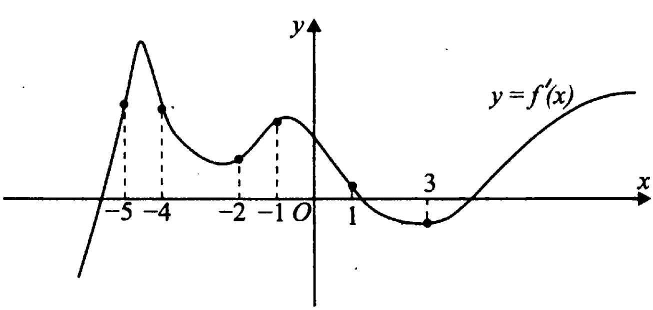


Рис. 112.

4. На рисунке 113 изображён график функции $y = F(x)$, одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на интервале $(-7; 5)$.

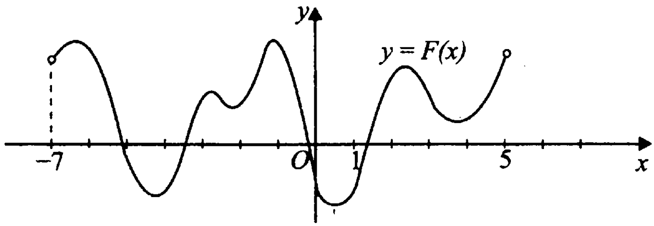


Рис. 113.

5. На рисунке 114 изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(-3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

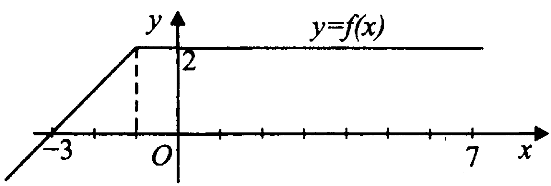


Рис. 114.

6. На рисунке 115 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 - 15x^2 + 78x - \frac{12}{5}$ является одной из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

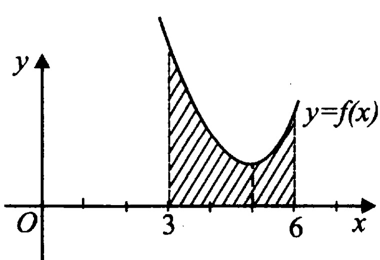


Рис. 115.

7. На рисунке 116 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -2x^3 + 51x^2 - 420x + 14$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

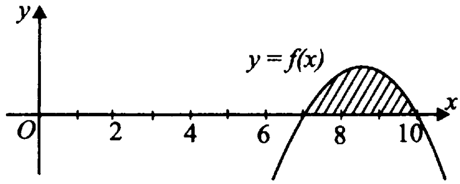


Рис. 116.

Вариант 7

1. На рисунке 117 изображён график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

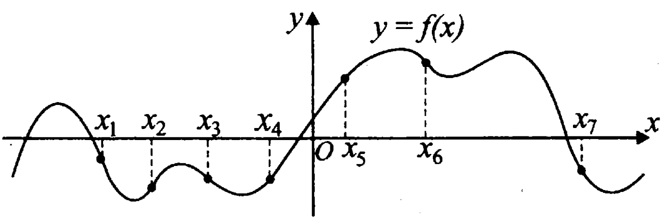


Рис. 117.

2. На рисунке 118 изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции $f(x)$?

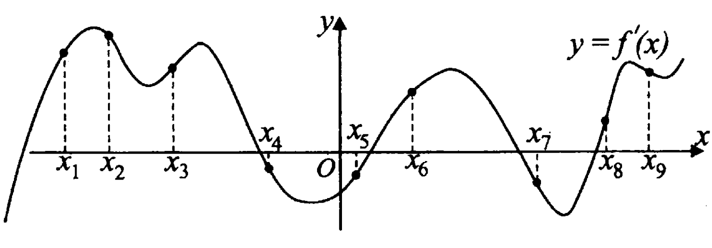


Рис. 118.

3. На рисунке 119 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -3, -2, -1, 1, 2, 3. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

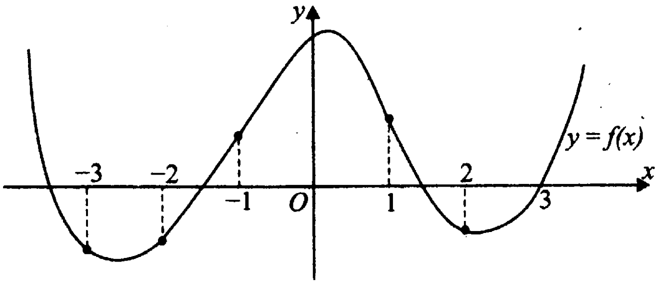


Рис. 119.

4. На рисунке 120 изображён график функции $y = F(x)$, одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 6)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-4; 5]$.

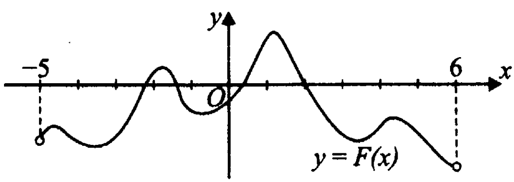


Рис. 120.

5. На рисунке 121 изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(1) - F(-7)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

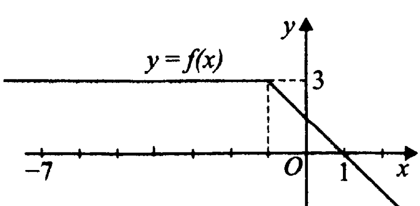


Рис. 121.

6. На рисунке 122 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 - 9x^2 + 29x + \dfrac{4}{17}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

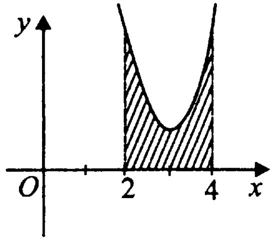


Рис. 122.

7. На рисунке 123 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -\dfrac{x^3}{4} + 6x^2 - 45x + 64$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

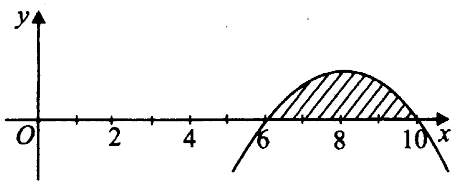


Рис. 123.

Прикладные задачи (B12)

Диагностическая работа

1. Для одного из предприятий зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 550-30n$. Определите наименьший уровень цены n (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц ($h = q \cdot n$) составит не менее 2480 тыс. руб.

2. В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После того как кран открыли, вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $h(t) = 8{,}95-3{,}36t+0{,}314t^2$, где t — время в минутах. В течение какого времени вода будет вытекать из бака?

3. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задаётся выражением $T(t) = T_0 + xt + yt^2$, где $T_0 = 140\,\text{К}$, $x = 60\,\text{К/мин}$, $y = -0{,}25\,\text{К/мин}^2$. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1240 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время (в минутах) после начала работы нужно отключать прибор.

4. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не менее 60%, если температура холодильника $T_2 = 180°$?

Решение прикладных задач

Немного полезной информации

В заданиях данного типа рассматриваются реальные процессы, в которых необходимо найти нужный результат по заданной функции и начальным условиям или конкретным значениям входящих в формулу параметров. Все формулы для этих заданий взяты либо из школьного курса физики, либо из экономических дисциплин. В зависимости от условия составляется или уравнение, или неравенство относительно значений функции. В большинстве случаев получаются квадратные уравнения или неравенства. Реже — линейные. В уравнениях третьей и четвёртой степени, как правило, удаётся достаточно просто подобрать соответствующий корень. Решения упрощаются за счёт того, что в реальных процессах фигурируют в основном положительные величины. В идеале, конечно, надо стремиться понять физический смысл задачи, дать развёрнутый ответ, соответствующий тематике задания. Практически — достаточно получить конкретное число для внесения в бланк ответов.

Задачи с решениями

1. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In, оперативности Op, объективности публикаций Tr, а также качества сайта Q. Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 9-балльной шкале целыми числами от -4 до 4.

Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — всемеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{7In + Op + 3Tr + Q}{A}.$$

Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A, при котором это условие будет выполняться.

Решение.

Пусть по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, равную x, тогда рейтинг можно посчитать по формуле

$R = \dfrac{7In + Op + 3Tr + Q}{A} = \dfrac{7x + x + 3x + x}{A} = \dfrac{12x}{A}$. По условию, $R = x$, $\dfrac{12x}{A} = x$, $A = 12$.

Ответ: 12.

2. Коэффициент полезного действия теплового двигателя вычисляется по формуле $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 КПД двигателя будет не менее 75%, если температура холодильника $T_2 = 350$ K?

Решение.

1-й способ.

Составим и решим неравенство:

$$\eta \geqslant 75\%,$$

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\% \geqslant 75\%,$$

$$\frac{T_1 - 350}{T_1} \geqslant 0{,}75,$$

$$T_1 - 350 \geqslant 0{,}75T_1,$$

$$T_1 - 0{,}75T_1 \geqslant 350,$$

$$0{,}25T_1 \geqslant 350,$$

$$T_1 \geqslant 1400.$$

Итак, чтобы КПД данного теплового двигателя был не менее 75%, температура нагревателя должна быть не менее 1400 К.

Ответ: 1400.

2-й способ.

Подставим в формулу заданные значения и решим полученное уравнение при КПД, равном 75%. Если найденное значение будет единственным, неравенство составлять и решать не нужно.

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%,$$

$$75\% = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%,$$

$$75 = \frac{T_1 - 350}{T_1} \cdot 100.$$

Умножим обе части уравнения на T_1.

$$75T_1 = (T_1 - 350) \cdot 100,$$
$$75T_1 = 100T_1 - 35\,000,$$
$$35\,000 = 100T_1 - 75T_1,$$
$$25T_1 = 35\,000,$$
$$T_1 = 35\,000 : 25,$$
$$T_1 = 1400.$$

3. Зависимость объёма спроса на продукцию некоторой фирмы от цены продукции задаётся формулой $q(p) = 280 - 10p$, где p — цена (тыс. руб.), q — спрос (единиц в месяц). Определите максимальный уровень цены (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 960 тыс. руб.

Решение.

Составим функцию выручки предприятия, затем неравенство, соответствующее условию задачи.

$$r = q \cdot p = (280 - 10p)p.$$

По условию $r \geqslant 960$, поэтому

$$(280 - 10p)p \geqslant 960.$$

Решим квадратное неравенство:

$$280p - 10p^2 \geqslant 960,$$
$$-10p^2 + 280p - 960 \geqslant 0,$$
$$10p^2 - 280p + 960 \leqslant 0,$$
$$p^2 - 28p + 96 \leqslant 0,$$

$p_1 = 4$, $p_2 = 24 \Rightarrow p \in [4; 24]$, $p_{max} = 24$. То есть максимальный уровень цены, при котором выручка предприятия составит не менее 960 тыс. руб., равен 24 тыс. руб.

Ответ: 24.

4. Операционная прибыль предприятия за краткосрочный период вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p-v)-f$. Компания продаёт свою продукцию по цене $p = 400$ руб. за штуку, затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб. за штуку, постоянные расходы предприятия $f = 800\,000$ руб. в месяц. Определите наименьший месячный объём производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет не меньше 700 000 руб. в месяц.

Решение.

Найдём месячный объём производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет равна 700 000 руб. в месяц. Если такое значение будет единственным, неравенство составлять и решать не нужно.

1-й способ.

Выразим искомую величину сначала в общем виде, затем вычислим конкретное значение.

$$\pi = q(p-v) - f,$$
$$\pi + f = q(p-v),$$
$$q = \frac{\pi + f}{p - v} = \frac{700\,000 + 800\,000}{400 - 300} = \frac{1\,500\,000}{100} = 15\,000.$$

Итак, при наименьшем месячном объёме в 15 000 изделий прибыль предприятия будет составлять не менее 700 000 руб.

2-й способ.

Подставим в формулу заданные значения и решим полученное уравнение.

$$\pi = 700\,000, \quad f = 800\,000, \quad v = 300, \quad p = 400,$$
$$\pi = q(p-v) - f,$$
$$700\,000 = q(400 - 300) - 800\,000,$$
$$100q - 800\,000 = 700\,000,$$
$$100q = 1\,500\,000,$$
$$q = 1\,500\,000 : 100,$$
$$q = 15\,000.$$

Ответ: 15 000.

5. Высота столба жидкости в баке с открытым краном меняется по закону $H(t) = 1{,}28 - 0{,}8t + 0{,}125t^2$, где t — время в минутах, H — высота в метрах. Через сколько минут после открытия крана вода полностью вытечет из бака?

Решение.

Если вода вытекает полностью, то очевидно, что высота жидкости в баке равна нулю. Получаем $H = 0$, составляем и решаем квадратное уравнение:

$$H(t) = 0,$$
$$1{,}28 - 0{,}8t + 0{,}125t^2 = 0,$$
$$D = (0{,}8)^2 - 4 \cdot 0{,}125 \cdot 1{,}28 = 0,$$
$$t = \frac{-(-0{,}8)}{2 \cdot 0{,}125} = 3{,}2.$$

Итак, вода полностью вытекает из бака через 3,2 секунды после открытия крана.

Ответ: 3,2.

6. Зависимость температуры нагревательного элемента прибора от времени имеет вид $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 100$ K, $a = 37{,}5$ K/мин, $b = -0{,}25$ K/мин^2. Прибор может испортиться при температуре свыше 1000 K. Определите момент времени (в минутах), когда прибор необходимо отключить, чтобы он не вышел из строя.

Решение.

Зависимость температуры нагревательного элемента от времени имеет вид квадратичной функции. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вниз, так как коэффициент при t^2 отрицателен ($b = -0{,}25 < 0$). График процесса изменения температуры показан на рисунке 124.

Таким образом, температура 1000 K достигается дважды: первый раз на промежутке возрастания, второй — на промежутке убывания. Но реально до второго раза температура просто не дойдёт, так как прибор уже в момент времени t_1 выйдет из строя. Значит, наша цель — определить меньший корень квадратного уравнения:

$$100 + 37{,}5t - 0{,}25t^2 = 1000,$$
$$0{,}25t^2 - 37{,}5t + 900 = 0, \qquad \Big| \times 4$$

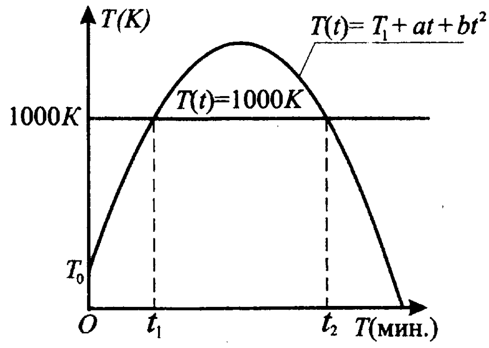


Рис. 124.

$$t^2 - 150t + 3600 = 0,$$
$$t_1 = 30, \quad t_2 = 120.$$

Следовательно, чтобы прибор не вышел из строя, его нужно выключить не позже чем через 30 минут после начала работы.

Ответ: 30.

7. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 70 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Чему равно наименьшее возможное сопротивление (в омах) этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление определяется формулой $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 21 Ом?

Решение.

В этой задаче главное — понять, что здесь обозначают переменные, входящие в формулу. Общее сопротивление должно быть не меньше 21 Ом, в формуле общее сопротивление обозначается R, $R \geqslant 21$. Приборы, общее сопротивление которых составляет 70 Ом и обозначается R_1, и электрообогреватель с сопротивлением R_2 подключены параллельно. Составим и решим неравенство:

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = R,$$

$$\frac{70R_2}{70 + R_2} \geqslant 21,$$

$$70R_2 \geqslant (70 + R_2) \cdot 21,$$

$$70R_2 \geqslant 1470 + 21R_2,$$

$$70R_2 - 21R_2 \geqslant 1470,$$

$$R_2 \geqslant 30.$$

Значит, для нормального функционирования данной электросети наименьшее возможное сопротивление электрообогревателя должно быть не менее 30 Ом.

Ответ: 30.

8. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \dfrac{1}{7} \cdot 10^{16}$ м^2, а излучаемая ею мощность P составляет $19{,}551 \cdot 10^{22}$ Вт. Определите температуру этой звезды.

Решение.

Выразим T^4 из формулы $P = \sigma S T^4$: $T^4 = \dfrac{P}{\sigma S}$.

Подставим заданные значения переменных:

$$T^4 = \frac{19{,}551 \cdot 10^{22}}{5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 10^{16}} = \frac{19{,}551}{5{,}7} \cdot 7 \cdot 10^{22+8-16} =$$

$$= 3{,}43 \cdot 7 \cdot 10^{14} = 343 \cdot 7 \cdot 10^{12} = 7^3 \cdot 7 \cdot 10^{12} = 7^4 \cdot 10^{12},$$

$$T = \sqrt[4]{7^4 \cdot 10^{12}} = 7 \cdot 10^3 = 7000.$$

Следовательно, температура данной звезды составляет 7000 K.

Ответ: 7000.

9. Изменение высоты полёта брошенного вертикально вверх мяча описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 30t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах). Сколько секунд мяч находился на высоте не менее 25 м?

Решение.

Составим и решим неравенство:

$h(t) \geqslant 25,$

$-5t^2 + 30t \geqslant 25,$

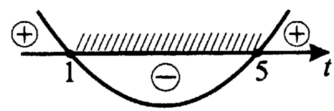
$t^2 - 6t \leqslant -5,$

$t^2 - 6t + 5 \leqslant 0,$

$t_1 = 1, t_2 = 5.$

$t \in [1; 5],$

$\Delta t = t_2 - t_1 = 4.$



Итак, на высоте не менее 25 м мяч находился в течение 4 секунд.

Ответ: 4.

10. При температуре $0\,°C$ рельс имеет длину $l_0 = 20$ м. При прокладке путей между рельсами оставили зазор в 6 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t°) = l_0(1 + \alpha t°)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ °C^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, $t°$ — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

Решение.

1-й способ.

Обозначим длину зазора через m и свяжем её с температурой. Затем определим значение температуры, при которой зазор станет равным нулю. Расстояние от начала одного рельса до начала следующего L складывается из длины рельса и зазора между рельсами. В исходном состоянии $L = l_0 + m_0$, после нагрева $L = l(t°) + m$. При $m = 0$ получим

$l(t°) = l_0 + m_0,$

$l_0 + m_0 = l_0(1 + \alpha t°), \qquad \Big|: l_0,$

$$1 + \frac{m_0}{l_0} = 1 + \alpha t°,$$

$$\alpha t° = \frac{m_0}{l_0},$$

$$t^\circ = \frac{m_0}{\alpha l_0},$$

$$t^\circ = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 20} = \frac{5}{20} \cdot 10^2 = 25^\circ.$$

Следовательно, при 25 °C каждый рельс удлинится на 6 мм и зазор между ними исчезнет.

Ответ: 25.

2-й способ.

Длина зазора станет равной нулю, если рельс станет длиннее на величину исходного зазора:

$$l(t^\circ) - l_0 = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$l_0(1 + \alpha t^\circ) - l_0 = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$20(1 + 1{,}2 \cdot 10^{-5} t^\circ) - 20 = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$20 + 20 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} t^\circ - 20 = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$20 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} t^\circ = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$t^\circ = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 20} = 25.$$

Ответ: 25.

11. Парашютисты-экстремалы определяют высоту сооружений для будущих прыжков, засекая время падения небольших камней с вершин сооружений до поверхности приземления. Приближённая зависимость высоты от времени свободного падения имеет вид $h = 4{,}9t^2$. Здесь h — высота в метрах, t — время в секундах. С вершины первого сооружения камень падал 4,5 с. На сколько метров второе сооружение выше первого, если с вершины второго сооружения камень падал на 1 с дольше?

Решение.

Составим выражение для определения разности высот и вычислим эту величину.

$$h_1 = 4{,}9t_1^2, \quad h_2 = 4{,}9t_2^2,$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = 4{,}9(t_2^2 - t_1^2) = 4{,}9(5{,}5^2 - 4{,}5^2) =$$
$$= 4{,}9(5{,}5 - 4{,}5)(5{,}5 + 4{,}5) = 49.$$

То есть второе сооружение выше первого на 49 м.

В этой задаче можно было сначала вычислить высоту каждого из зданий, а потом найти разность этих высот. Вычисления были бы немного более громоздкими, но ответ, конечно же, получился бы таким же.

Ответ: 49.

12. При вращении ведёрка с водой на верёвке в вертикальной плоскости сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории. В верхней точке сила давления равна $P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)$, где m — масса воды, v — скорость движения ведёрка, L — длина верёвки, g — ускорение свободного падения. С какой минимальной скоростью (в м/с) надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась из него, если длина верёвки равна 90 см? (g считать равным 10 м/с^2.)

Решение.

Приведём данные к требуемым единицам измерения: 90 см = 0,9 м.

Составим неравенство по условию задачи и решим его относительно скорости.

$$P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right) > 0,$$

$$\frac{v^2}{L} - g > 0,$$

$$v^2 > gL, \quad v > 0,$$

$$v > \sqrt{gL} = \sqrt{10 \cdot 0{,}9} = \sqrt{9} = 3.$$

Итак, скорость вращения ведёрка должна быть не менее 3 м/с.

Ответ: 3.

13. Глубоководники проектируют новый батискаф в виде сферы радиуса R. Выталкивающая сила Архимеда, действующая на батискаф, вычисляется по формуле $F_A = \rho g V = \rho g \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$. Определите максимальный радиус батискафа (в метрах), если сила Архимеда по технологии не должна превосходить 1 130 400 Н. При расчёте примите следующие значения постоянных: $\rho = 1000$ кг/м^3, $g = 10$ Н/кг, $\pi = 3{,}14$.

Решение.

$$F_A \leqslant 1\,130\,400,$$
$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \leqslant 1\,130\,400,$$
$$R^3 \leqslant \frac{3 \cdot 1\,130\,400}{\pi \rho g \cdot 4},$$
$$R^3 \leqslant \frac{3 \cdot 1\,130\,400}{3{,}14 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 4} = 27,$$
$$R \leqslant 3.$$

Следовательно, радиус батискафа не должен превышать 3 м.

Ответ: 3.

14. В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 2{,}5$ — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{1000}$ и $b = -\frac{1}{10}$ — постоянные, t — время в минутах с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? (Ответ приведите в минутах.)

Решение.

Отсутствие воды в баке означает, что $H(t) = 0$. Подставим данные параметры в левую часть формулы, составим и решим уравнение.

$$H(t) = 0,$$
$$at^2 + bt + H_0 = 0,$$
$$\frac{t^2}{1000} - \frac{t}{10} + 2{,}5 = 0,$$
$$t^2 - 100t + 2500 = 0,$$
$$(t - 50)^2 = 0,$$
$$t = 50.$$

То есть вода из бака будет вытекать в течение 50 минут.

Ответ: 50.

15. Модель камнеметательной машины выстреливает камни под определённым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\dfrac{1}{200\ \text{м}}$, $b = \dfrac{9}{20}$ — постоянные параметры, x — горизонтальная составляющая расстояния от машины до камня, y — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены, высота которой 7 м, нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 2 метров?

Решение.

По условию $y \geqslant 7 + 2 = 9$. Подставим в левую часть формулы $ax^2 + bx \geqslant 9$ заданные значения параметров и решим неравенство.

$$-\frac{x^2}{200} + \frac{9x}{20} \geqslant 9, \qquad \Big|\times(-200)$$

$$x^2 - 90x + 1800 \leqslant 0,$$

$$(x-30)(x-60) \leqslant 0,$$

$$x \in [30; 60],$$

$$x_{\max} = 60.$$

То есть наибольшее расстояние от крепостной стены равно 60 м.

Ответ: 60.

16. Мотоциклист, движущийся по городу с постоянной скоростью $v_0 = 57$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 18$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города определяется выражением $S = v_0t + \dfrac{at^2}{2}$, где t — время в часах, прошедшее с момента выезда из города. Определите наибольшее время (в минутах), в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор обеспечивает покрытие на расстоянии не далее, чем 42 км от города.

Решение.

Составим и решим неравенство.

$$57t + \frac{18t^2}{2} \leqslant 42,$$

$$9t^2 + 57t - 42 \leqslant 0, \qquad \Big|:3$$

$$3t^2 + 19t - 14 \leqslant 0,$$

$$3\left(t+7\right)\left(t-\frac{2}{3}\right) \leqslant 0,$$

$$t \in \left[-7; \frac{2}{3}\right],$$

$$t_{\max} = \frac{2}{3}\text{ ч} = \frac{2}{3} \cdot 60\text{ мин} = 40\text{ мин}.$$

Итак, мотоциклист будет находиться в зоне действия сотовой связи 40 минут.

Ответ: 40.

17. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 33$ м/с и тормозящий с постоянным ускорением $a = 6$ м/с^2, за t секунд после начала торможения проходит путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$. Определите (в секундах) наименьшее время, прошедшее с момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал не менее 84 метров.

Решение.

Подставим в левую часть формулы значения данных параметров, составим и решим неравенство.

$$33t - \frac{6t^2}{2} \geqslant 84,$$

$$-3t^2 + 33t - 84 \geqslant 0, \qquad \Big| : (-3)$$

$$t^2 - 11t + 28 \leqslant 0,$$

$$(t-4)(t-7) \leqslant 0,$$

$$t \in [4; 7],$$

$$t_{\min} = 4.$$

То есть с момента начала торможения прошло не менее 4 с.

Ответ: 4.

18. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 3$ кг и радиусом $R = 14$ см и двух боковых массами по $M = 2$ кг, радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки (в кг $\cdot$ см^2) относительно оси вращения определяется выражением $I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$. При каком максимальном значении h (в см) момент инерции катушки не превышает предельных для неё $942\ \text{кг}\cdot\text{см}^2$?

Решение.

Подставим данные значения параметров в правую часть формулы, составим и решим неравенство.

$$\frac{(3+2\cdot 2)\cdot 14^2}{2}+2(28h+h^2)\leqslant 942,$$
$$686+2(28h+h^2)\leqslant 942,$$
$$h^2+28h-128\leqslant 0,$$
$$(h+32)(h-4)\leqslant 0,$$
$$h\in[-32;4],$$
$$h_{\max}=4.$$

То есть, чтобы момент инерции катушки не превышал $942\ \text{кг}\cdot\text{см}^2$, нужно, чтобы $h\leqslant 4$ см.

Ответ: 4.

19. В боковой стенке высокого цилиндрического бака с водой вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t)=H_0-\sqrt{2gH_0}kt+\frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время (в секундах), прошедшее с момента открытия крана, $H_0=45$ м — начальная высота столба воды, $k=\frac{1}{200}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а $g=10\ \text{м/с}^2$ — ускорение свободного падения. К какому моменту времени в баке останется не более $\frac{4}{9}$ первоначального объёма? Ответ выразите в секундах.

Решение.

Составим и решим уравнение. Объём воды в баке можно выразить как $V=H\cdot S$, где H — высота воды в баке, а S — площадь его поперечного сечения. S — величина постоянная, следовательно, бак будет заполнен водой на $\frac{4}{9}$ объёма, когда высота воды в нём составит $\frac{4}{9}$ первоначальной

$H(t) = \frac{4}{9}H_0.$

$$H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2 = \frac{4}{9}H_0.$$

Пусть $kt = x$,

$$\frac{g}{2}x^2 - \sqrt{2gH_0}x + \frac{5}{9}H_0 = 0,$$

$$5x^2 - 30x + 25 = 0, \qquad \Big| : 5$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0,$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5,$$

$$k = \frac{1}{200},$$

$$\frac{t}{200} = x,$$

$$t_1 = 200, \quad t_2 = 1000.$$

Итак, объём бака составит $\frac{4}{9}$ первоначального объёма через 200 с. Второй корень не подходит по смыслу задания, так как здесь рассматривается только промежуток времени до полного опустошения бака.

Ответ: 200.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 120 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить холодильник. Чему равно наименьшее возможное сопротивление (в омах) этого холодильника, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление определяется формулой $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 48 Ом?

2. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{324} \cdot 10^{17}\text{м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $184{,}68 \cdot 10^{18}$ Вт. Определите температуру этой звезды.

3. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -4t^2 + 25t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 25 метров.

4. При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При температуре 0 °C между рельсами оставили зазор в 9 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по законy $l(t) = l_0(1+\alpha t)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}(°\text{C}^{-1})$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

Вариант 2

1. Операционная прибыль предприятия за краткосрочный период вычисляется по формуле $h(q) = q(p-m)-k$. Компания продаёт свою продукцию по цене $p = 8000$ руб. за штуку, затраты на производство одной единицы продукции составляют $m = 2000$ руб., постоянные расходы предприятия $k = 10\,500\,000$ руб. в месяц. Определите наименьший месячный объём производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет не меньше 1 500 000 руб. в месяц.

2. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \cos(wt + \varphi)$, где t — время в секундах, амплитуда $U_0 = 4$ В, частота $w = 100°/\text{с}$, фаза $\varphi = 20°$. Датчик настроен так, что, если напряжение U в нём не ниже 2 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

3. После паводка уровень воды в колодце может повыситься. Можно определить его, измеряя время падения t небольших камушков в колодец и рассчитывая по формуле $h = -5t^2$ м. До паводка время падения камушков составляло 1,2 с. На какую минимальную высоту должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось больше, чем на 0,2 с? (Ответ выразите в м.)

4. Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\phi = \omega t + \dfrac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 60°/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 20°/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки ϕ достигнет 3150°. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

Вариант 3

1. При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 280$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \dfrac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 30$ м/с и $v = 20$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 330 Гц?

2. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 200$ молей воздуха при давлении $p_1 = 1{,}1$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 9{,}15$ — постоянная, $T = 280$ К — температура воздуха, p_1 (атм.) — начальное давление, а p_2 (атм.) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более 1 537 200 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

3. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 60$ см. Расстояние от линзы до лампочки d_1 может изменяться в пределах от 85 см до 105 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 160 см до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

4. К источнику с ЭДС $E = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, определяется формулой $U = \frac{E \cdot R}{R + r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 10 В? Ответ выразите в омах.

Вариант 4

1. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, где $l_0 = 300$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 180 м? Ответ выразите в км/с.

2. Автомобиль, масса которого равна $m = 1200$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остаётся неизменным, и проходит за это время путь $s = 300$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, можно вычислить по формуле $F = \frac{2ms}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдёт указанный путь, если известно, что сила F, приложенная к автомобилю, не меньше 1800 Н. Ответ выразите в секундах.

3. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t) = 4\sin\frac{2\pi t}{3}$ (см/с), где t — время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения превышала 2 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

4. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $pV^{1,2} = const$, где p (атм.) — давление, V — объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 51,2 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками сосуд выдерживает давление не более 64 атмосфер. Определите, до какого минимального объёма можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.

Вариант 5

1. Небольшой мячик бросают под острым углом α к поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 14$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10\,\text{м/с}^2$). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 9,8 м?

2. Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\phi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 20°$/мин — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 10°/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки ϕ достигнет 1980°. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

3. Два тела, массой $m = 5$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 4$ м/с под углом α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. Под каким наименьшим углом α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 60 джоулей энергии?

4. Груз массой 0,7 кг колеблется на пружине со скоростью, меняющейся по закону $v(t) = 1{,}2 \cos \pi t$, где t — время в секундах. Кинетическая энергия груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Определите, какую долю времени из первой секунды после начала движения кинетическая энергия груза будет не менее 0,252 Дж. Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Вариант 6

1. Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель оценивается целыми числами от -3 до 3.

Аналитик, составляющий формулу, считает, что объективность публикаций ценится вдвое, а информативность — втрое дороже, чем оперативность. В результате формула примет вид $R = \frac{2In + Op + 3Tr}{A}$.

Каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели наибольшие, получило рейтинг 60?

2. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In, оперативности Op, объективности публикаций Tr, а также качества сайта Q. Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 5-балльной шкале целыми числами от -2 до 2.

Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится вдвое, а информативность публикаций — вшестеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид $R = \dfrac{6In + Op + 2Tr + Q}{A}$.

Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A, при котором это условие будет выполняться.

3. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 300\sqrt{2}$ нм на дифракционную решётку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решётке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin\varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать седьмой максимум на решётке с периодом, не превосходящим 4200 нм?

4. Катер должен пересечь реку шириной $L = 45$ м и скоростью течения $u = 0{,}3$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \dfrac{L}{u} \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, где α — острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 150 с?

Вариант 7

1. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1) \cdot \dfrac{0{,}02K}{r_{\text{пок}} + 0{,}1}},$$

где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,9) и K — число покупателей, оценивших магазин.

Найдите рейтинг интернет-магазина «Гусь», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 20, их средняя оценка равна 0,6, а оценка экспертов равна 0,45.

2. Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ (км) — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 24 километра? Ответ выразите в километрах.

3. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу со скоростью $v = 6$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \dfrac{m}{m+M} \cdot v\cos\alpha$ (м/с), где $m = 60$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 340$ кг — масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,45 м/с?

4. Груз массой 0,12 кг колеблется на пружине со скоростью, меняющейся по закону $v(t) = \dfrac{1}{3}\cos \pi t$, где t — время в секундах. Кинетическая энергия груза вычисляется по формуле $E = \dfrac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Определите, какую долю времени из первой секунды после начала движения кинетическая энергия груза будет не менее $5 \cdot 10^{-3}$ Дж. Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Наибольшие и наименьшие значения функций (B15)

Диагностическая работа

1. Найдите наименьшее значение функции $y = 6\cos x - 7x - 12$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

2. Найдите наименьшее значение функции $y = 18x - 18\operatorname{tg} x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

3. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x - \ln(2x) - 4$ на отрезке $\left[\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right]$.

4. Найдите точку минимума функции $y = (x + 24)e^{x-8}$.

Применение производной для исследования функции

Немного полезной информации

Вспомним основные правила, которые позволяют исследовать свойства функции с помощью производной.

Для всех этих правил есть общее условие: они выполняются для непрерывных функций. Полезно помнить, что если у функции можно посчитать производную, то функция непрерывна.

Если производная положительна (при этом она может быть равна нулю в некоторых точках отрезка), то функция возрастает на этом отрезке.

Если производная отрицательна (при этом она может быть равна нулю в некоторых точках отрезка), то функция убывает на этом отрезке.

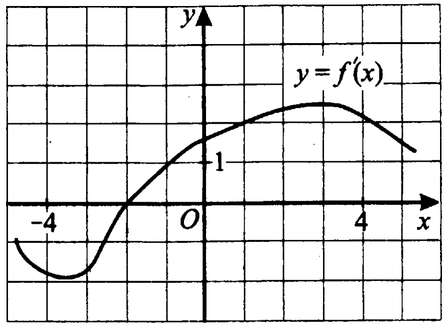


Рис. 125.

Например, по графику $f'(x)$, изображённому на рисунке 125, можно установить:

- $f(x)$ убывает на отрезке $[-4; -2]$ (здесь $f'(x) \leqslant 0$, причём равна нулю производная только в одной точке $x = -2$);
- $f(x)$ возрастает на отрезке $[-2; 5]$ (здесь $f'(x) \geqslant 0$, причём равна нулю производная только в одной точке $x = -2$).

Если производная непрерывной функции меняет знак при переходе через точку $x = x_0$ (см. рис. 126), причём в точке $x = x_0$ производная равна нулю или не существует, то точка $x = x_0$ — точка экстремума (точка минимума или точка максимума).

Рис. 126.

Приведём пример нахождения точек максимума и минимума по графику производной. На рисунке 127 (см. с. 218) изображены два графика производных разных функций. На обоих графиках $x = a$ — точка максимума функции $f(x)$; $x = b$ — точка минимума функции $f(x)$.

Если функция непрерывна на отрезке, то она принимает наибольшее и наименьшее значения либо на концах отрезка, либо в тех точках, где производная равна нулю (или не существует). Поэтому один из способов

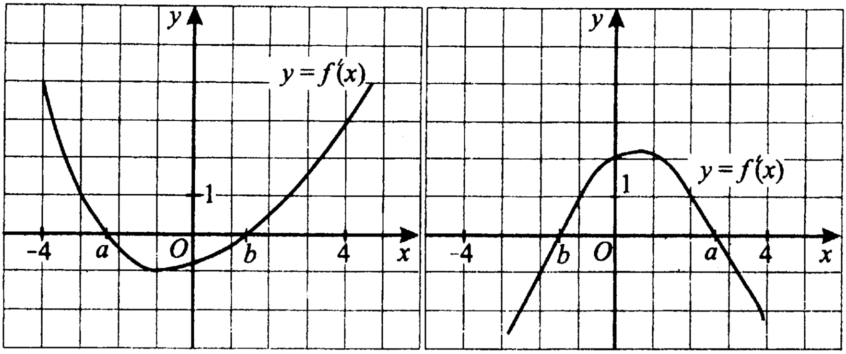


Рис. 127.

отыскать наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке — посчитать её значения на концах отрезка и в точках, где производная равна нулю (или не существует), и выбрать из них наибольшее или наименьшее значение.

Второй способ отыскать наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке — исследовать функцию на монотонность (другими словами, на возрастание-убывание), построить эскиз и посчитать значения функции в нужных точках.

Точки максимума могут как совпадать, так и не совпадать с точками, где функция принимает наибольшее значение. То же можно сказать про точки минимума и про точки, где функция принимает наименьшее значение.

Давайте разберём на примерах, что это значит.

Задачи с решениями

1. Найдите наименьшее значение функции $y = (x+7)e^{x+8}$ на отрезке $[-9; -7]$.

Решение.

1-й способ.

1. Найдём значения функции на концах отрезка:

$$y(-9) = (-9+7)e^{-9+8} = -2e^{-1} \approx -\frac{20}{27},\ \text{так как } e \approx 2{,}7;$$

$$y(-7) = (-7+7)e^{-7+8} = 0.$$

2. Найдём производную:
$y' = \left((x+7)e^{x+8}\right)' = (x+7)'e^{x+8} + (x+7)(e^{x+8})' =$
$= 1e^{x+8} + (x+7)e^{x+8} = (1+x+7)e^{x+8} = (x+8)e^{x+8}$.

3. Найдём значения x, при которых производная функции равна нулю:
$(x+8)e^{x+8} = 0; \quad x+8=0; \quad x=-8$.

4. Это значение $x=-8$ принадлежит промежутку, данному в задаче: -8 лежит на отрезке $[-9; -7]$.

5. Найдём значение функции в точке, где производная равна нулю:
$y(-8) = (-8+7)e^{-8+8} = -1 \cdot 1 = -1$.

6. Выберем из пунктов 1 и 5 наименьшее значение функции. Видим, что из чисел $-\dfrac{20}{27}; -1; 0$ наименьшим является -1.

Ответ: -1.

2-й способ.

1. Найдём производную: $y' = \left((x+7)e^{x+8}\right)' = (x+8)e^{x+8}$.

2. Найдём значения x, при которых производная функции равна нулю:
$(x+8)e^{x+8} = 0; \quad x+8=0; \quad x=-8$.

3. Проверим, принадлежат ли эти значения x промежутку, данному в задаче: -8 лежит на отрезке $[-9; -7]$.

4. Нарисуем числовую ось и нанесём на неё нули ($x=-8$) и знаки производной, которые определяются с помощью пробной точки (см. рис. 128).
$y'(-9) = (-9+8)e^{-9+8} = -1e^{-1} < 0$;
$y'(-7) = (-7+8)e^{-7+8} = 1e > 0$.

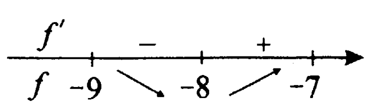


Рис. 128.

5. Чертим эскиз графика функции (см. рис. 129). По рисунку видно, что наименьшее значение функция принимает в точке $x = -8$.

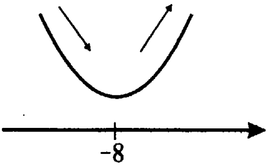


Рис. 129.

6. Вычисляем значение функции в точке $x = -8$:
$y(-8) = (-8 + 7)e^{-8+8} = -1 \cdot 1 = -1.$

Ответ: -1.

2. Найдите наименьшее значение функции

$y = 3\sqrt{2}\sin x + 3\sqrt{2}x - 15$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

1. Найдём производную:
$y'(x) = (3\sqrt{2}\sin x + 3\sqrt{2}x - 15)' = 3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2} + 0 =$
$= 3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2}.$

2. Определим знаки производной $y'(x) = 3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2}$.
Это выражение неотрицательно при всех значениях x, так как $\cos x$ принимает значения от -1 до $+1$ (всегда выполняется $3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2} \geqslant 3\sqrt{2} \cdot (-1) + 3\sqrt{2} = 0$). Следовательно, $y'(x) \geqslant 0$, и функция возрастает при всех значениях x. Наименьшее значение возрастающая функция принимает на левом конце заданного промежутка (при наименьшем возможном значении аргумента $x = 0$).

3. Вычисляем значение функции в точке $x = 0$.
$y = 3\sqrt{2}\sin 0 + 3\sqrt{2} \cdot 0 - 15 = -15.$

Ответ: -15.

3. Найдите наибольшее значение функции

$y = 4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi - 1$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

1. Найдём значения функции на концах отрезка:
   $y(0) = 4\sqrt{2}\cos 0 + 4 \cdot 0 - \pi - 1 = 4\sqrt{2} - \pi - 1 \approx$
   $\approx 6 - 3{,}1 - 1 = 1{,}9;$
   $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2} + 4 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi - 1 = 0 + \pi - 1 \approx 3{,}1 - 1 = 2{,}1.$

2. Найдём производную:
   $y'(x) = (4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi - 1)' = -4\sqrt{2}\sin x + 4.$

3. Найдём значения на заданном промежутке, при которых производная равна нулю: $-4\sqrt{2}\sin x + 4 = 0$; $-4\sqrt{2}\sin x = -4$; $\sqrt{2}\sin x = 1$; $\sin x = 1/\sqrt{2}$.

   Так как x принадлежит отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, нам подходит $x = \frac{\pi}{4}$.

4. Найдём значение функции при $x = \frac{\pi}{4}$.

   $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \pi - 1 = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi - \pi - 1 =$
   $= 4 - 1 = 3.$

5. Выберем из пунктов 1 и 4 наибольшее значение функции. Видим, что наибольшим является 3.

Ответ: 3.

4. Найдите наибольшее значение функции $y = 16x - 16\,\mathrm{tg}\,x + 4\pi - 56$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Решение.

1. Найдём производную:

$$y' = (16x - 16\operatorname{tg} x + 4\pi - 56)' = 16 - \frac{16}{\cos^2 x} - 0 =$$

$$= \frac{16\cos^2 x - 16}{\cos^2 x} = \frac{16(\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x}.$$

2. Определим знаки производной:

$$y'(x) = \frac{16(\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x} \leqslant 0.$$

Это выражение неположительно, так как $\cos x$ принимает значения от -1 до $+1$. Следовательно, $y'(x) \leqslant 0$, и функция убывает при всех допустимых значениях x. Наибольшее значение убывающая функция принимает на левом конце заданного промежутка, то есть при наименьшем возможном значении аргумента $x = -\frac{\pi}{4}$.

Вычисляем значение функции в точке $x = -\frac{\pi}{4}$:

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 16 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) - 16\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\pi - 56 =$$
$$= -4\pi + 16 + 4\pi - 56 = -40.$$

Ответ: -40.

5. Найдите наименьшее значение функции $y = 20x - \ln(x+4)^{20}$ на отрезке $[-3{,}5; 0]$.

Решение.

1. Найдём производную:

$$y' = (20x - \ln|x+4|^{20})' = 20 - (20\ln|x+4|)' =$$

$$= \begin{cases} 20 - \dfrac{20}{x+4}, & x > -4, \\ 20 + \dfrac{20}{x+4}, & x < -4; \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{20x+80-20}{x+4}, \ x>-4, \\ \dfrac{20x+80+20}{x+4}, \ x<-4; \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{20x+60}{x+4}, \ x>-4, \\ \dfrac{20x+100}{x+4}, \ x<-4. \end{cases}$$

Но нас интересует только промежуток $[-3{,}5; 0]$.

2. Определим нули и знаки производной на заданном промежутке $x > -4$:
$y'(x) = 0$; $20x + 60 = 0$; $x = -\dfrac{60}{20}$; $x = -3$.

3. Отмечаем на числовой оси нули функции ($x = -3$) и точки, где производная (или функция) не существует (в данном случае по определению логарифма $x \neq -4$).

4. Методом «пробной точки» определяем знак производной на каждом промежутке. Для этого считаем значение производной в любой выбранной нами точке каждого промежутка (см. рис. 130).

$$y'(-3{,}5) = \frac{20 \cdot (-3{,}5) + 60}{-3{,}5 + 4} < 0;$$

$$y'(5) = \frac{20 \cdot 5 + 60}{5 + 4} > 0.$$

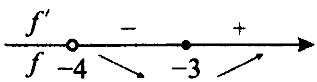


Рис. 130.

5. Отмечаем границы заданного в условии промежутка и смотрим, в какой точке должно быть наименьшее значение функции. В данной задаче наименьшее значение на промежутке $[-3{,}5; 0]$ функция примет в точке $x = -3$ (см. рис. 131).

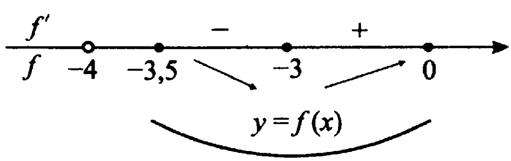


Рис. 131.

6. Вычисляем значение функции в точке $x = -3$:
$y(-3) = 20 \cdot (-3) - \ln(-3+4)^{20} = -60 - \ln 1 = -60.$

Ответ: -60.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Найдите наименьшее значение функции
$y = 16\cos x + 27x - 6$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{28x}{\pi} + 7\sin x + 2$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

3. Найдите наибольшее значение функции
$y = 5\ln(x+5) - 5x + 11$ на отрезке $[-4{,}8; 0]$.

4. Найдите точку максимума функции $y = (31 - x)e^{x+31}$.

Вариант 2

1. Найдите наибольшее значение функции
$y = 18x - 17\sin x + 2$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

2. Найдите наименьшее значение функции $y = 8x - \ln(x+12)^8$ на отрезке $[-11{,}5; 0]$.

3. Найдите наибольшее значение функции
$y = x^2 - 15x + 13\ln x + 11$ на отрезке $\left[\frac{2}{5}; \frac{7}{5}\right]$.

4. Найдите точку минимума функции $y = (35 - x)e^{35-x}$.

Вариант 3

1. Найдите наибольшее значение функции
$y = 15x - 14\sin x + 8$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

2. Найдите наименьшее значение функции
$y = 15x - 15\ln(x+11) + 4$ на отрезке $[-10{,}5; 8]$.

3. Найдите наибольшее значение функции
$y = 80x - 80\operatorname{tg} x + 20\pi$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$.

4. Найдите точку максимума функции $y = (23+x)e^{23-x}$.

Вариант 4

1. Найдите наибольшее значение функции
$y = \frac{51x}{\pi} + 17\sin x + 15$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

2. Найдите наименьшее значение функции
$y = -8x + 8\operatorname{tg} x - 14$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

3. Найдите наименьшее значение функции
$y = 5x^2 - 5x - 5\ln x + 11$ на отрезке $\left[\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right]$.

4. Найдите точку минимума функции $y = (x^2 - x - 5)e^{x+8}$.

Вариант 5

1. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 7x^2 + 2$ на отрезке $[-1; 10]$.

2. Найдите наименьшее значение функции
$y = (x+6)^2(x+1) - 23$ на отрезке $[-7; -4]$.

3. Найдите точку минимума функции $y = \log_5(x^2 + x + 11) + 3$.

4. Найдите точку максимума функции $y = \frac{x}{x^2+81}$.

Вариант 6

1. Найдите наименьшее значение функции $e^{2x} - 8e^x + 1$ на отрезке $[1; 3]$.

2. Найдите наибольшее значение функции $6x^5 - 90x^3 - 5$ на отрезке $[-5; 1]$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y = 2^{-9-12x-3x^2}$.

4. Найдите точку максимума функции $y = \sqrt{1 - 6x - x^2}$.

Тренировочные варианты к части 2

Вариант 1

1. Решите уравнение $x^2 - 16x + 63 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

2. Найдите значение выражения $6^{\sqrt{6}+1} \cdot 6^{2-\sqrt{6}}$.

3. На рисунке 132 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-5; 8]$.

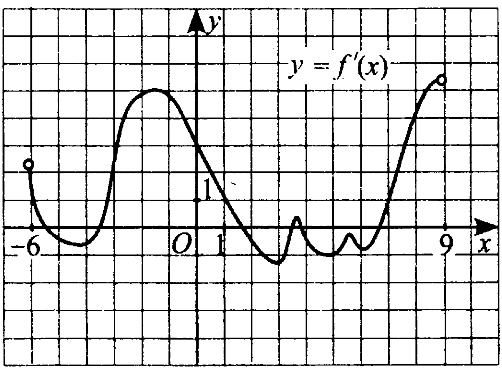


Рис. 132.

4. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = 20t - 5t^2$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 7,2 метров.

5. Найдите точку максимума функции
$y = (5x^2 - 12x + 12)e^{x+12}$.

Вариант 2

1. Найдите корень уравнения $\sqrt{-2 - 11x} = 3$.

2. Найдите значение выражения $\sqrt{6}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}$.

3. На рисунке 133 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

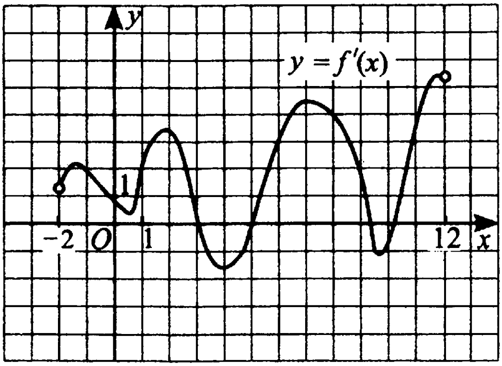


Рис. 133.

4. В розетку электросети подключён прибор с сопротивлением 170 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите (в омах) наименьшее возможное сопротивление этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление R задаётся формулой $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 25,5 Ом.

5. Найдите точку минимума функции $y = (6x^2 - 3x + 3)e^{8-x}$.

Вариант 3

1. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{5x+3}{7}} = 3$.

2. Найдите значение выражения $16 \log_{625} \sqrt{25}$.

3. На рисунке 134 (см. с. 228) изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x + 5$ или совпадает с ней.

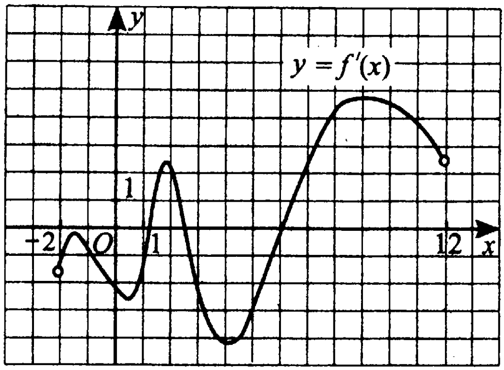


Рис. 134.

4. Коэффициент полезного действия тепловой машины Карно определяется формулой $\eta = \frac{T_H - T_X}{T_H}$, где T_H — температура нагревателя, а $T_X = 200$ К — температура холодильника. При каком наименьшем значении температуры нагревателя (в К) КПД этого двигателя будет составлять не менее 0,6?

5. Найдите наименьшее значение функции

$y = 2x^2 + x - 5\ln x + 7$ на отрезке $\left[\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right]$.

Вариант 4

1. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{2}{5x-8}} = \frac{1}{4}$.

2. Найдите значение выражения $2\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$.

3. На рисунке 135 изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определённый интеграл $\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx$.

4. Зависимость температуры T (в градусах Кельвина) от времени t (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задаётся выражением $T = a+bt+ct^2$, где $a = 310$ К, $b = 30$ К/мин, $c = -0{,}1$ К/мин^2. Известно, что при температуре нагревателя свыше 2200 К прибор может

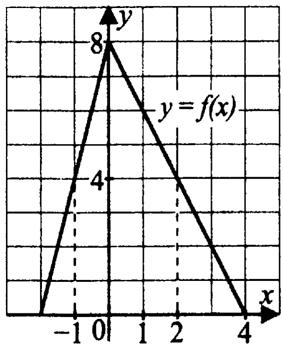


Рис. 135.

испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время (в минутах) после начала работы нужно отключать прибор.

5. Найдите точку максимума функции $y = (x-5)^2 e^{x+8}$.

Вариант 5

1. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{2+x} = 2^{-x}$.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{64\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[6]{a}}$ при $a > 0$.

3. На рисунке 136 изображён график функции $y = F(x)$, которая является одной из первообразных функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определённый интеграл $\int\limits_1^4 f(x)dx$.

4. В боковой стенке бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота h столба воды в нём меняется по закону $h(t) = 75 - 20t + t^2$, где t — время в секундах. Через сколько секунд вода вытечет из бака?

5. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{5x}{\pi} + 5\operatorname{tg} x - 4$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

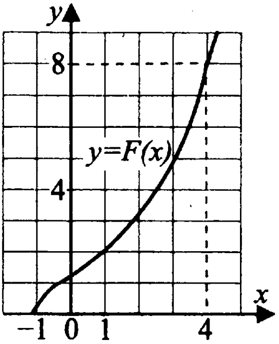


Рис. 136.

Вариант 6

1. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{2+x} = 32.$

2. Найдите $\dfrac{5\cos 2\alpha}{2\sin 4\alpha}$, если $\sin 2\alpha = -0{,}4.$

3. На рисунке 137 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

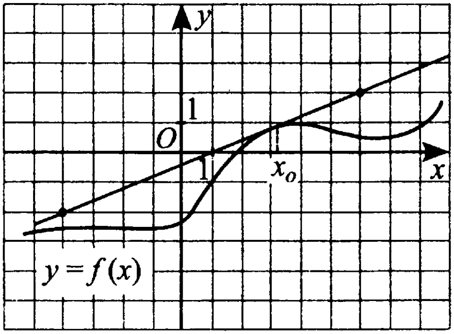


Рис. 137.

4. Зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (руб.) для данного предприятия задаётся формулой $q = 270\,000 - 15\,000p$. Найдите минимальный уровень цены p, при котором значение выручки предприятия $s = p \cdot q$ за месяц составит не менее 1 200 000 рублей.

5. Найдите точку максимума функции $y = (x+3)^2 e^{2-x}$.

Вариант 7

1. Найдите корень уравнения $7^{x-8} = \frac{1}{49}$.

2. Найдите значение выражения $(7a^3 \cdot b^6 + (ab^2)^3) : (2a^3b^4)$ при $b = -2$.

3. Прямая $y = 56$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 21x + 9$. Найдите абсциссу точки касания.

4. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, где $l_0 = 65$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 52 м? Ответ выразите в км/с.

5. Найдите точку минимума функции $y = 2x - \ln(x+11) + 4$.

Вариант 8

1. Найдите корень уравнения $5^{6-x} = 125$.

2. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$ и $\alpha \in (\pi; 2\pi)$.

3. На рисунке 138 (см. с. 232) изображён график функции. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой -3. Найдите $f'(-3)$.

4. Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к направлению движения. Мощность (в киловаттах) трактора равна $N = Fv\cos\alpha$, скорость $v = 4$ м/с. При каком максимальном угле α (в градусах) эта мощность будет не менее 160 кВт?

5. Найдите точку минимума функции $y = (x+1)^2 e^{11-x}$.

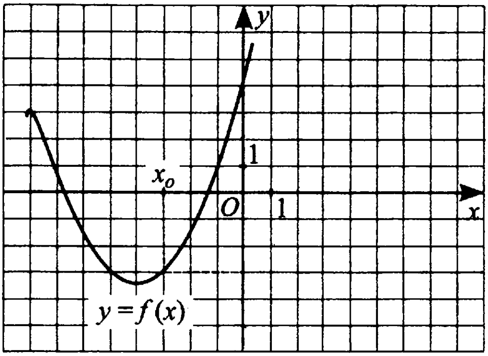


Рис. 138.

Вариант 9

1. Найдите корень уравнения $3^{10-3x} = 81$.

2. Найдите $\frac{a}{b}$, если $\frac{2a+3b}{4a+b} = \frac{2}{3}$.

3. На рисунке 139 изображён график функции $y = F(x)$, где $F(x)$ — первообразная функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 те, в которых функция $f(x)$ отрицательна. В ответе запишите количество найденных точек.

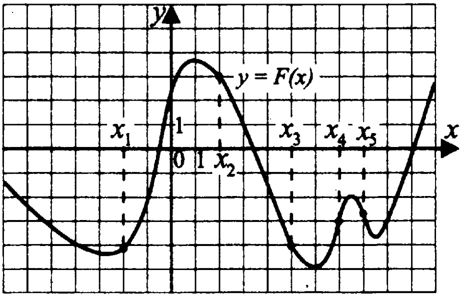


Рис. 139.

4. Автомобиль, масса которого равна $m = 3300$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остаётся неизменным, и проходит за это время путь $s = 400$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, можно вычислить по формуле

$F = \frac{2ms}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он может пройти указанный путь, если известно, что сила F, приложенная к автомобилю, не меньше 6600 Н. Ответ выразите в секундах.

5. Найдите точку максимума функции $y = 3\ln(x + 11) - 15x + 4$.

Вариант 10

1. Найдите корень уравнения $\log_5(21 - x) = \log_5 28$.

2. Найдите значение выражения
$\sqrt{a^2 - 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 8a + 16}$ при $3 \leqslant a \leqslant 4$.

3. На рисунке 140 изображён график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

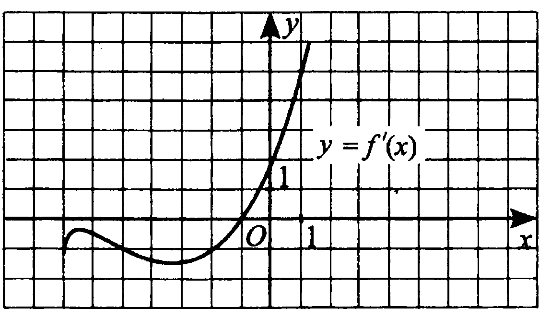


Рис. 140.

4. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $pV^{1,5} = const$, где p (атм.) — давление в газе, V — объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 68,4 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками сосуд выдерживает давление не более 27 атмосфер. Определите, до какого минимального объёма можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.

5. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{24x}{\pi} - 5\sin x - 35$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$.

Вариант 11

1. Найдите корень уравнения $\log_5(21 + x) = \log_5 6$.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{3}{\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{5\pi}{3}}$.

3. На рисунке 141 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

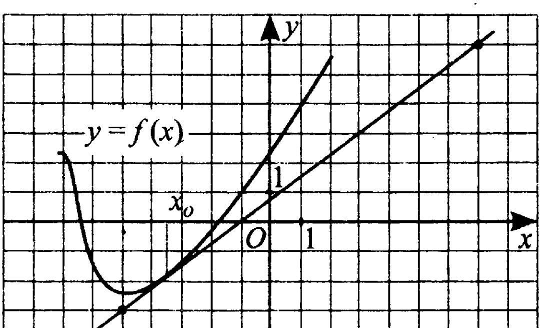


Рис. 141.

4. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 16$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считать $g = 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 12,8 м?

5. Найдите точку максимума функции $y = (x+4)^2e^{x-4}$.

Вариант 12

1. Найдите корень уравнения $\log_2(37+x)=6$.

2. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{2\frac{6}{7}}-\sqrt{6\frac{3}{7}}\right):\sqrt{\frac{5}{7}}$.

3. Прямая $y=6x-4$ является касательной к графику функции $y=x^3-x^2-2x+8$. Найдите абсциссу точки касания.

4. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu=20$ молей воздуха при давлении $p_1=1{,}2$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A=\alpha\nu T\log_2\frac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha=9{,}15$ — постоянная, $T=320$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более 117 120 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

5. Найдите точку максимума функции $y=(x^2-7x-7)e^{7-x}$.

Часть 3.
Геометрия.
Материал 7 – 11 классов

Площади (В5, В8)

Диагностическая работа

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см×1 см изображена трапеция (см. рис. 142). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

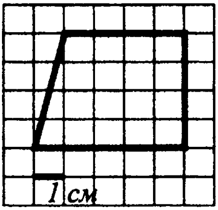


Рис. 142.

2. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 143.

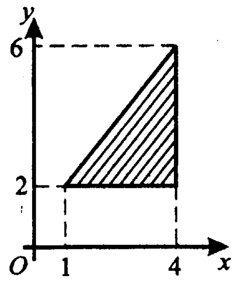


Рис. 143.

3. Найдите площадь ромба, вершины которого имеют координаты $(2; 6)$, $(4; 10)$, $(6; 6)$, $(4; 2)$ (см. рис. 144).

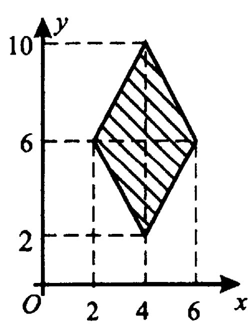


Рис. 144.

4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 145). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

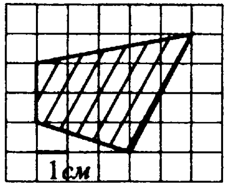


Рис. 145.

5. Найдите площадь сектора S, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 146). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

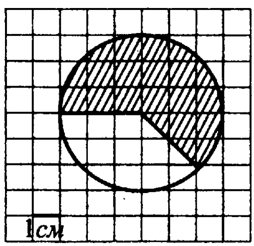


Рис. 146.

Прямоугольный треугольник

Немного полезной информации

В этой главе мы рассмотрим простые виды задач по геометрии, а именно задачи, в которых нужно найти площади плоских фигур, нарисованных на клетчатой бумаге или расположенных на координатной плоскости.

Для решения таких задач требуется знать не очень много формул, поэтому их решение доступно практически каждому.

Давайте вспомним эти формулы и разберём примеры их применения.

Теорема Пифагора: В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы (c) равен сумме квадратов катетов (a и b):

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов: $S = \frac{ab}{2}$.

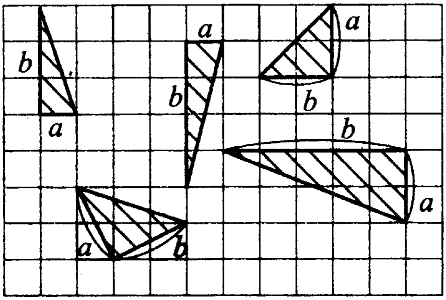


Рис. 147.

Напомним, что у прямоугольного треугольника есть прямой угол, равный 90°. Сторона напротив прямого угла (самая длинная) называется **гипотенузой**, две прилежащие к прямому углу стороны называют **катетами**.

На рисунке 147 приведены чертежи некоторых прямоугольных треугольников, у которых показаны катеты a и b.

Задачи с решениями

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 148). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

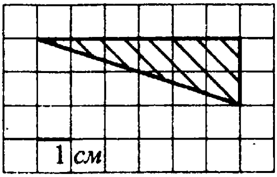


Рис. 148.

Решение.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. В данном треугольнике катеты равны 2 см и 6 см (посчитаем по клеточкам), поэтому площадь $S = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$ (см^2).

Ответ: 6.

Немного полезной информации

Теперь рассмотрим задачу, в которой точки изображены на **координатной плоскости**. Напомним, что любая точка на координатной плоскости характеризуется двумя числами — **координатами**. Первая координата называется **абсциссой (x)**, вторая координата называется **ординатой (y)**. На рисунке 149 точки A, B и C имеют координаты $A(4;10)$, $B(0;2)$, $C(8;2)$.

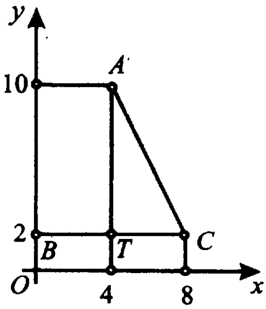


Рис. 149.

Посмотрим внимательно на рисунок 149. Если у двух точек одинаковые абсциссы (x), как у точек T и A, или одинаковые ординаты (y), как у точек B, T и C, то соответствующие отрезки параллельны осям координат. AT параллелен Oy, BC параллелен Ox. В таких случаях длину отрезка легко найти, если вычесть различающиеся координаты точек.

Например, найдём длину отрезка AT, где $A(4;10)$, $T(4;2)$. Абсциссы (x) у них равны. Найдём разность ординат (y), длина AT равна $10-2=8$.

Длину отрезка TC, параллельного оси Ox, можно найти, если вычесть их абсциссы: $8-4=4$.

Длину AC найдём по теореме Пифагора. Треугольник ACT прямоугольный, $AC^2 = TC^2 + AT^2$.

$AC^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$. $AC = \sqrt{80}$.

Задачи с решениями

2. Найдите площадь треугольника (в см^2), вершины которого имеют координаты $(4;2)$, $(6;2)$, $(4;10)$ (см. рис. 150).

Решение.

1-й способ.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. Найдём длину катета BA. Абсциссы (x) у них равны. Находим разность ординат (y), длина AB равна $10-2=8$. Длину отрезка BC,

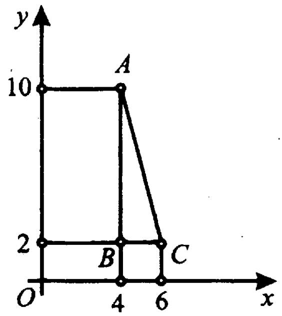


Рис. 150.

параллельного оси Ox, можно найти, если вычесть их абсциссы: $6 - 4 = 2$.

Тогда площадь $S = \dfrac{2 \cdot 8}{2} = 8$ (см^2).

Ответ: 8.

2-й способ.

Нанесём координатную сетку (нарисуем линии с промежутком 1 прямо на данном чертеже, рисунок 151). После этого по клеточкам посчитаем длину катетов и вычислим площадь. $AB = 8$, $BC = 2$, $S = \dfrac{2 \cdot 8}{2} = 8$ (см^2).

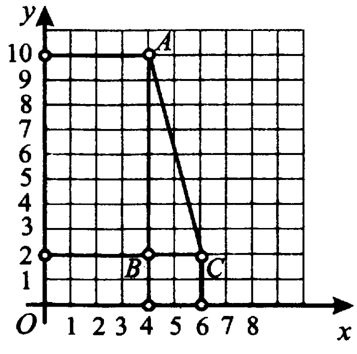


Рис. 151.

Ответ: 8.

При этом способе решения задач важно не ошибиться и не пропускать числа и линии в координатной сетке, их нужно проводить с разницей в единицу.

Площадь треугольника

Немного полезной информации

Площадь произвольного треугольника равна половине произведения длины его стороны (a) на высоту (h), проведённую к этой стороне: $S = \frac{ah}{2}$.

На рисунке 152 приведены чертежи некоторых треугольников, у которых обозначены одна из сторон a и высота, проведённая к этой стороне h.

Как правило, удобно брать ту сторону, которая проходит по линиям клетчатой бумаги (или же проходит параллельно осям координат).

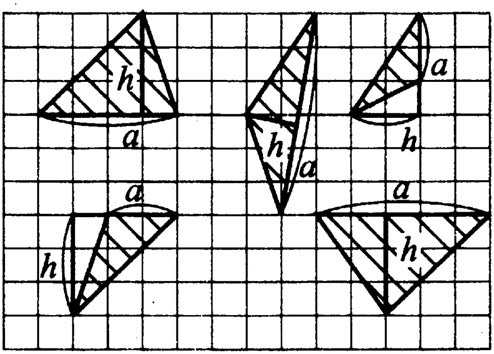


Рис. 152.

Задачи с решениями

3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 153). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

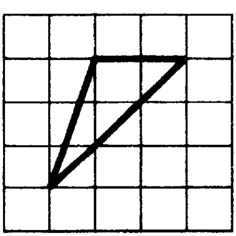


Рис. 153.

Решение.

1-й способ.

Площадь произвольного треугольника равна половине произведения длины его стороны (a) на высоту (h), проведённую к этой стороне. Проведём высоту h. Треугольник тупоугольный, поэтому высота проводится вне треугольника.

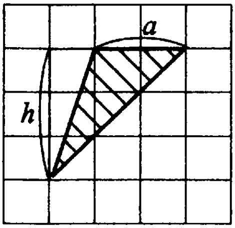


Рис. 154.

На рисунке 154 сторона $a = 2$ см, высота $h = 3$ см.

$S = \frac{ah}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$ см^2.

Ответ: 3.

Заметим, что так как клетки имеют размер 1 см × 1 см, то площадь в квадратных сантиметрах получится, если мы будем по рисунку считать размер отрезков в клетках. Поэтому единицы длины в этих задачах можно и не писать.

2-й способ.

Достроим треугольник BCM до прямоугольного треугольника MCA (см. рис. 155).

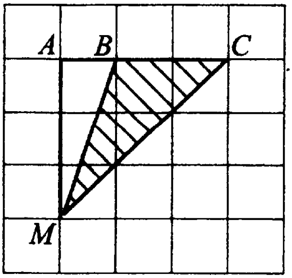


Рис. 155.

Тогда искомую площадь треугольника BCM можно найти как разность площадей двух прямоугольных треугольников MAC и MAB.

Катеты первого из них равны 3 см и 3 см, катеты второго — 3 см и 1 см.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, следовательно,

$$S_{MAC} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4{,}5; \quad S_{MAB} = \frac{1 \cdot 3}{2} = 1{,}5;$$

$$S_{MBC} = S_{MAC} - S_{MAB} = 4{,}5 - 1{,}5 = 3.$$

Ответ: 3.

Площадь четырёхугольника

Немного полезной информации

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон:

$$S = ab.$$

На рисунке 156 приведены чертежи некоторых прямоугольников, у которых показаны смежные стороны a и b.

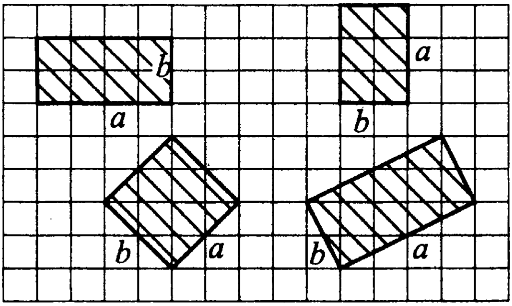


Рис. 156.

Задачи с решениями

4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён прямоугольник (см. рис. 157). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

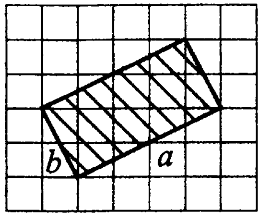


Рис. 157.

Решение.

1-й способ.

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон a и b. Для того чтобы найти стороны прямоугольника, рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 2$ и $BC = 1$ и гипотенузой $AC = b$ (см. рис. 158).

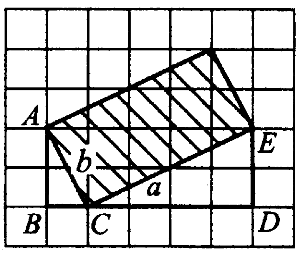


Рис. 158.

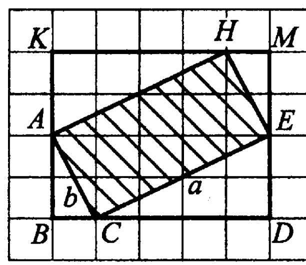


Рис. 159.

По теореме Пифагора гипотенуза $AC = b$ равна $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Из треугольника CDE с катетами $CD = 4$ и $DE = 2$ найдём гипотенузу CE. $a = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$. Следовательно, площадь прямоугольника $S = \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = 10$.

Ответ: 10.

2-й способ.

Достроим прямоугольник $ACEH$ до прямоугольника $BKMD$ (см. рис. 159). Чтобы найти площадь $ACEH$, нужно из площади прямоугольника $BKMD$ вычесть площади прямоугольных треугольников AKH, HME, EDC и ABC.

Так как площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, то площадь каждого из двух больших треугольников (AKH и EDC) равна 4, а площадь каждого из двух маленьких треугольников (HME и ABC) равна 1. Площадь прямоугольника $BKMD$ равна $4 \cdot 5 = 20$. Следовательно, площадь искомого прямоугольника будет равна $20 - 1 - 1 - 4 - 4 = 10$.

Ответ: 10.

Заметим, что подобным «достраиванием» можно найти площадь любого многоугольника на клетчатой бумаге.

5. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 160). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

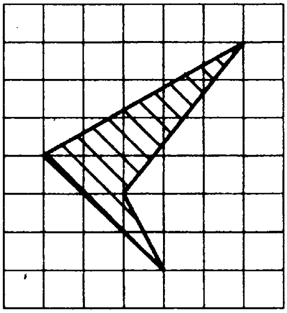


Рис. 160.

Решение.

Достроим четырёхугольник до прямоугольника (см. рис. 161).

Чтобы найти площадь четырёхугольника, нужно из площади прямоугольника со сторонами 5 и 6 вычесть площади четырёх прямоугольных треугольников и квадрата. Попробуйте посчитать площади прямоугольных треугольников самостоятельно, величины этих площадей указаны на рисунке.

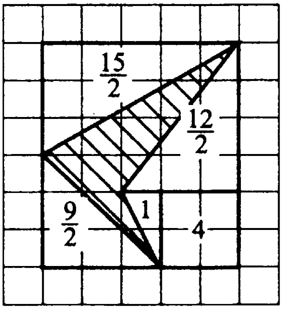


Рис. 161.

Получаем площадь заданного четырёхугольника:
$S = 30 - 7{,}5 - 6 - 1 - 4{,}5 - 4 = 7$.

Ответ: 7.

Площади круга и сектора

Немного полезной информации

Площадь круга равна произведению числа π на квадрат радиуса:

$$S = \pi R^2.$$

Задачи с решениями

6. Найдите площадь S круга, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 162). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

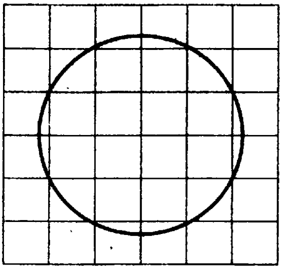


Рис. 162.

Решение.

Площадь круга равна произведению числа π на квадрат радиуса. Найдём радиус. Из центра O проведём радиус OA. В треугольнике OAB сторона OA — гипотенуза, катеты равны 1 и 2 (см. рис. 163).

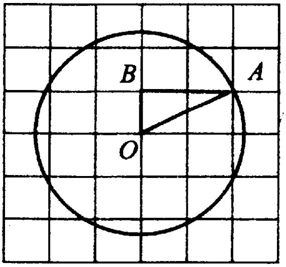


Рис. 163.

Найдём гипотенузу по теореме Пифагора.

$OA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Площадь круга $S = \pi\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5\pi$. $\dfrac{S}{\pi} = \dfrac{5\pi}{\pi} = 5$.

Ответ: 5.

7. На клетчатой бумаге нарисовано два круга (см. рис. 164). Площадь внутреннего круга равна 3. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

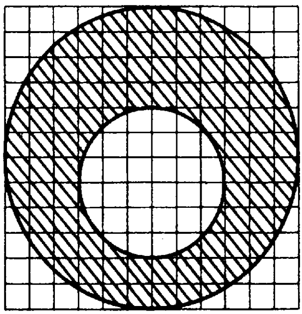


Рис. 164.

Решение.

Радиус R внутреннего круга — 3 клетки, его площадь равна $\pi R^2 = 3$. Радиус внешнего круга — 6 клеток, то есть $2R$, поэтому его площадь равна $\pi \cdot (2R)^2 = 3 \cdot 4 = 12$. Площадь заштрихованной фигуры равна разности $12 - 3 = 9$.

Ответ: 9.

ⓘ *Немного полезной информации*

Площадь сектора с углом α градусов равна $\dfrac{\pi R^2 \alpha}{360°}$.

Задачи с решениями

8. Найдите площадь S сектора с углом 18 градусов и радиусом 4. В ответе укажите $\dfrac{S}{\pi}$.

Решение.

Посчитаем площадь сектора по формуле

$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 18}{360} = 0{,}8\pi. \quad \frac{S}{\pi} = 0{,}8.$

Ответ: 0,8.

9. Найдите площадь S заштрихованного сектора, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 165). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

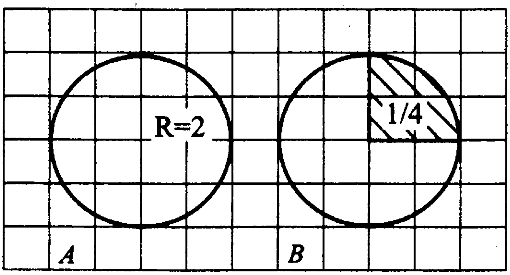


Рис. 165.

Решение.

На рисунке A площадь круга с радиусом $R = 2$ равна $\pi R^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$.

На рисунке B площадь сектора составляет $\frac{1}{4}$ от площади круга (если круг разделить на 4 равные части, то одна из них как раз и будет равна заданному сектору), то есть $\frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi$.

Можно было решать задачу по-другому. Площадь сектора равна площади круга, делённой на 4. $S : 4 = 4\pi : 4 = \pi$.

$\frac{S}{\pi} = 1.$

Ответ: 1.

10. Найдите площадь S заштрихованных секторов на рисунках C и D, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 166). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

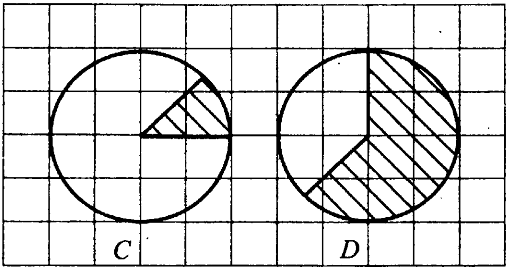


Рис. 166.

Решение.

Посчитаем, какая часть круга закрашена. Проведя дополнительные линии (см. рис. 167), видим, что сектор на рисунке C составляет $\frac{1}{8}$ часть круга, а сектор на рисунке D составляет $\frac{5}{8}$ частей круга (круг разделён на 8 равных частей, и закрашено 5 таких частей).

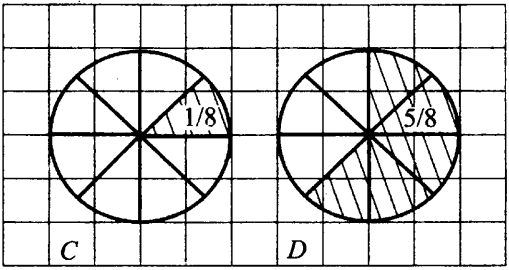


Рис. 167.

Находим площади секторов на рисунках C и D.

1-й способ.

Поделим площадь круга на 8, получим площадь сектора на рисунке C, потом умножим эту площадь на 5, получим площадь сектора на рисунке D.

$S_C = 4\pi : 8 = 0{,}5\pi$; $\frac{S}{\pi} = 0{,}5$; $S_D = 4\pi : 8 \cdot 5 = 2{,}5\pi$; $\frac{S}{\pi} = 2{,}5$.

Ответ: 0,5 и 2,5.

2-й способ.

Найдём площадь $\frac{1}{8}$ круга.

$$S_C = \frac{1}{8} \cdot 4\pi = 0{,}5\pi; \ \frac{S}{\pi} = 0{,}5; \ S_D = \frac{5}{8} \cdot 4\pi = 2{,}5\pi; \ \frac{S}{\pi} = 2{,}5.$$

Ответ: 0,5 и 2,5.

ⓘ *Немного полезной информации*

А теперь перейдём к формулам, которые неплохо бы знать каждому выпускнику, но, к сожалению, многие забывают их к 11-му классу. Заметим, что в принципе можно обойтись и без них при решении данных задач (находя площадь как сумму или разность площадей прямоугольников и треугольников), но иногда это приводит к длинным вычислениям.

Площадь трапеции

Напомним, что **трапеция** — это четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Площадь трапеции равна половине произведения суммы оснований $(a+b)$ на высоту (h):

$$S = \frac{(a+b)h}{2}.$$

На рисунке 168 приведены чертежи некоторых трапеций, у каждой из которых показаны основания a и b и высота h.

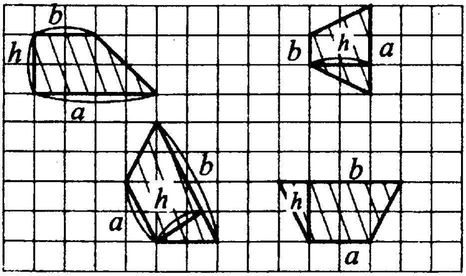


Рис. 168.

Задачи с решениями

11. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция (см. рис. 169). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

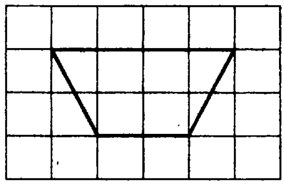


Рис. 169.

Решение.

1-й способ.

Площадь трапеции равна половине произведения суммы оснований на высоту. Обозначим трапецию $ABCD$. Проведём из точки D высоту DM к основанию AB. По рисунку 170 видно, что высота равна 2 см, основания $AB = 4$ см, $DC = 2$ см.

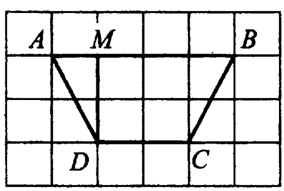


Рис. 170.

Площадь трапеции $S = \dfrac{(2+4)\cdot 2}{2} = 6$ (см^2).

Ответ: 6.

2-й способ.

Разобьём трапецию на три части — два прямоугольных треугольника и квадрат. Сторона квадрата 2, площадь квадрата $S_1 = 2 \cdot 2 = 4$, катеты каждого из прямоугольных треугольников 1 и 2, площадь каждого из прямоугольных треугольников равна половине произведения катетов, $S_2 = 1 \cdot 2 : 2 = 1$. Получаем, что площадь трапеции $S = 4+1+1 = 6$ (см^2).

Ответ: 6.

12. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция (см. рис. 171). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

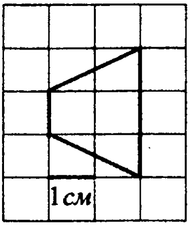


Рис. 171.

Решение.

Обозначим трапецию $ABCD$. Проведём высоту DH. На рисунке 172 видно, что высота равна 2 см, основание $AD = 1$ см, $BC = 3$ см.

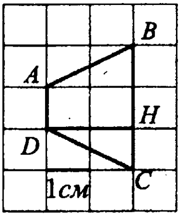


Рис. 172.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту: $S = \dfrac{(1+3)\cdot 2}{2} = 4$ (см^2).

Ответ: 4.

13. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(1;2)$, $(1;6)$, $(6;12)$, $(6;6)$ (см. рис. 173).

Решение.

1-й способ.

Площадь трапеции равна половине произведения суммы оснований на высоту. Обозначим трапецию $ABCD$ (см. рис. 174). Проведём из точки B перпендикуляр к CD. Этим перпендикуляром будет BD. Высота

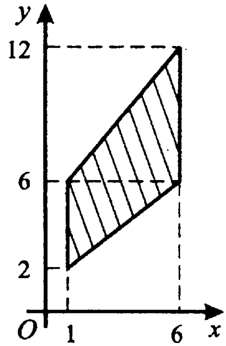


Рис. 173.

$BD = 6 - 1 = 5$, основания трапеции AB и CD равны 4 и 6 соответственно. Найдём площадь трапеции $S = \dfrac{(6+4)\cdot 5}{2} = 25$.

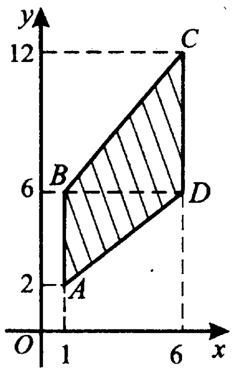


Рис. 174.

2-й способ.

Разобьём трапецию на два прямоугольных треугольника ABD и DBC (см. рис. 174). Площадь прямоугольного треугольника ABD с катетами $AB = 4$ и $BD = 5$ равна половине произведения катетов, то есть $4 \cdot 5 : 2 = 10$. Площадь прямоугольного треугольника DBC с катетами $DB = 5$ и $CD = 6$ равна половине произведения катетов, то есть $6 \cdot 5 : 2 = 15$. Площадь трапеции равна сумме площадей треугольников ABD и DBC. Получим $S = 10 + 15 = 25$.

Ответ: 25.

Площадь ромба

ⓘ *Немного полезной информации*

Напомним, что **ромб** — это четырёхугольник, у которого все стороны равны. В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны и делятся пополам точкой пересечения.

Площадь ромба равна половине произведения диагоналей:

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}.$$

На рисунке 175 приведены чертежи некоторых ромбов, у которых показаны диагонали.

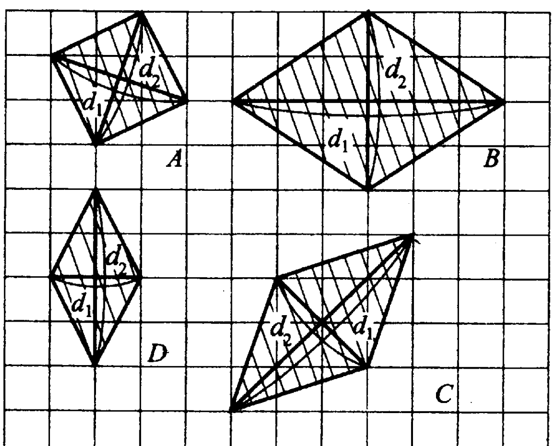


Рис. 175.

Обратите внимание, площади ромбов для рисунков B и D легко посчитать по этой формуле, а для рисунков A и C сначала придётся вычислить длины диагоналей. Например, для рисунка A длины диагоналей вычислим по теореме Пифагора: $d_1 = d_2 = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, $S_A = \dfrac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2} = 5$.

На рисунках B и D диагонали каждого из ромбов проходят по линиям клеток, считаем их длину по рисунку. Диагонали ромба B равны 6 и 4, диагонали ромба D равны 2 и 4. Найдём их площади. $S_B = \dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12$,

$S_D = \dfrac{2 \cdot 4}{2} = 4$.

Задачи с решениями

14. Найдите площадь ромба на рисунке C (см. рис. 175).

Решение.

1-й способ.

Диагонали находим как гипотенузы прямоугольных треугольников ACB и MPK по теореме Пифагора (см. рис. 176).

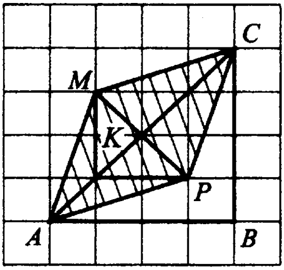


Рис. 176.

Диагональ $AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$, $MP = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$. Площадь ромба $S = \dfrac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{32}}{2} = 8$.

Ответ: 8.

2-й способ.

Достроим ромб $AMCP$ до квадрата $ATCB$ (см. рис. 177).

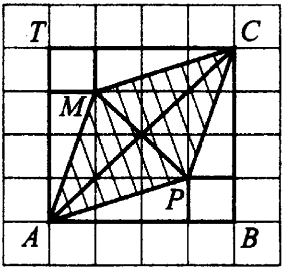


Рис. 177.

Чтобы найти площадь ромба, нужно из площади квадрата $ATCB$, которая составляет 16 клеток, вычесть площадь четырёх треугольников с катетами 1 и 3 и площадью 1,5 и двух квадратов со стороной 1 и площадью 1. Тогда площадь ромба равна $16 - (1{,}5 \cdot 4 + 1 \cdot 2) = 8$.

Ответ: 8.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображён треугольник (см. рис. 178). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

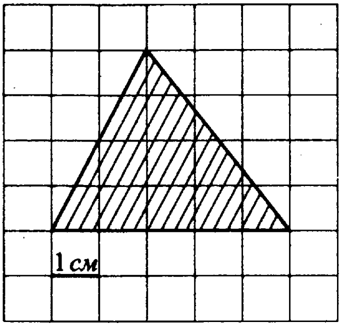


Рис. 178.

2. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция (см. рис. 179). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

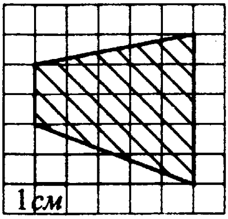


Рис. 179.

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 180.

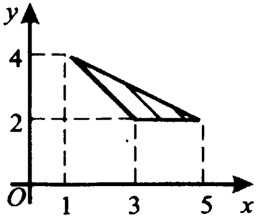


Рис. 180.

4. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(1; 4)$, $(5; 3)$, $(3; 2)$ (см. рис. 181).

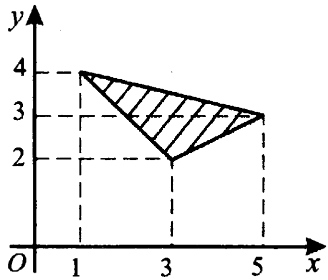


Рис. 181.

5. Найдите площадь S кольца, ограниченного окружностями, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 182). В ответе укажите $\dfrac{S}{\pi}$.

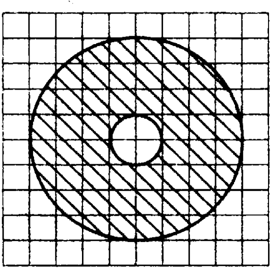


Рис. 182.

Вариант 2

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция (см. рис. 183). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

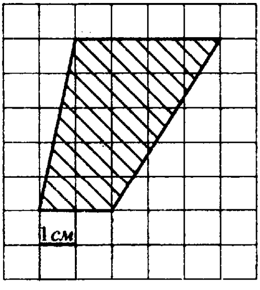


Рис. 183.

2. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(1;2)$, $(1;5)$, $(3;3)$, $(3;6)$ (см. рис. 184).

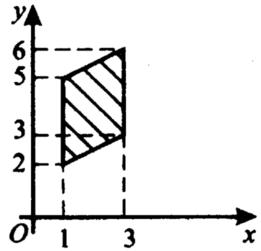


Рис. 184.

3. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(1;0)$, $(6;3)$, $(5;6)$, $(0;3)$ (см. рис. 185).

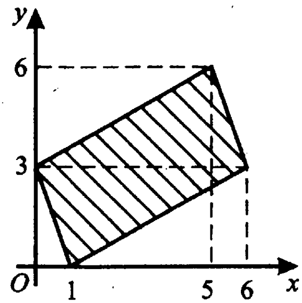


Рис. 185.

4. Найдите площадь S треугольника, считая стороны квадратных клеток равными 1 (см. рис. 186).

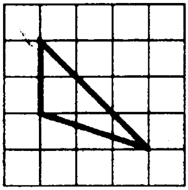


Рис. 186.

5. Найдите площадь S кольца, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 187). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

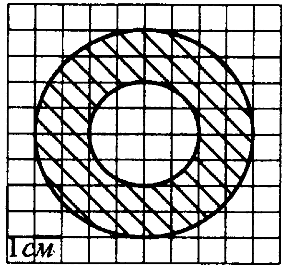


Рис. 187.

Вариант 3

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображён треугольник (см. рис. 188). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

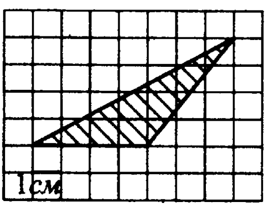


Рис. 188.

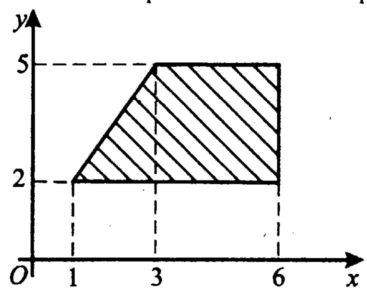


Рис. 189.

2. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(1; 2)$, $(3; 5)$, $(6; 5)$, $(6; 2)$ (см. рис. 189).

3. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке 190.

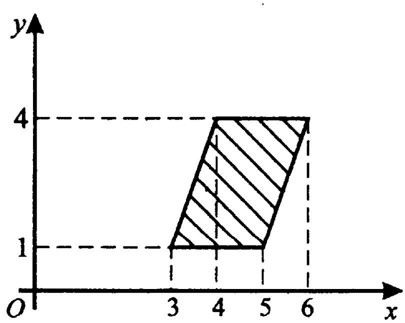


Рис. 190.

4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён прямоугольник (см. рис. 191). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

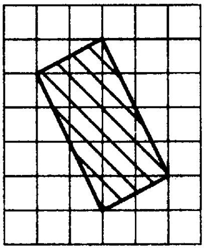


Рис. 191.

5. Найдите площадь S сектора, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 192). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

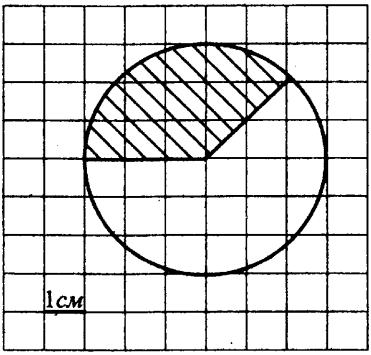


Рис. 192.

Вариант 4

1. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 193.

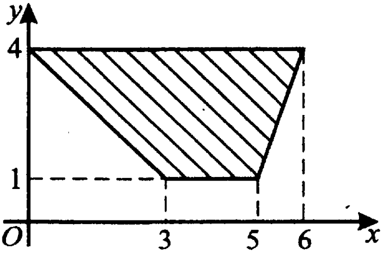


Рис. 193.

2. На рисунке 194 изображён треугольник. Найдите его площадь.

3. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (2; 2), (12; 2), (10; 12), (6; 12) (см. рис. 195).

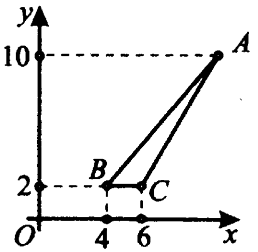


Рис. 194.

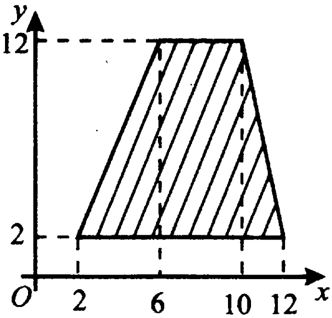


Рис. 195.

4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 196). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

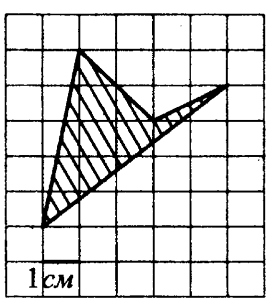


Рис. 196.

5. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображены две окружности (см. рис. 197). Найдите площадь S заштрихованной фигуры в квадратных сантиметрах. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

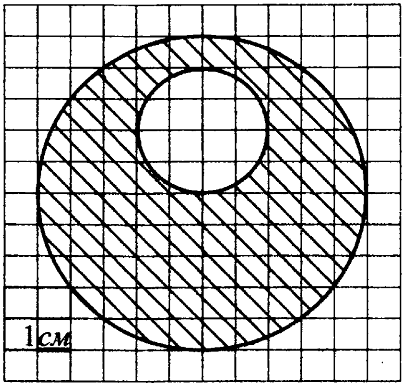


Рис. 197.

Вариант 5

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображён треугольник (см. рис. 198). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

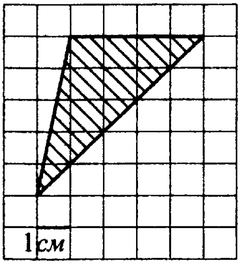


Рис. 198.

2. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(1;2)$, $(2;5)$, $(5;3)$, $(6;6)$ (см. рис. 199).

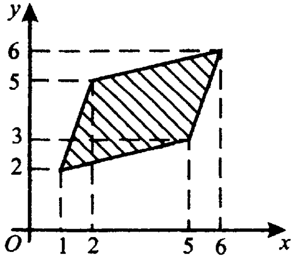


Рис. 199.

3. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 200.

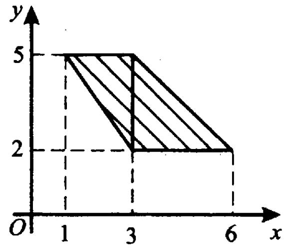


Рис. 200.

4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 201). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

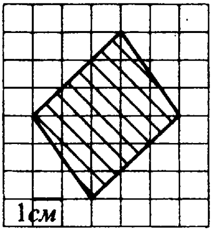


Рис. 201.

5. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображены две окружности (см. рис. 202). Найдите площадь S заштрихованной фигуры в квадратных сантиметрах. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

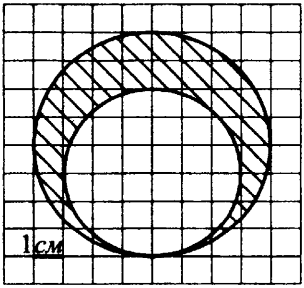


Рис. 202.

Координаты и векторы (B5, B8)

Диагностическая работа

1. Найдите абсциссу точки, симметричной точке $A(3, 8)$ относительно начала координат (см. рис. 203).

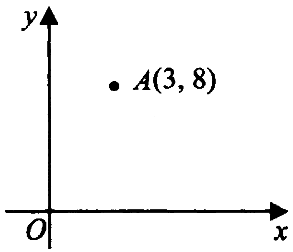


Рис. 203.

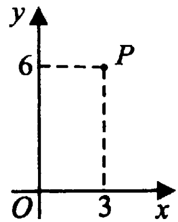


Рис. 204.

2. Найдите длину отрезка, соединяющего точки $A(5, -8)$ и $C(-3, -2)$.

3. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(3, 6)$, чтобы она касалась оси абсцисс (см. рис. 204)?

4. Диагонали ромба $ABCD$ равны 60 и 80 (см. рис. 205). Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

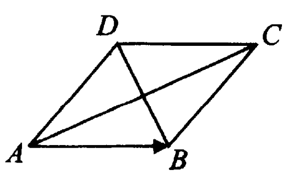


Рис. 205.

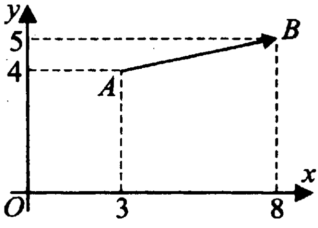


Рис. 206.

5. Найдите сумму координат вектора $\overrightarrow{AB}$ (см. рис. 206).

Координаты точек

Немного полезной информации

Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy (см. рис. 207).

Длина отрезка AB, для которого известны координаты его концов $A(x_A;\ y_A)$ и $B(x_B;\ y_B)$, определяется по формуле $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Координаты середины отрезка вычисляются по формулам: $x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

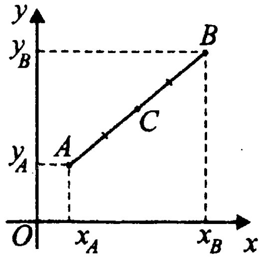


Рис. 207.

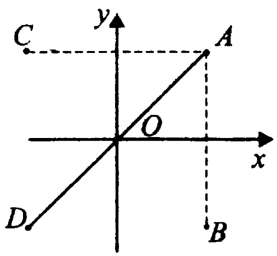


Рис. 208.

Если точки A и B симметричны относительно оси Ox (оси абсцисс), то их ординаты противоположны (см. рис. 208), а абсциссы равны: $A(x;\ y)$, $B(x;\ -y)$.

Если точки A и C симметричны относительно оси Oy, то их абсциссы противоположны, а ординаты равны: $A(x; y)$, $C(-x; y)$.

Если точки A и D симметричны относительно начала координат, то их координаты противоположны: $A(x;\ y)$, $D(-x;\ -y)$.

Задачи с решениями

1. Найдите расстояние от точки B с координатами $(12; -5)$ до начала координат (см. рис. 209).

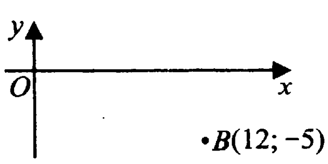


Рис. 209.

Решение.

Начало координат находится в точке $O(0;\ 0)$. Расстояние от O до B равно $OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2} =$
$= \sqrt{(12-0)^2 + (-5-0)^2} = 13.$

Ответ: 13.

2. Найдите абсциссу точки, симметричной точке $A(2;5)$ относительно оси Oy (см. рис. 210).

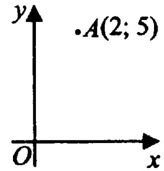


Рис. 210.

Решение.

Точке A симметрична точка $B(-2;\ 5)$ (см. рис. 211). Абсцисса точки B равна -2.

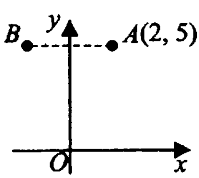


Рис. 211.

Ответ: -2.

3. Найдите ординату середины отрезка, соединяющего точки $A(-4;6)$ и $B(2;4)$ (см. рис. 212).

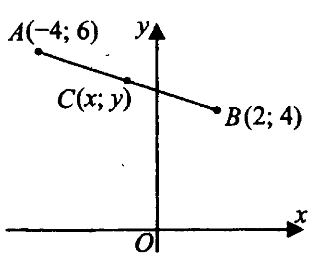


Рис. 212.

Решение.

Пусть $C(x;\ y)$ — середина AB. Тогда ордината точки C $y = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{6+4}{2} = 5$. Ордината равна 5.

Ответ: 5.

4. Точки $A(-1;-2)$, $B(4;-1)$, $C(6;5)$ и D являются вершинами параллелограмма. Найдите абсциссу точки P пересечения его диагоналей (см. рис. 213).

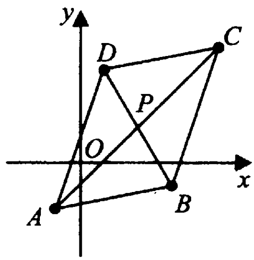


Рис. 213.

Решение.

Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Абсцисса точки P равна $\dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-1+6}{2} = 2{,}5$.

Ответ: 2,5.

5. Найдите ординату центра окружности (см. рис. 214), описанной около прямоугольника $ABCD$, вершины которого имеют координаты соответственно $(2;2)$, $(2;-6)$, $(-4;-6)$, $(-4;2)$.

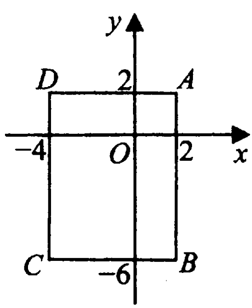


Рис. 214.

Решение.

Центр описанной окружности прямоугольника лежит на середине диагонали. Найдём ординату середины AC. $y = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{2+(-6)}{2} = -2$.

Ответ: -2.

6. Точки $O(0;0)$, $B(8;2)$, $C(0;8)$ являются вершинами параллелограмма (см. рис. 215). Найдите ординату точки M.

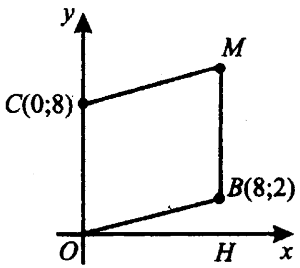


Рис. 215.

Решение.

Ордината — это координата по оси Oy. Она равна длине отрезка HM (см. рис. 216). $HB = 2$, так как ордината B равна 2. Поскольку противоположные стороны параллелограмма равны, то $OC = BM = 8$. Тогда $HM = 2 + 8 = 10$.

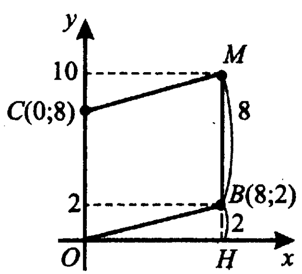


Рис. 216.

Ответ: 10.

7. Прямая a проходит через точки с координатами $(0;2)$ и $(-4;0)$. Прямая b проходит через точку с координатами $(0;-4)$ и параллельна прямой a (см. рис. 217). Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox.

Решение.

1-й способ.

Нарисуем картинку на клетчатой бумаге (см. рис. 218).

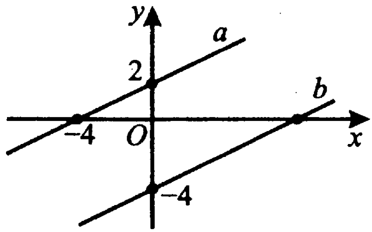


Рис. 217.

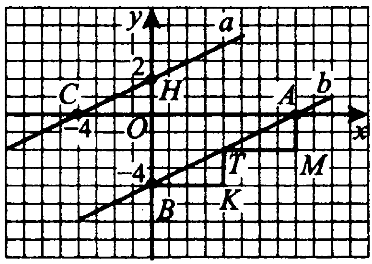


Рис. 218.

Абсцисса точки пересечения прямой b с осью Ox равна длине отрезка OA. Так как прямые параллельны, углы HCO и ABK равны, достроим 2 треугольника BKT и TMA, равных треугольнику HCO.

$OA = BK + TM = 4 + 4 = 8$.

Ответ: 8.

2-й способ.

Треугольники CHO и BOA подобны по трём углам (см. рис. 219), значит, их стороны пропорциональны. $OB : OH = OA : OC$, тогда $4 : 2 = OA : 4$. $OA = 8$.

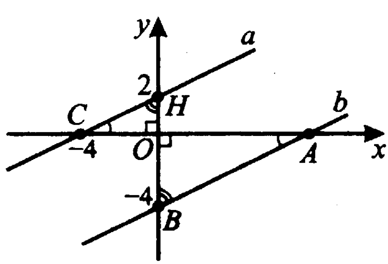


Рис. 219.

Ответ: 8.

8. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки с координатами (12; 0) и (0; 12) (см. рис. 220).

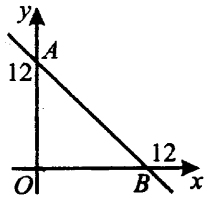


Рис. 220.

Решение.

1-й способ.

Угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, который прямая образует с положительным направлением оси Ox (там, где на оси стрелочка). В нашей задаче это угол a (см. рис. 221).

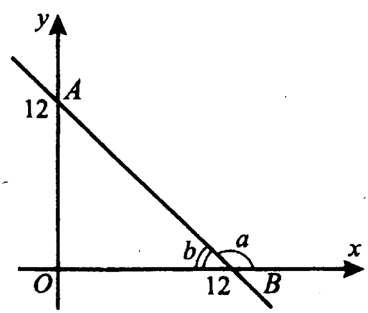


Рис. 221.

Он тупой, значит, его тангенс отрицательный и по модулю равен тангенсу угла $b = 180° - a$. Рассмотрим прямоугольный треугольник AOB с катетами $OA = 12$ и $OB = 12$. Тангенс угла b равен $\frac{OA}{OB} = \frac{12}{12} = 1$. Тангенс угла a равен -1. Угловой коэффициент прямой равен -1.

Ответ: -1.

2-й способ.

Угловой коэффициент прямой K можно получить так: $K = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, где Δy и Δx — разницы координат двух любых точек прямой. Например, для $A(0;12)$ $x_1 = 0$, $y_1 = 12$, для $B(12;0)$ $x_2 = 12$, $y_2 = 0$. $\Delta y = y_1 - y_2 = 12 - 0 = 12$. $\Delta x = x_1 - x_2 = 0 - 12 = -12$. $K = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 12 : (-12) = -1$.

Ответ: -1.

Векторы

Немного полезной информации

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек является началом, а какая — концом, называется **вектором**.

Вектор характеризуется модулем (длиной отрезка) и направлением. Два вектора, имеющие одинаковые модули и направления, равны.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначают $\overrightarrow{AB}$ или строчной (маленькой) буквой, например $\vec{a}$ (см. рис. 222).

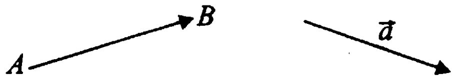


Рис. 222.

Модуль (длину) вектора обозначают $|\overrightarrow{AB}|$.

Сумма векторов — это вектор, который можно получить двумя способами (см. рис. 223). Заметим, что для любых точек A, B и C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

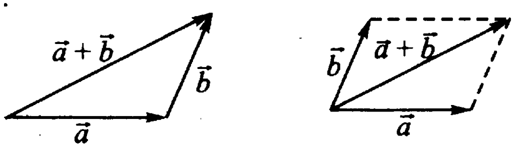


Рис. 223.

Разность векторов тоже можно получить двумя способами: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ или $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ (см. рис. 224).

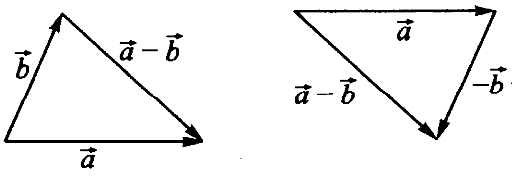


Рис. 224.

Задачи с решениями

9. Стороны правильного треугольника KNP равны 10 (см. рис. 225). Найдите длину вектора $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{KP}$.

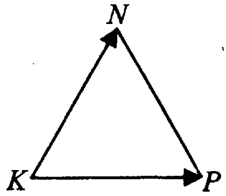


Рис. 225.

Решение.

$\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{PN}$, $|\overrightarrow{PN}| = 10$.

Ответ: 10.

10. Стороны правильного треугольника KNP равны 10 (см. рис. 226). Найдите квадрат длины вектора $\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{KP}$.

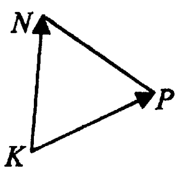


Рис. 226.

Решение.

Достроим $\triangle KPN$ до ромба $KPTN$ (см. рис. 227). $\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KT}$. Найдём длину KT из $\triangle KTP$ с углом $P = 120°$. Согласно теореме косинусов, $KT^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot (-0{,}5) = 300$.

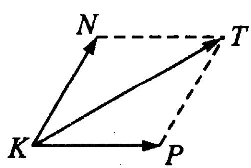


Рис. 227.

Ответ: 300.

Координаты вектора

① *Немного полезной информации*

Пусть точки A и B имеют координаты $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$.

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ вычисляются по формуле $x = x_B - x_A$, $y = y_B - y_A$.

Длина вектора, или модуль вектора $\overrightarrow{AB}\{x;\ y\}$:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Заметим, что если ввести координатные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ так, что длины этих векторов равны 1, а направление вектора $\vec{i}$ совпадает с направлением оси Ox, вектора $\vec{j}$ — оси Oy, то любой вектор $\vec{a}$ на координатной плоскости можно представить в виде разложения $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, где числа x, y называют координатами вектора $\vec{a}$. Обычно записывают $\vec{a}\{x;\ y\}$ или $\vec{a}(x;\ y)$.

Координаты суммы и разности векторов $\vec{a}\{x_a;\ y_a\}$ и $\vec{b}\{x_b;\ y_b\}$:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}\{x_c;\ y_c\}$, $x_c = x_a + x_b$, $y_c = y_a + y_b$.

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{p}\{x_p;\ y_p\}$, $x_p = x_a - x_b$, $y_p = y_a - y_b$.

Для параллелограмма известно, что его противоположные стороны равны и параллельны. Например, для параллелограмма $ABCD$ (см. рис. 228) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, так как $AB = CD$ и $AB \parallel CD$.

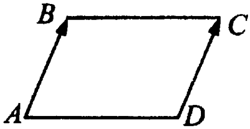


Рис. 228.

Диагонали параллелограмма пересекаются в середине диагоналей, поэтому $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$ (см. рис. 229).

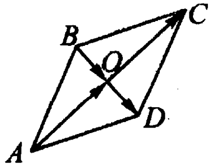


Рис. 229.

Скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Если векторы заданы координатами $\vec{a}\{x_a;\ y_a\}$, $\vec{b}\{x_b;\ y_b\}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$.

Задачи с решениями

11. Найдите длину вектора $\vec{a}\{5; -12\}$ (см. рис 230).

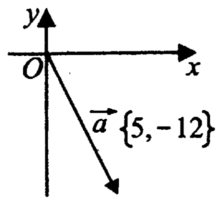


Рис. 230.

Решение.

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13.$

Ответ: 13.

12. Точки $A(-1; -2)$, $B(4; -1)$, $C(6; 5)$ и D являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки D (см. рис. 231).

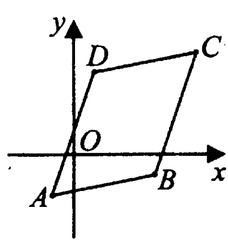


Рис. 231.

Решение.

Стороны параллелограмма $AD \parallel BC$ и $AD = BC$, поэтому $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Найдём ординаты векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$. $y_D - y_A = y_C - y_B$, $y_D - (-2) = 5 - (-1)$, $y_D = 6 - 2 = 4$.

Ответ: 4.

13. Стороны правильного треугольника MKN равны 10 (см. рис. 232). Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{KN}$ и $\overrightarrow{KM}$.

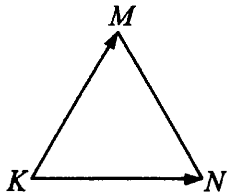


Рис. 232.

Решение.

Скалярное произведение векторов вычисляют по формуле $\overrightarrow{KN} \cdot \overrightarrow{KM} = |\overrightarrow{KN}| \cdot |\overrightarrow{KM}| \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами. В правильном $\triangle MKN$ углы равны по $60°$, поэтому $\overrightarrow{KN} \cdot \overrightarrow{KM} = 10 \cdot 10 \cdot \cos 60° = 100 \cdot 0{,}5 = 50$.

Ответ: 50.

14. Найдите сумму координат вектора $\vec{a} - \vec{b}$ (см. рис. 233).

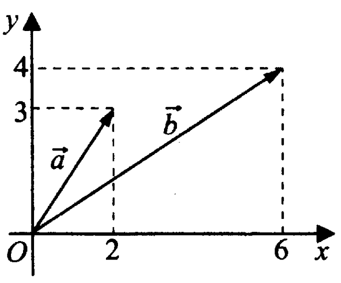


Рис. 233.

Решение.

Найдём координаты вектора $\vec{a}$. Он выходит из начала координат, поэтому его координаты равны координатам его конца: $\vec{a}\{2;\ 3\}$. Аналогично $\vec{b}\{6;\ 4\}$.

$\vec{a} - \vec{b}$ имеет координаты $\{2 - 6;\ 3 - 4\}$, то есть $\{-4;\ -1\}$. Сумма координат $-4 + (-1) = -5$.

Ответ: -5.

15. Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$ (см. рис. 233).

Решение.

$\vec{a}\{2;\ 3\}$, $\vec{b}\{6;\ 4\}$. Тогда $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{2 + 6;\ 3 + 4\}$ или $\{8;\ 7\}$.

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 8^2 + 7^2 = 64 + 49 = 113.$

Ответ: 113.

16. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 233).

Решение.

$\vec{a}\{2;\ 3\}$, $\vec{b}\{6;\ 4\}$. Тогда
$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 24.$

Ответ: 24.

17. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 234). Ответ выразите в градусах.

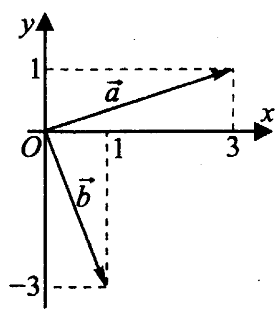


Рис. 234.

Решение.

$\vec{a}\{3;\ 1\}$, $\vec{b}\{1;\ -3\}$.

Тогда $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3)}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0.$

$\alpha = 90°.$

Ответ: 90.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Найдите ординату середины отрезка, соединяющего точки $A(-6; 4)$ и $B(4; 16)$.

2. Найдите сумму координат вектора $\vec{a} - \vec{b}$ (см. рис. 235).

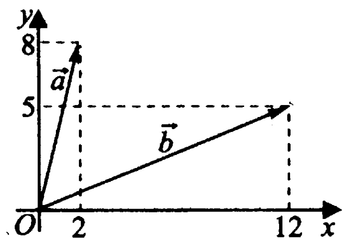


Рис. 235.

3. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 235).

4. Стороны правильного треугольника MKP равны 12 (см. рис. 236). Найдите длину вектора $\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MP}$.

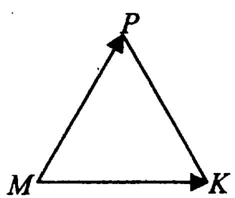


Рис. 236.

5. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 237). Ответ дайте в градусах.

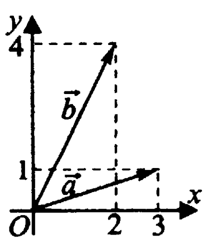


Рис. 237.

Вариант 2

1. Найдите абсциссу середины отрезка, соединяющего точки $O(0;0)$ и $A(6;4)$.

2. Найдите ординату точки пересечения оси Oy и отрезка, соединяющего точки $A(-4;6)$ и $B(4;0)$.

3. Точки $O(0;0)$, $A(8;6)$, $B(3;4)$ и D являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки D (см. рис. 238).

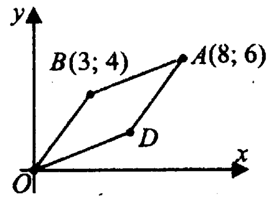


Рис. 238.

4. Найдите длину вектора $\vec{a}\ \{9;40\}$.

5. Стороны правильного треугольника MKP равны $5\sqrt{3}$ (см. рис. 239). Найдите длину вектора $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MK}$.

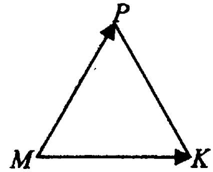


Рис. 239.

Вариант 3

1. Найдите ординату точки, симметричной точке $B(6;-2)$ относительно оси абсцисс (см. рис. 240).

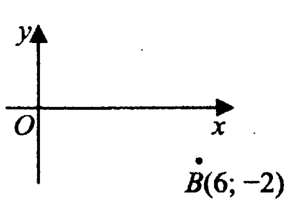


Рис. 240.

2. Найдите косинус угла наклона отрезка, соединяющего точки $O(0;0)$ и $A(5;12)$, к оси абсцисс (см. рис. 241). В ответ запишите косинус угла, умноженный на 26.

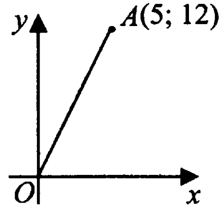


Рис. 241.

3. Точки $O(0;0)$, $A(8;6)$, $B(3;4)$ и $D(5;2)$ являются вершинами четырёхугольника. Найдите абсциссу точки P пересечения его диагоналей (см. рис. 242).

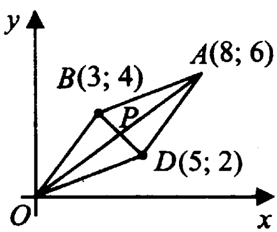


Рис. 242.

4. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(-2;4)$ имеет координаты $(6;2)$ (см. рис. 243). Найдите сумму координат точки B.

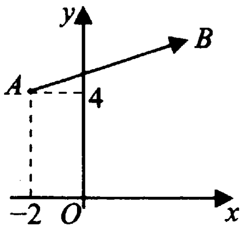


Рис. 243.

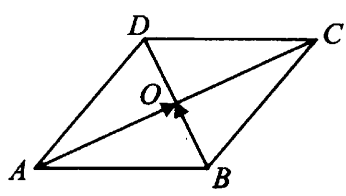


Рис. 244.

5. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 15 и 6 (см. рис. 244). Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

Вариант 4

1. Найдите абсциссу середины отрезка, соединяющего точки $A(6; 4)$ и $B(14; -2)$.

2. Найдите ординату точки пересечения оси Oy и прямой, проходящей через точку $B(7; 3)$ и параллельной прямой, проходящей через начало координат и точку $A(7; 6)$ (см. рис. 245).

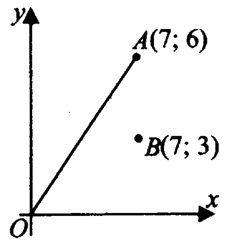


Рис. 245.

3. Найдите абсциссу центра окружности (см. рис. 246), описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $(9; 0)$, $(0; 12)$, $(9; 12)$.

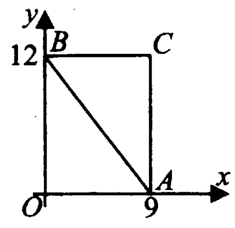


Рис. 246.

4. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 12 и 16 (см. рис. 247). Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

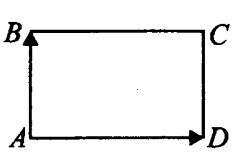


Рис. 247.

5. Стороны правильного треугольника MKP равны 14. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{MP}$.

Вариант 5

1. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 3 и 4. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC}$.

2. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(1; 5)$ имеет координаты $(4; 2)$. Найдите ординату точки B.

3. Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$ (см. рис. 248).

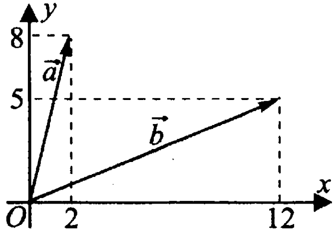


Рис. 248.

4. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 12 и 5. Диагонали пересекаются в точке O (см. рис. 249). Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

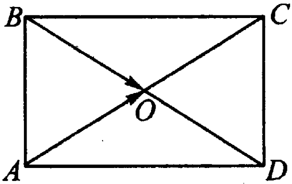


Рис. 249.

5. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 250).

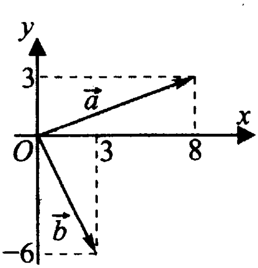


Рис. 250.

Углы и длины (B5, B8)

Диагностическая работа

1. В ромбе $MPKT$ угол MTP равен 41° (см. рис. 251). Найдите угол PKT. Ответ дайте в градусах.

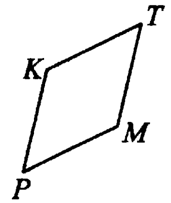


Рис. 251.

2. Касательные MA и MB к окружности образуют угол AMB, равный 159°. Найдите величину меньшей дуги AB, ограниченной точками касания. Ответ дайте в градусах (см. рис. 252).

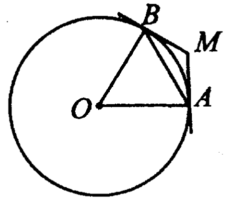


Рис. 252.

3. Найдите величину угла MPK. Ответ дайте в градусах (см. рис. 253).

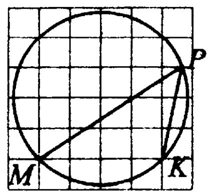


Рис. 253.

4. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 12 и 5, считая от вершины, противолежащей основанию (см. рис. 254). Найдите периметр треугольника.

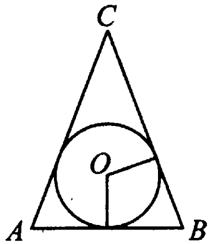


Рис. 254.

5. Точки A, B, C, D, расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги AB, BC, CD и AD, градусные величины которых относятся соответственно как $5 : 3 : 4 : 6$ (см. рис. 255). Найдите угол C четырёхугольника $ABCD$. Ответ дайте в градусах.

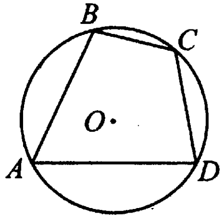


Рис. 255.

Свойства треугольника

Немного полезной информации

Сумма длин трёх сторон треугольника называется его **периметром**.

$P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC.$

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется **медианой треугольника**.

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется **биссектрисой треугольника**.

Перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется **высотой треугольника**.

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. На рисунке 256 MN — средняя линия треугольника ABC.

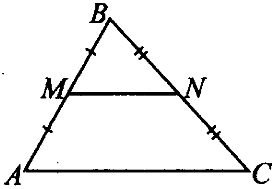


Рис. 256.

1. Средняя линия треугольника параллельна его стороне и равна половине этой стороны. $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$.

2. Средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника (см. рис. 257).

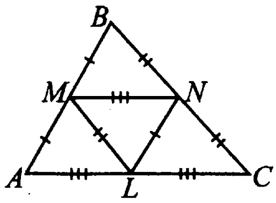


Рис. 257.

Сумма углов треугольника равна $180°$. На рисунке 258 $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

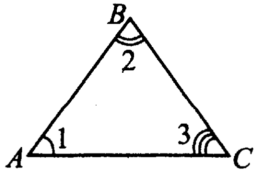


Рис. 258.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника.

Например, $\angle 4$ и $\angle 3$ — смежные, следовательно, $\angle 4$ — **внешний угол** треугольника ABC (см. рис. 259). Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним. Угол 4 — внешний угол треугольника ABC. $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.

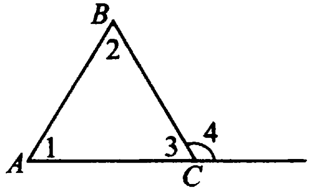


Рис. 259.

Задачи с решениями

1. В треугольнике MPK угол P равен 35° (см. рис. 260), угол K равен 95°, MB — биссектриса, E — такая точка на MP, что $ME = MK$. Найдите угол PBE. Ответ дайте в градусах.

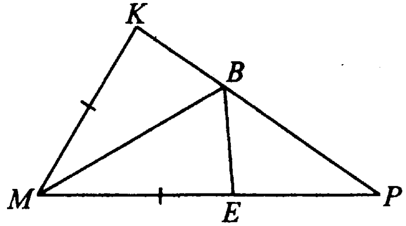


Рис. 260.

Решение.

$\triangle MKB = \triangle MBE$ по первому признаку ($KM = ME$ по условию, MB — общая сторона. $\angle KMB = \angle BME$, так как MB — биссектриса), $\angle BEM = \angle K = 95°$.

Внешний угол $\triangle BEP$ равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним, то есть $\angle BEM = \angle P + \angle PBE$.

$\angle PBE = 95° - 35° = 60°$.

Ответ: 60.

2. На рисунке 261 угол 1 равен 52°, угол 2 равен 26°, угол 3 равен 48°. Найдите угол 4. Ответ дайте в градусах.

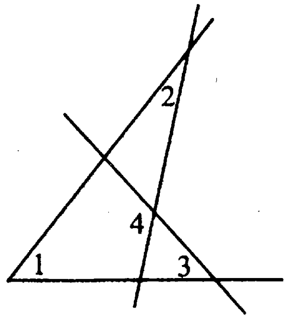


Рис. 261.

Решение.

Сумма углов треугольника равна 180°, а четырёхугольника — 360°.

В $\triangle ACE$ $\angle 5 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2 = 180^\circ - 52^\circ - 26^\circ = 102^\circ$ (см. рис. 262).

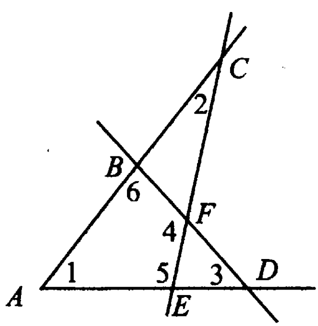


Рис. 262.

В $\triangle ABD$ $\angle 6 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 3 = 180^\circ - 52^\circ - 48^\circ = 80^\circ$.
В четырёхугольнике $ABFE$ $\angle 1 + \angle 6 + \angle 4 + \angle 5 = 360^\circ$,
$\angle 4 = 360^\circ - 52^\circ - 80^\circ - 102^\circ = 126^\circ$.

Ответ: 126.

3. В треугольнике VHR стороны $VR = HR = 12$, высота VD равна 6 (см. рис. 263). Найдите угол R. Ответ дайте в градусах.

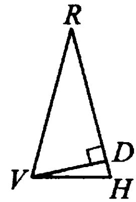


Рис. 263.

Решение.

В прямоугольном $\triangle VDR$ $\angle D = 90°$, гипотенуза $VR = 12$, катет $VD = 6$. Если катет равен половине гипотенузы, то напротив этого катета лежит угол, равный 30°. Поэтому $\angle R = 30°$.

Ответ: 30.

4. В треугольнике ABC CH — высота, AK — биссектриса, O — точка пересечения прямых CH и AK, угол BAK равен 31°. Найдите угол AOC. Ответ дайте в градусах (см. рис. 264).

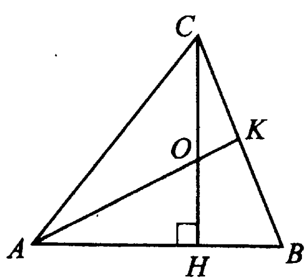


Рис. 264.

Решение.

AK — биссектриса, значит, $\angle CAK = \angle BAK = 31°$, $\angle CAH = 2 \cdot 31° = 62°$.

В $\triangle ACH$ $\angle AHC = 90°$, $\angle HCA = 180° - 90° - 62° = 28°$.

Рассмотрим $\triangle ACO$.

$\angle AOC = 180° - \angle HCA - \angle CAO = 180° - 28° - 31° = 121°$.

Ответ: 121.

5. Острые углы прямоугольного треугольника равны 39° и 51°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах (см. рис. 265).

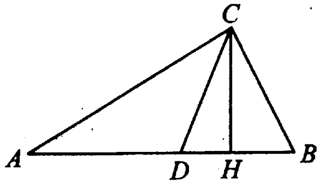


Рис. 265.

Решение.

В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 39°$, $\angle B = 51°$.

CD — биссектриса, $\angle ACD = \angle DCB = 45°$.

CH — высота, $\angle AHC = 90°$. Нужно найти $\angle DCH$, он равен разности $\angle ACH - \angle ACD$.

Найдём $\angle ACH$ из $\triangle ACH$.

$\angle ACH = 180° - 90° - 39° = 51°$. $\angle DCH = 51° - 45° = 6°$.

Ответ: 6.

6. Один из внешних углов треугольника равен 85°. Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как 2 : 3 (см. рис. 266). Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах.

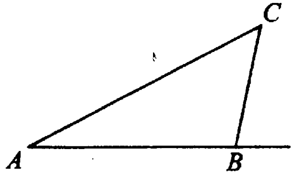


Рис. 266.

Решение.

Сумма углов, не смежных с данным внешним углом, равна величине этого внешнего угла, то есть $\angle A + \angle C = 85°$.

Обозначим $\angle A = 2x$, $\angle C = 3x$.

$2x + 3x = 85$, $5x = 85$, $x = 17$.

$\angle C = 3x = 3 \cdot 17 = 51°$ — наибольший из углов A и C.

Ответ: 51.

7. Основания трапеции AB и DC равны 14 и 10 соответственно (см. рис. 267). Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции диагональ BD.

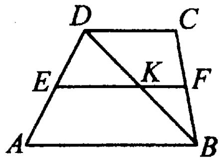


Рис. 267.

Решение.

Средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции, и её концы являются серединами боковых сторон. $DC \parallel AB \parallel EF$, $ED = EA$, $BF = CF$. Параллельные прямые DC, EF и AB проходят через концы равных отрезков на одной прямой (AD), значит, и на прямой DB они отсекают равные отрезки (по теореме Фалеса). $BK = DK \Rightarrow EK$ и KF — средние линии $\triangle ADB$ и $\triangle DCB$. Средняя линия треугольника равна половине параллельной ей стороны, $EK = AB : 2 = 14 : 2 = 7$; $KF = DC : 2 = 10 : 2 = 5$. Больший из отрезков равен 7.

Ответ: 7.

8. В треугольнике ABC проведена биссектриса AE. $AB = AE = CE$. Найдите меньший угол треугольника ABC. Ответ дайте в градусах (см. рис. 268).

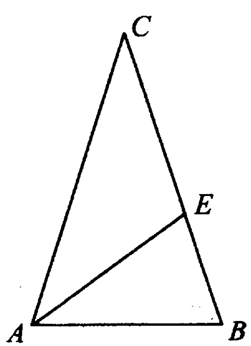


Рис. 268.

Решение.

$AB = AE \Rightarrow \triangle ABE$ — равнобедренный, и углы при основании равны (см. рис. 269). $\angle 1 = \angle 2$. Аналогично в равнобедренном $\triangle ACE$ $\angle 3 = \angle 4$. $\angle 5 = \angle 3$, так как AE — биссектриса. $\angle CAB + \angle B + \angle C = 180°$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$ как суммы углов треугольников. Обозначим $\angle B = x$, $\angle 4 = \angle C = y$.

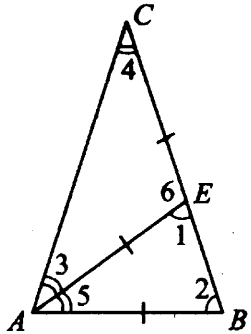


Рис. 269.

$$\begin{cases} 2y + x + y = 180, \\ y + x + x = 180; \end{cases} \quad \begin{cases} 3y + x = 180, \\ y + 2x = 180; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 72, \\ y = 36. \end{cases}$$

$\angle C = 36°$, $\angle B = 72°$, $\angle A = 2y = 72°$.

Меньший угол равен 36°.

Ответ: 36.

9. В треугольнике ABC угол A равен 48°, $\angle ACD = 102°$. На продолжении стороны AB отложен отрезок $BD = BC$. Найдите угол BCD. Ответ дайте в градусах (см. рис. 270).

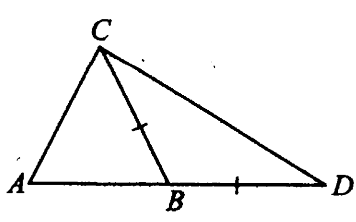


Рис. 270.

Решение.

Сумма углов треугольника равна 180°, $\angle A + \angle D + \angle ACD = 180°$, $\angle D = 180° - 48° - 102° = 30°$. $\triangle DBC$ — равнобедренный ($BC = BD$) $\Rightarrow$ углы при основании равны, $\angle BCD = \angle D = 30°$.

Ответ: 30.

10. В треугольнике ABC $AB = BC$. Внешний угол при вершине B равен 156°. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах (см. рис. 271).

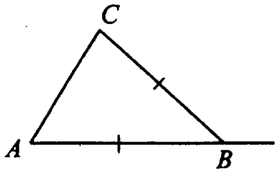


Рис. 271.

Решение.

Внешний угол треугольника равен сумме углов, не смежных с ним. $\angle A + \angle C = 156°$. $\triangle ABC$ — равнобедренный, углы при основании равны. $\angle A = \angle C = 156° : 2 = 78°$.

Ответ: 78.

Окружность, касательные и секущие

ⓘ *Немного полезной информации*

Окружность — это множество точек плоскости, расположенных на одинаковом расстоянии от данной точки (центра).

Отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой окружности, называется **радиусом**.

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется **касательной**. k — касательная (см. рис. 272).

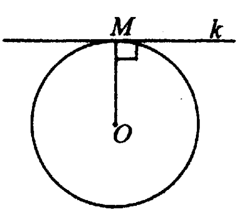


Рис. 272.

Прямая, имеющая с окружностью две общие точки, называется **секущей**.

Свойства касательных и секущих.

1°. Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

2°. Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через центр окружности и эту общую точку.

Пусть дана окружность с центром O, MP и MK — касательные, K и P — точки касания $\Longrightarrow MP = MK$, $\angle 1 = \angle 2$, $OP^2 + PM^2 = OM^2$ (см. рис. 273).

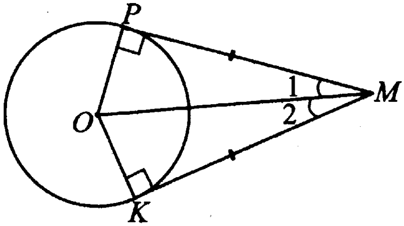


Рис. 273.

3°. Если касательная пересекается с секущей, то квадрат отрезка касательной равен произведению расстояний от общей точки прямых до точек пересечения секущей с окружностью.

Пусть дана окружность с центром O, MK — секущая, MP — касательная, P — точка касания $\Longrightarrow MP^2 = MK \cdot MK_1$ (см. рис. 274).

Хорда — это отрезок, концы которого лежат на окружности.

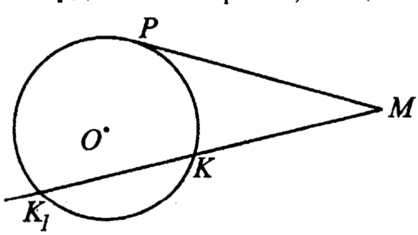


Рис. 274.

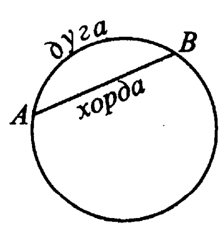


Рис. 275.

AB — хорда, $\smile AB$ — дуга (см. рис. 275).

Дуга — это часть окружности, соединяющая две точки окружности (см. рис. 275).

Задачи с решениями

11. К окружности, вписанной в треугольник ABC, проведены три касательные (см. рис. 276). Периметры отсечённых треугольников равны 5, 6, 8. Найдите периметр треугольника ABC.

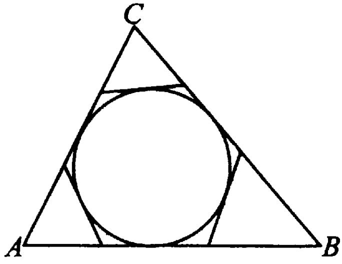


Рис. 276.

Решение.

Рассмотрим рис. 277. Периметр $\triangle CDP$ равен $DC+CP+PM+MD$, также $P_{BGE} = BG+GF+FE+EB$, $P_{ANR} = NA+AR+RL+LN$.

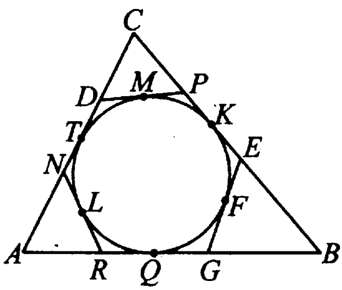


Рис. 277.

Но отрезки $TD = DM$, $MP = PK$, $KE = EF$, $FG = GQ$, $QR = RL$, $LN = NT$ как отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки. Тогда

$P_{ABC} = AB + BC + CA = P_{CDP} + P_{BGE} + P_{ANR} = 5 + 6 + 8 = 19.$

Ответ: 19.

Углы, связанные с окружностью

Угол с вершиной в центре окружности называется **центральным углом**.

O — центр окружности, $\angle AOB$ — центральный угол, опирающийся на дугу BA (см. рис. 278).

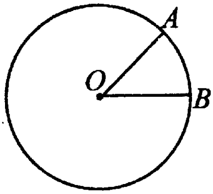


Рис. 278.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным углом**.

Точки A, B, C лежат на окружности $\Longrightarrow$ $\angle BAC$ — вписанный угол, опирающийся на дугу BC (см. рис. 279).

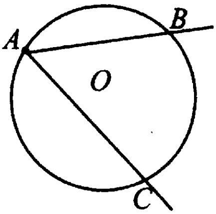


Рис. 279.

1°. Центральный угол равен величине дуги, на которую он опирается.

O — центр окружности, A и B лежат на окружности. $\angle AOB = \smile AB$ (см. рис. 278).

2°. Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

$\angle BAC = \frac{1}{2} \smile BC$ (см. рис. 279).

3°. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

A, B, M, C лежат на окружности. $\angle ABC = \angle AMC$ (см. рис. 280).

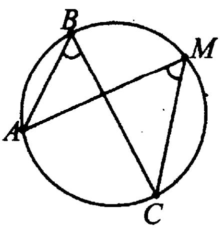


Рис. 280.

4°. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность (на диаметр), равен 90° (см. рис. 281).

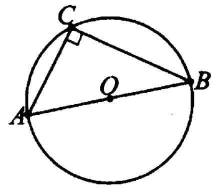


Рис. 281.

5°. Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними.

BA — хорда, BC — касательная $\Longrightarrow \angle ABC = \frac{1}{2}\smile AB$ (см. рис. 282).

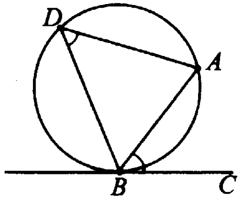


Рис. 282.

6°. Угол между касательной и хордой равен вписанному углу, который опирается на дугу, заключённую между касательной и хордой.

BA — хорда, BC — касательная $\Longrightarrow \angle ABC = \angle ADB$ (см. рис. 282).

Задачи с решениями

12. Найдите угол ACO, если прямая CA касается окружности в точке A, точка O — центр окружности, дуга AD окружности, заключённая внутри этого угла, равна 128° (см. рис. 283). Ответ дайте в градусах.

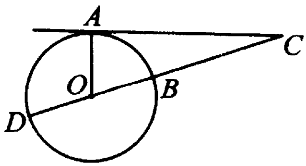


Рис. 283.

Решение.

Угол между касательной и радиусом, проведённым в точку касания, прямой: $\angle OAC = 90°$. Центральный угол DOA равен угловой величине дуги, на которую он опирается, то есть $\angle DOA = \smile DA = 128°$. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов, не смежных с ним,
$\angle DOA = \angle OAC + \angle ACO$, $\angle ACO = 128° - 90° = 38°$.

Ответ: 38.

13. Хорда AB стягивает дугу окружности в 104°. Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B. Ответ дайте в градусах (см. рис. 284).

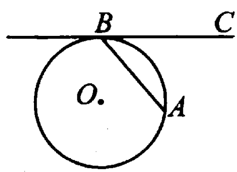


Рис. 284.

Решение.

Угол между хордой и касательной к окружности, проведённой из конца хорды, равен половине угловой величины дуги, которую стягивает эта хорда. $\angle CBA = 0{,}5\smile AB = 0{,}5 \cdot 104° = 52°$.

Ответ: 52.

14. Через концы A и B дуги окружности в 56° проведены касательные AC и BC. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах (см. рис. 285).

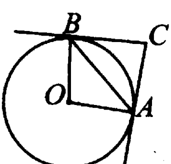


Рис. 285.

Решение.

$\angle OBC = \angle OAC = 90°$, так как касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания. $\angle BOA = \smile BA = 56°$ (центральный угол опирается на дугу 56°). В четырёхугольнике $OBCA$ сумма углов равна 360°. $\angle ACB = 360° - 90° - 90° - 56° = 124°$.

Ответ: 124.

15. Найдите величину угла MPK. Ответ дайте в градусах (см. рис. 286).

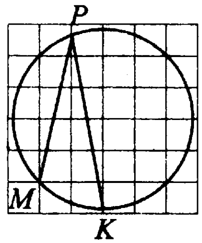


Рис. 286.

Решение.

При формулировании подобных задач имеется в виду, что отмеченная на рисунке дуга MK меньше всей окружности в целое число раз.

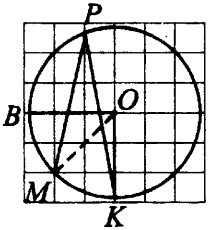


Рис. 287.

Дуга BK — одна четвёртая всей окружности (см. рис. 287), MK — одна восьмая, то есть $360^\circ : 8 = 45^\circ$. Вписанный $\angle MPK$ опирается на дугу MK, значит

$\angle MPK = \frac{1}{2} \smile MOK = 45^\circ : 2 = 22{,}5^\circ$.

Ответ: 22,5.

16. Центральный угол на 54° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности (см. рис. 288). Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.

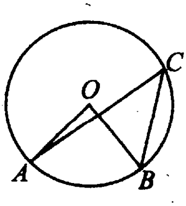


Рис. 288.

Решение.

Центральный угол в два раза больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Если он на 54° больше вписанного угла, то вписанный угол равен 54°.

Ответ: 54.

17. В окружности с центром O AB и CD — диаметры (см. рис. 289). Центральный угол AOD равен 108°. Найдите вписанный угол ABC. Ответ дайте в градусах.

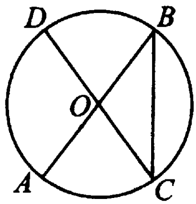


Рис. 289.

Решение.

Диаметр DC опирается на полуокружность $\smile DC = 180°$.
$\smile AC = \smile DC - \smile DA = 180° - \angle DOA = 180° - 108° = 72°$. Вписанный угол ABC равен половине угловой величины дуги, на которую опирается. $\angle ABC = 0{,}5 \smile AC = 0{,}5 \cdot 72° = 36°$.

Ответ: 36.

18. Найдите угол ACB, если вписанные углы AMB и MAK опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 106° и 42° (см. рис. 290). Ответ дайте в градусах.

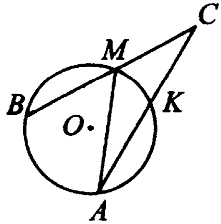


Рис. 290.

Решение.

Вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается. $\angle BMA = 0{,}5\smile AB = 0{,}5\cdot 106^\circ = 53^\circ$. $\angle MAK = 0{,}5\smile MK = 0{,}5\cdot 42^\circ = 21^\circ$. $\angle BMA$ — внешний к углу M $\triangle AMC$, значит, $\angle BMA$ равен сумме $\angle MCA$ и $\angle MAC$ этого треугольника.

$\angle C = \angle BMA - \angle MAC = 53^\circ - 21^\circ = 32^\circ$.

Ответ: 32.

19. Хорда MP делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 4 : 8. Под каким углом видна эта хорда из точки K, принадлежащей меньшей дуге MP? Ответ дайте в градусах (см. рис. 291).

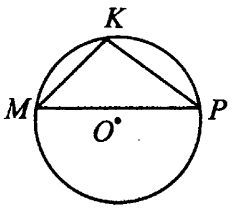


Рис. 291.

Решение.

$\angle MKP$ — вписанный, он равен половине дуги MP, на которую он опирается. Окружность 360° делится на две части, которые относятся как 4 : 8, обозначим эти части $4x$ и $8x$. $4x + 8x = 360$, $12x = 360$, $x = 360 : 12 = 30$, бóльшая дуга $8x = 8\cdot 30 = 240$. $\angle MKP = 0{,}5\smile MP = 0{,}5\cdot 240^\circ = 120^\circ$.

Ответ: 120.

Описанные и вписанные окружности

Окружность называют **вписанной** в угол или многоугольник (в частности, в треугольник), если она касается всех сторон соответствующего угла или многоугольника (см. рис. 292).

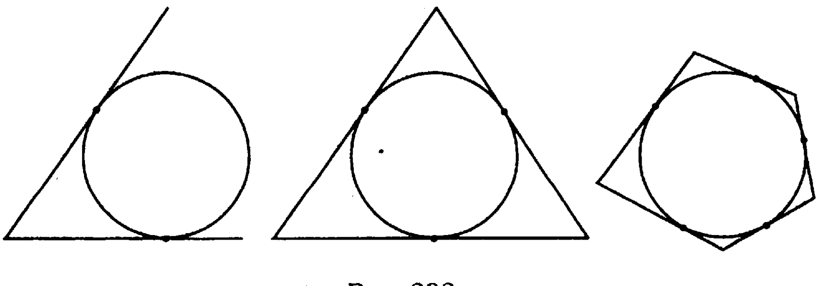


Рис. 292.

Окружность называют **описанной** вокруг многоугольника, если все его вершины лежат на этой окружности (см. рис. 293).

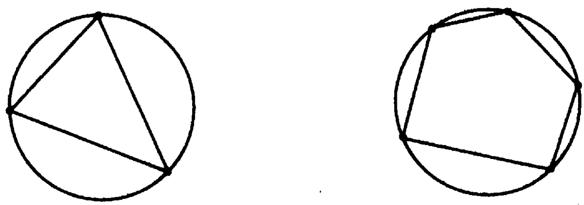


Рис. 293.

1°. Центр вписанной в угол окружности лежит на биссектрисе угла.

Окружность с центром O вписана в угол $BAC \Longrightarrow \angle BAO = \angle CAO$ (см. рис. 294).

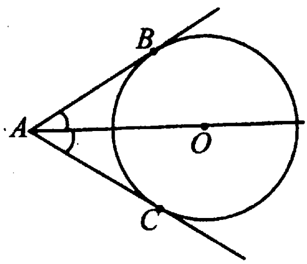


Рис. 294.

2°. Центр вписанной в многоугольник окружности лежит в точке пересечения его биссектрис.

В $\triangle ABC$ точка O — центр вписанной окружности $\Longrightarrow BO, CO, AO$ — биссектрисы углов $\triangle ABC$ (см. рис. 295).

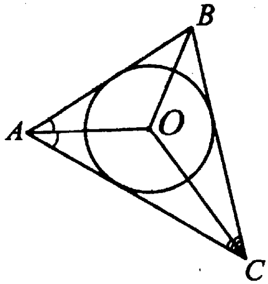


Рис. 295.

3°. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

Окружность вписана в четырёхугольник $ABCD \Longrightarrow$
$AD + BC = AB + DC$ (см. рис. 296).

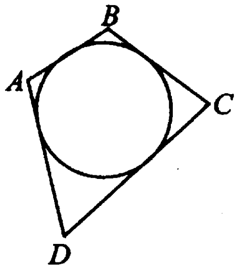


Рис. 296.

4°. Центр описанной окружности многоугольника — точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

$\triangle ABC$ вписан в окружность, O — центр (см. рис. 297).

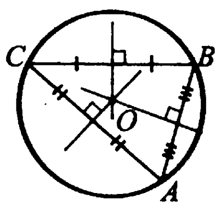


Рис. 297.

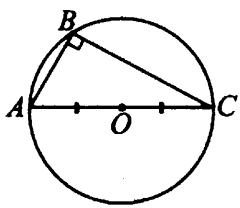


Рис. 298.

5°. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы.

$\triangle ABC$ вписан в окружность с центром O, $\angle B = 90° \Longrightarrow AO = OC$, точка O лежит на AC (см. рис. 298).

6°. Радиус r окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, можно вычислить по формуле $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, где a и b — катеты, c — гипотенуза.

7°. Центры вписанной и описанной окружности правильного треугольника совпадают, центр лежит на высоте треугольника и делит её в отношении $2:1$, считая от вершины.

8°. Если четырёхугольник вписан в окружность, суммы его противоположных углов равны 180°.

$ABCD$ вписан в окружность (см. рис. 299). $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.

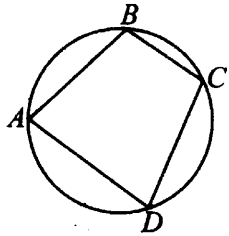


Рис. 299.

9°. Если трапеция вписана в окружность, то она равнобедренная.

Задачи с решениями

20. Угол между стороной правильного n-угольника, вписанного в окружность, и радиусом этой окружности, проведённым в одну из вершин n-угольника (принадлежащих этой стороне), равен 67,5° (см. рис. 300). Найдите n.

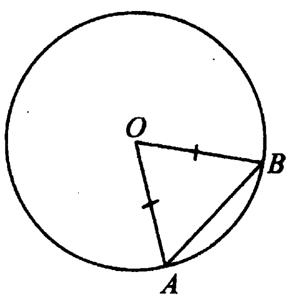


Рис. 300.

Решение.

Пусть AB — сторона n-угольника. $\triangle AOB$ — равнобедренный, так как $OA = OB$ как радиусы, значит, углы при основании равны и $\angle A = \angle B = 67{,}5°$. Найдём $\angle AOB$. $\angle A + \angle B + \angle O = 180° \Rightarrow \angle AOB = 180° - 67{,}5° \cdot 2 = 45°$. Если n-угольник правильный, то $\angle AOB = 360° : n$, тогда $n = 360 : 45 = 8$.

Ответ: 8.

21. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен $113°$, угол DAC равен $52°$. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах (см. рис. 301).

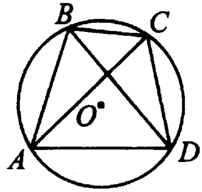


Рис. 301.

Решение.

$\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC$. $\angle DAC = \angle DBC = 52°$ (как вписанные углы, которые опираются на одну и ту же дугу). $\angle ABD = 113° - 52° = 61°$.

Ответ: 61.

22. Сторона AB остроугольного треугольника ABC равна радиусу описанной около него окружности (см. рис. 302). Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

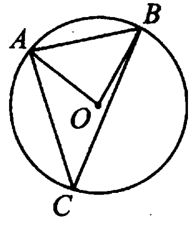


Рис. 302.

Решение.

Пусть O — центр описанной окружности, тогда по условию $OA = OB = AB$ и $\triangle AOB$ правильный, $\angle O = 60°$ — центральный угол, который опирается на дугу AB. $\angle ACB$ — вписанный, опирается на дугу AB. $\angle ACB = 0{,}5 \cdot \angle AOB = 0{,}5 \cdot 60° = 30°$.

Ответ: 30.

23. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 25, основание равно 30. Найдите радиус вписанной окружности (см. рис. 303).

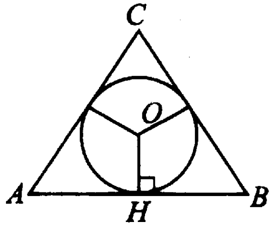


Рис. 303.

Решение.

В равнобедренном треугольнике центр вписанной окружности O лежит на высоте, проведённой к основанию, т.е. $O \in CH$ (см. рис. 304). O — точка пересечения биссектрис. $OH = r$. AO — биссектриса, она делит сторону CH треугольника ACH на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, $\dfrac{AH}{HO} = \dfrac{AC}{CO}$. CH — медиана, как высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника ABC, $AH = 30 : 2 = 15$. Из $\triangle ACH$ по теореме Пифагора $CH = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$. $\dfrac{15}{r} = \dfrac{25}{20 - r}$, $25r = 15(20 - r)$, $40r = 15 \cdot 20$, $r = 7{,}5$.

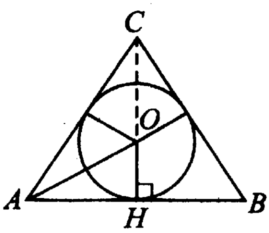


Рис. 304.

Ответ: 7,5.

24. В треугольнике MPR $MR = 32$, $PR = 24$, угол R равен $90°$. Найдите радиус вписанной окружности (см. рис. 305).

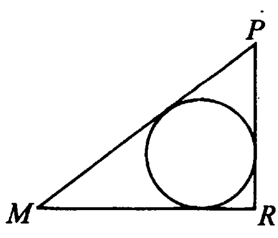


Рис. 305.

Решение.

Воспользуемся формулой для радиуса r вписанной в прямоугольный треугольник окружности. Пусть a, b — катеты, а c — гипотенуза. Тогда $r = \dfrac{a+b-c}{2}$. Найдём MP. $MP = \sqrt{32^2+24^2} = 40$, $r = \dfrac{32+24-40}{2} = 8$.

Ответ: 8.

25. Около окружности, радиус которой равен $7\sqrt{2}$, описан квадрат (см. рис. 306). Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

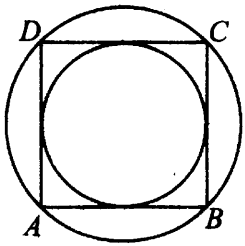


Рис. 306.

Решение.

Если окружность вписана в квадрат, то её диаметр равен стороне квадрата. $AB = 2\cdot 7\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$.

Если окружность описана вокруг квадрата, то её диаметр является диагональю квадрата, радиус равен половине диаметра. $AC = AB\sqrt{2}$ (например, можно получить это из теоремы Пифагора). $AC = 14\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 28$. Тогда $R = 28 : 2 = 14$.

Ответ: 14.

26. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 42, её бóльшая боковая сторона равна 12 (см. рис. 307). Найдите радиус окружности.

Решение.

У четырёхугольника, описанного около окружности, суммы длин противоположных сторон равны, то есть $BC + AD = DC + AB$. Поэтому

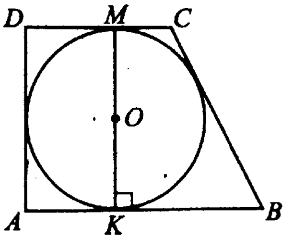


Рис. 307.

$AD + CB = \frac{P}{2} = 42 : 2 = 21$. Наибольшая боковая сторона $CB = 12$ $\Rightarrow AD = 21 - 12 = 9$. Так как $AD \perp AB$, то $MK = AD = 2R$, где R — радиус вписанной окружности. Тогда $R = 9 : 2 = 4{,}5$.

Ответ: 4,5.

27. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 30, основание равно 36 (см. рис. 308). Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

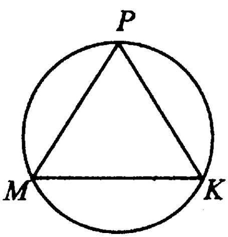


Рис. 308.

Решение.

По теореме синусов $\frac{MP}{\sin K} = 2R$, где R — радиус описанной около $\triangle KMP$ окружности. Пусть $MP = PK = 30$, $MK = 36$. Проведём высоту PH (см. рис. 309). В равнобедренном треугольнике KMP высота PH является медианой, $MH = HK = 18$. Найдём PH по теореме Пифагора.
$PH = \sqrt{PK^2 - HK^2} = \sqrt{30^2 - 18^2} = \sqrt{576} = 24$.

$\sin K = \frac{PH}{PK} = \frac{24}{30} = 0{,}8$.

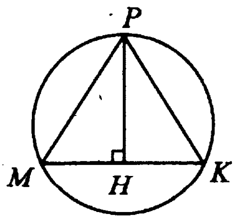


Рис. 309.

$$R = \frac{MP}{2\sin K} = \frac{30}{0{,}8 \cdot 2} = 18{,}75.$$

Ответ: 18,75.

28. Угол C треугольника ABC, вписанного в окружность радиусом 12, равен 30° (см. рис. 310). Найдите сторону AB этого треугольника.

Решение.

По теореме синусов для радиуса описанной окружности R выполняется $2R = \dfrac{AB}{\sin C}$.

$AB = 2R\sin C = 2 \cdot 12\sin 30° = 2 \cdot 12 \cdot 0{,}5 = 12.$

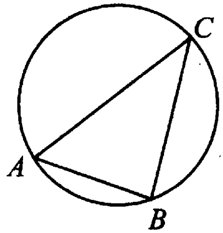


Рис. 310.

Ответ: 12.

29. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 14. Найдите гипотенузу этого треугольника.

Решение.

Центр описанной окружности прямоугольного треугольника лежит на середине гипотенузы, значит, гипотенуза — диаметр. Тогда гипотенуза равна $2 \cdot 14 = 28$.

Ответ: 28.

30. Основания равнобедренной трапеции равны 18 и 80. Радиус описанной окружности равен 41 (см. рис. 311). Найдите высоту трапеции, если центр описанной окружности лежит внутри трапеции.

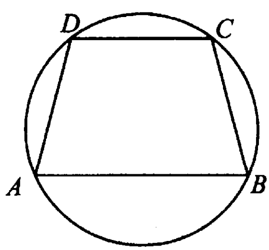


Рис. 311.

Решение.

Проведём высоту HK через центр окружности O, H и K будут лежать на серединах оснований (см. рис. 312). $\triangle AOK$ и $\triangle DHO$ — прямоугольные, $HO^2 = OD^2 - DH^2 = 41^2 - 9^2 = 1600$, $HO = 40$. $OK^2 = AO^2 - AK^2 = 41^2 - 40^2 = 81$, $OK = 9$.
$HK = HO + OK = 40 + 9 = 49$.

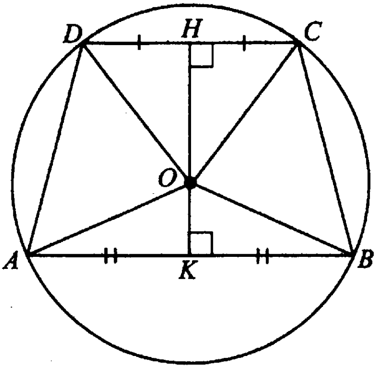


Рис. 312.

Ответ: 49.

31. Точки A, B, C, D, расположенные на окружности, являются вершинами четырёхугольника $ABCD$. Градусные величины углов A, B и D относятся соответственно как 5 : 2 : 6 (см. рис. 313). Найдите угол C четырёхугольника $ABCD$. Ответ дайте в градусах.

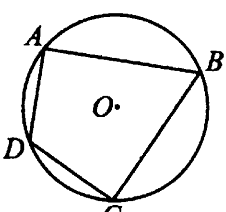


Рис. 313.

Решение.

Четырёхугольник $ABCD$ — вписанный, поэтому сумма его противоположных углов равна 180°.

По условию $\angle A : \angle B : \angle D = 5 : 2 : 6$.

Обозначим $\angle A = 5x$, $\angle B = 2x$, $\angle D = 6x$.

$\angle B + \angle D = 180°$, $8x = 180°$, $x = 22{,}5°$.

$\angle C = 180° - \angle A = 180° - 5x = 180° - 112{,}5° = 67{,}5°$.

Ответ: 67,5.

32. Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 7 (см. рис. 314).

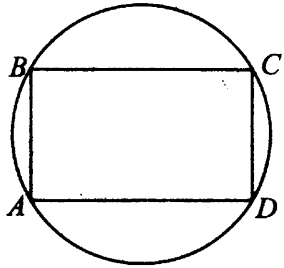


Рис. 314.

Решение.

Если прямоугольник вписан в окружность, то центр этой окружности лежит на середине его диагонали, то есть диагональ в 2 раза больше радиуса. $AC = 2 \cdot 7 = 14$.

Ответ: 14.

33. Периметр правильного шестиугольника равен 612 (см. рис. 315). Найдите диаметр описанной окружности.

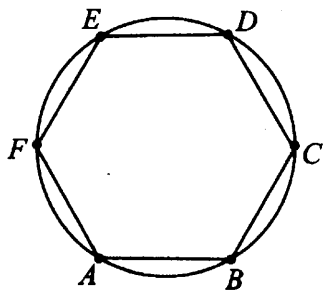


Рис. 315.

Решение.

Проведём диагонали AD, FC, BE (см. рис. 316). В правильном шестиугольнике все стороны и углы равны, а диаметр описанной окружности проходит через противоположные вершины, например F и C. Треугольники, на которые разбился $ABCDEF$, правильные, то есть

$FO = OA = AF$. Диаметр FC в 2 раза больше стороны шестиугольника, $FC = 2AB = P : 3 = 612 : 3 = 204$.

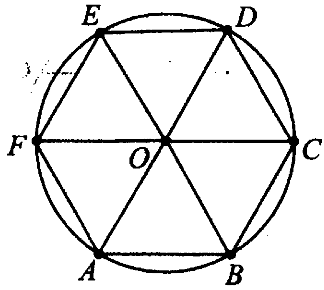


Рис. 316.

Ответ: 204.

34. Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат $ABCD$ (см. рис. 317), считая стороны квадратных клеток равными 1. В ответе укажите значение радиуса, умноженное на $\sqrt{2}$.

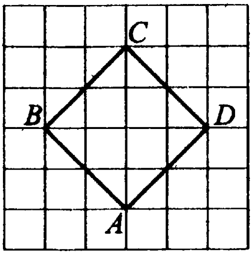


Рис. 317.

Решение.

Построим окружность (см. рис. 318).

Так как квадрат — фигура симметричная, точки касания P и K являются серединами его сторон. Видно, что радиус равен половине PK. Найдём PK по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника PKH.

$PK = \sqrt{PH^2 + KH^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$. Радиус равен $\sqrt{8} : 2$. Значение радиуса, умноженное на $\sqrt{2}$, равно
$\sqrt{8} : 2 \cdot \sqrt{2} = 2$.

Ответ: 2.

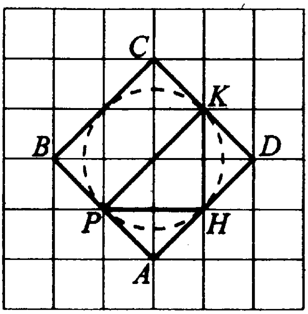


Рис. 318.

35. Найдите среднюю линию трапеции $ABCD$ (см. рис. 319), если стороны клеток равны $\sqrt{8}$.

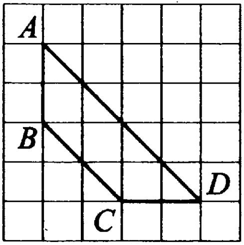


Рис. 319.

Решение.

Средняя линия трапеции соединяет середины боковых сторон трапеции (см. рис. 320).

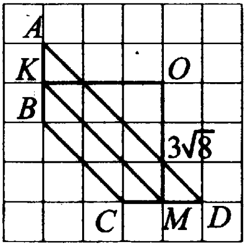


Рис. 320.

Назовём её KM и найдём из прямоугольного треугольника KMO. Длина трёх клеток равна $3\sqrt{8}$. Тогда $KM = \sqrt{KO^2 + OM^2} = \sqrt{(3\sqrt{8})^2 + (3\sqrt{8})^2} = \sqrt{144} = 12$.

Ответ: 12.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Острые углы прямоугольного треугольника равны 22° и 68°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах (см. рис. 321).

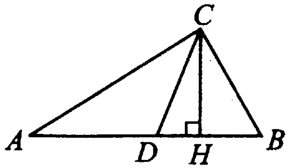


Рис. 321.

2. Угол ACO равен 24°, O — центр окружности. Сторона CA касается окружности в точке A (см. рис. 322). Найдите величину меньшей дуги AB окружности, заключённой внутри этого угла. Ответ дайте в градусах.

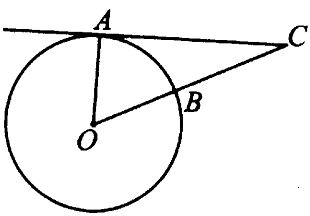


Рис. 322.

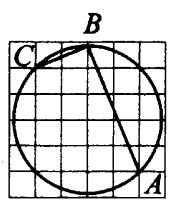


Рис. 323.

3. Найдите градусную величину дуги AC окружности, на которую опирается угол ABC. Ответ дайте в градусах (см. рис. 323).

4. Сторона правильного треугольника равна $4\sqrt{3}$ (см. рис. 324). Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

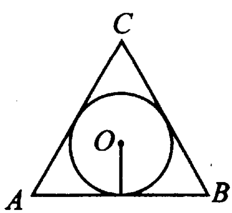


Рис. 324.

5. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, если стороны клеток равны 1 (см. рис. 325).

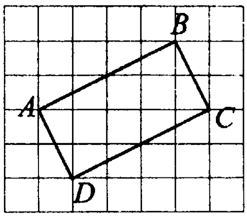


Рис. 325.

Вариант 2

1. В треугольнике ABC $AB = BC$. Внешний угол при вершине B равен $156°$. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах (см. рис. 326).

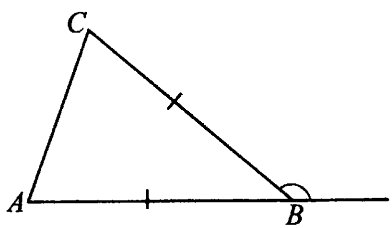


Рис. 326.

2. Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности в точке A, O — центр окружности, а дуга AD окружности, заключённая внутри этого угла, равна $94°$. Ответ дайте в градусах (см. рис. 327).

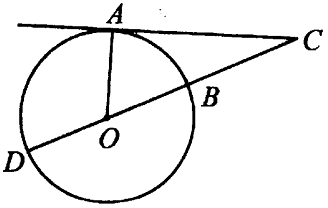


Рис. 327.

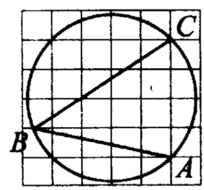


Рис. 328.

3. Найдите градусную величину дуги AC окружности, на которую опирается угол ABC. Ответ дайте в градусах (см. рис. 328).

4. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 16 (см. рис. 329). Найдите высоту этого треугольника.

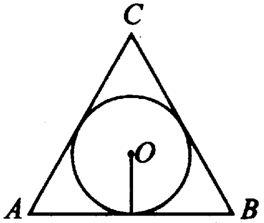


Рис. 329.

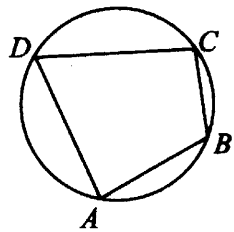


Рис. 330.

5. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 68° и 95° (см. рис. 330). Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

Вариант 3

1. В треугольнике ABC угол A равен 38°, угол C равен 58°. На продолжении стороны AB отложен отрезок $BK = BC$. Найдите угол K треугольника BCK. Ответ дайте в градусах (см. рис. 331).

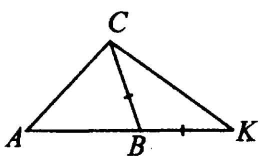


Рис. 331.

2. Угол ACO равен 32°. Его сторона CA в точке A касается окружности с центром в точке O. Найдите градусную величину дуги AD окружности, заключённой внутри этого угла (см. рис. 332). Ответ дайте в градусах.

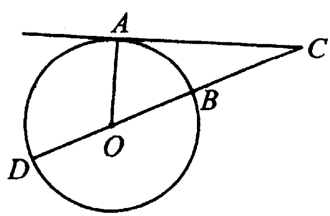


Рис. 332.

3. Хорда PK делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 11 : 7. Под каким углом видна эта хорда из точки M, принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах (см. рис. 333).

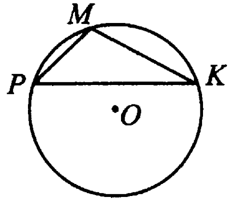


Рис. 333.

4. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 18 (см. рис. 334).

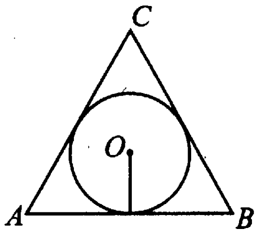


Рис. 334.

5. Около трапеции описана окружность (см. рис. 335). Периметр трапеции равен 142, средняя линия равна 50. Найдите боковую сторону трапеции.

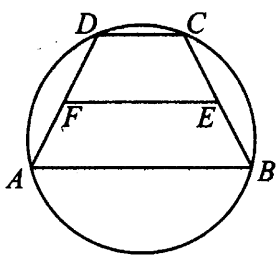


Рис. 335.

Вариант 4

1. Один из внешних углов треугольника равен 72°. Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как 5 : 13. Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах (см. рис. 336).

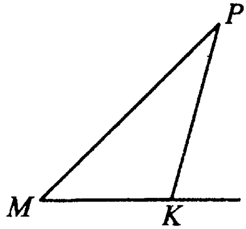


Рис. 336.

2. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 50°. Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах (см. рис. 337).

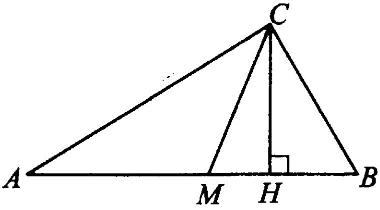


Рис. 337.

3. Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности в точке A, O — центр окружности, а меньшая дуга окружности AB, заключённая внутри этого угла, равна 71°. Ответ дайте в градусах (см. рис. 338).

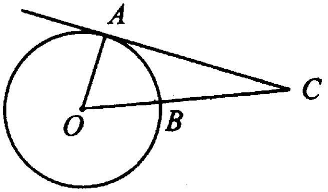


Рис. 338.

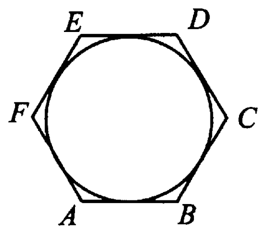


Рис. 339.

4. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $5\sqrt{12}$ (см. рис. 339).

5. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата со стороной, равной $5\sqrt{2}$ (см. рис. 340).

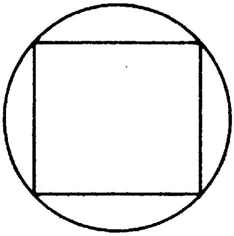


Рис. 340.

Вариант 5

1. Углы треугольника относятся как 2 : 3 : 7. Найдите меньший из них. Ответ дайте в градусах.

2. Острые углы прямоугольного треугольника равны 27° и 63°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах (см. рис. 341).

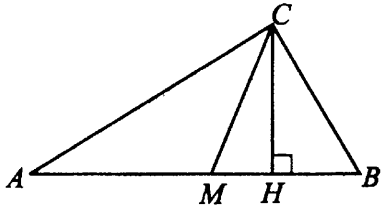


Рис. 341.

3. Хорда AB стягивает дугу окружности в 104°. Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B. Ответ дайте в градусах (см. рис. 342).

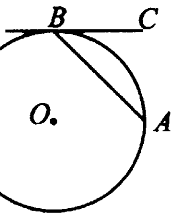


Рис. 342.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен $65°$, угол CAD равен $42°$. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах (см. рис. 343).

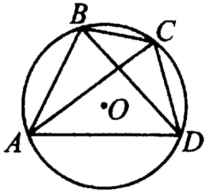


Рис. 343.

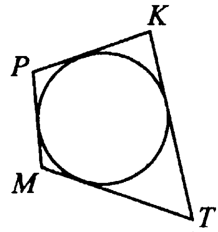


Рис. 344.

5. Три стороны описанного около окружности четырёхугольника относятся (в последовательном порядке) как 2 : 3 : 4. Найдите бóльшую сторону этого четырёхугольника, если известно, что его периметр равен 36 (см. рис. 344).

Вариант 6

1. В треугольнике MPK $MK = PK = 18\sqrt{3}$, угол K равен $120°$. Найдите высоту MH (см. рис. 345).

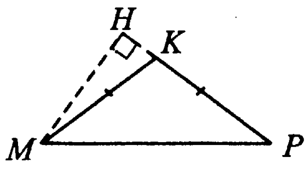


Рис. 345.

2. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 11$, $CD = 24$ (см. рис. 346). Найдите периметр четырёхугольника.

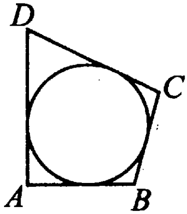


Рис. 346.

3. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 31°. Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах (см. рис. 347).

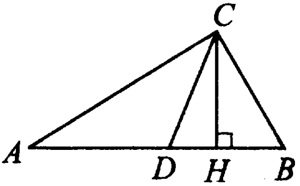


Рис. 347.

4. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника MPK, если стороны клеток равны 1 (см. рис. 348).

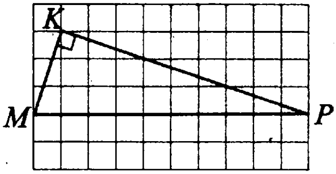


Рис. 348.

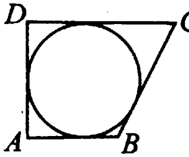


Рис. 349.

5. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, её бо́льшая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности (см. рис. 349).

Вариант 7

1. В треугольнике MPK $MK = PK$, угол K равен 120°, $MK = 16\sqrt{3}$. Найдите MP (см. рис. 350).

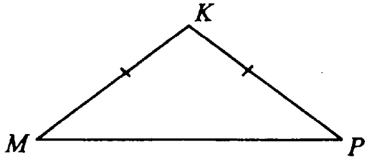


Рис. 350.

2. Угол M треугольника MPK, вписанного в окружность радиуса 5, равен 30° (см. рис. 351). Найдите сторону PK этого треугольника.

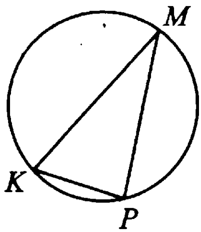


Рис. 351.

3. Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 54. Найдите её среднюю линию (см. рис. 352).

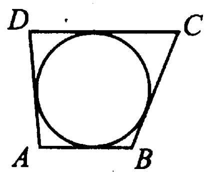


Рис. 352.

4. Сторона MP тупоугольного треугольника MPK равна радиусу описанной около него окружности (см. рис. 353). Найдите угол K. Ответ дайте в градусах.

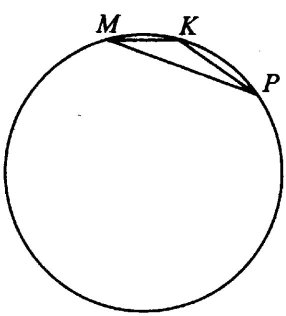


Рис. 353.

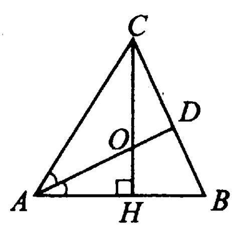


Рис. 354.

5. В треугольнике ABC CH — высота, AD — биссектриса, O — точка пересечения прямых CH и AD, угол BAD равен 19°. Найдите угол AOC. Ответ дайте в градусах (см. рис. 354).

Вариант 8

1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 127°, угол CAD равен 31°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах (см. рис. 355).

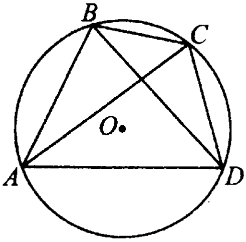


Рис. 355.

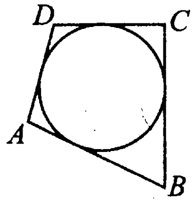


Рис. 356.

2. Периметр четырёхугольника, описанного около окружности, равен 68, две его стороны равны 15 и 26 (см. рис. 356). Найдите бóльшую из оставшихся сторон.

3. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 9 (см. рис. 357). Найдите гипотенузу этого треугольника.

4. В четырёхугольник $MPKT$ вписана окружность, $MP = 13$, $PK = 15$ и $KT = 18$ (см. рис. 358). Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.

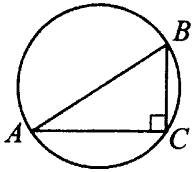


Рис. 357.

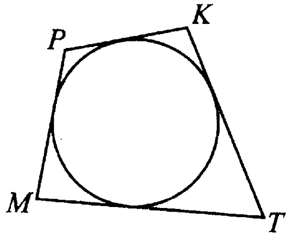


Рис. 358.

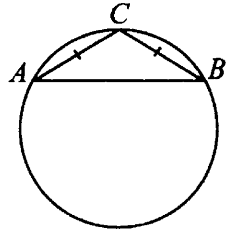


Рис. 359.

5. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 3, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120° (см. рис. 359). Найдите диаметр описанной окружности этого треугольника.

Тригонометрия (B5, B8)

Диагностическая работа

1. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. Найдите $\cos A$, если $AB = 10\sqrt{2}$ и $AC = 7\sqrt{2}$.

2. Про угол α некоторого треугольника известно, что $\cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$. Найдите $3\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

3. Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB = 3\sqrt{2}$. Найдите длину CA, если $\sin A = \dfrac{1}{3}$.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с боковыми сторонами AC и CB дано $AB = 3$ и $\cos A = 0{,}75$. Вычислите BC.

5. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin B = \dfrac{\sqrt{91}}{10}$. Найдите косинус внешнего угла при вершине B.

Тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике

1 ***Немного полезной информации***

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором угол C равен 90° (см. рис. 360).

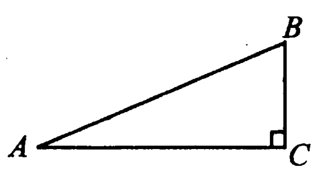


Рис. 360.

Стороны BC и AC называются **катетами**, сторона AB называется **гипотенузой**. Для угла A **прилежащий катет** AC (лежит на стороне угла), **противолежащий катет** BC.

Для прямоугольного треугольника выполняется теорема Пифагора: **квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:**

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Например, $AC = 5$, $BC = 12$.
Найдём AB.
В нашем треугольнике AB — гипотенуза, $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $AB^2 = 25 + 144 = 169$, $AB = \sqrt{169} = 13$.
Теперь разберём случай, когда нужно найти катет.
Пусть $AB = 10$, $AC = 8$.
Найдём BC.
$AB^2 = AC^2 + BC^2$, отсюда $BC^2 = AB^2 - AC^2$,
$BC^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$, $BC = \sqrt{36} = 6$.

Теперь вспомним определения синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.

Синусом угла называют отношение противолежащего катета к гипотенузе. Для нашего треугольника $\sin A = \dfrac{BC}{AB}$; $\sin B = \dfrac{AC}{AB}$.

Косинусом угла называют отношение прилежащего катета к гипотенузе. Для нашего треугольника $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$;
$\cos B = \dfrac{BC}{AB}$.

Обратите внимание, в одном и том же прямоугольном треугольнике синус одного острого угла равен косинусу другого острого угла, т.е. $\sin A = \cos B$, $\sin B = \cos A$.

Тангенсом угла называют отношение противолежащего катета к прилежащему. Для нашего треугольника $\operatorname{tg} A = \dfrac{BC}{AC}$; $\operatorname{tg} B = \dfrac{AC}{BC}$.

Видно, что $\operatorname{tg} A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$.

Основное тригонометрическое тождество позволяет найти синус угла, если известен косинус этого угла, и наоборот.
$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, или для острого угла $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$;
$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$.

Задачи с решениями

1. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 20$, $AC = 16$. Найдите $\sin A$.

Решение.

Синусом угла называют отношение противолежащего катета к гипотенузе. По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$ найдём противолежащий углу A катет BC (см. рис. 361).

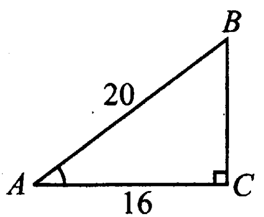


Рис. 361.

$BC^2 = AB^2 - AC^2$, $BC^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144$, $BC = \sqrt{144} = 12$.

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{20} = 0{,}6.$$

Ответ: 0,6.

2. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = 0{,}28$. Найдите $\sin A$.

Решение.

Так как угол A острый, то
$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - 0{,}28^2} = \sqrt{0{,}9216} = 0{,}96$.

Ответ: 0,96.

3. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = \sqrt{91}$, $BC = 3$. Найдите $\cos B$.

Решение.

Косинусом угла называют отношение прилежащего катета к гипотенузе. По теореме Пифагора найдём гипотенузу AB (см. рис. 362).

$AB^2 = AC^2 + BC^2$, отсюда $AB^2 = 3^2 + \left(\sqrt{91}\right)^2 = 9 + 91 = 100$; $AB = \sqrt{100} = 10$.

$\cos B = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$.

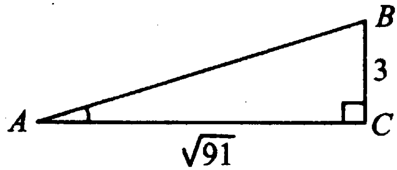


Рис. 362.

Ответ: 0,3.

4. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\operatorname{tg} A = \sqrt{15}$. Найдите $\cos A$.

Решение.

Тангенсом угла называют отношение противолежащего катета к прилежащему. Так как треугольник ABC прямоугольный, угол A острый, то для нашего треугольника $\operatorname{tg} A = \dfrac{BC}{AC} = \sqrt{15}$ и можно считать, что $BC = \sqrt{15}$, $AC = 1$. По теореме Пифагора найдём гипотенузу AB. $AB^2 = AC^2 + BC^2$, отсюда $AB^2 = 1^2 + \left(\sqrt{15}\right)^2 = 1 + 15 = 16$; $AB = \sqrt{16} = 4$.

$\cos A = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

Высоты в прямоугольном треугольнике

Немного полезной информации

В прямоугольном треугольнике две высоты совпадают с катетами. Третья высота, проведённая из вершины прямого угла, делит треугольник на два прямоугольных треугольника, углы которых равны соответственно углам исходного треугольника.

Задачи с решениями

5. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, высота $CH = 2\sqrt{54}$, $BC = 15$. Найдите $\cos B$.

Решение.

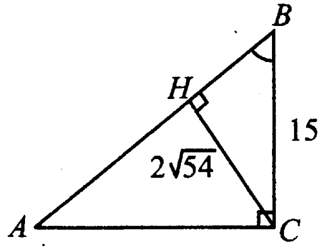


Рис. 363.

Косинусом угла называют отношение прилежащего катета к гипотенузе. Рассмотрим прямоугольный треугольник CHB с прямым углом H и катетами BH и HC (см. рис. 363). Найдём в нём катет BH.

$BH^2 = BC^2 - HC^2$,

$BH^2 = 15^2 - \left(2\sqrt{54}\right)^2 = 225 - 216 = 9$,

$BH = \sqrt{9} = 3$.

$\cos B = \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{3}{15} = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

6. Найдите тангенс угла CAB, изображённого на рисунке 364. В ответе укажите значение тангенса, умноженное на 3.

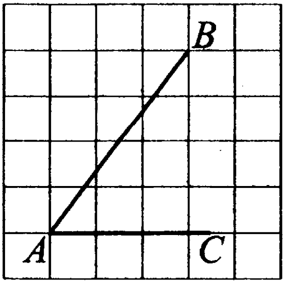


Рис. 364.

Решение.

Достроим угол до прямоугольного треугольника ABC (см. рис. 365).

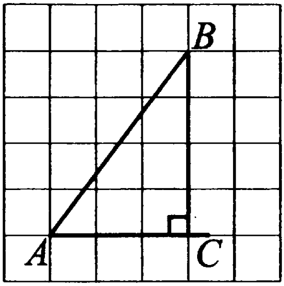


Рис. 365.

Тангенсом угла называют отношение противолежащего катета к прилежащему.

$\operatorname{tg} BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$. Значение тангенса, умноженное на 3, равно 4.

Ответ: 4.

Равнобедренный треугольник

Немного полезной информации

Равнобедренным треугольником называют треугольник, у которого две равные стороны. Эти стороны называют боковыми сторонами, третью сторону называют основанием. Если в задаче дан равнобедренный треугольник, то пользуются его свойствами.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника (между равными сторонами), является медианой и биссектрисой.

Посмотрим на рисунок 366. В треугольнике ABC основание AB, боковые стороны $AC = CB$, угол A равен углу B, высота CH делит AB на равные отрезки $AH = HB$ и угол C на два равных угла.

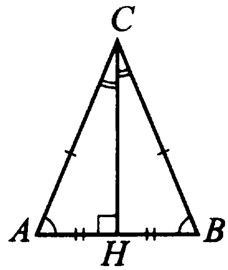


Рис. 366.

Задачи с решениями

7. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 24$, $\cos A = 0{,}6$. Найдите высоту CH.

Решение.

В треугольнике ABC стороны $AC = BC$, значит, он равнобедренный. Высота CH, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, делит AB пополам, поэтому $AH = HB = 24 : 2 = 12$. Рассмотрим прямоугольный треугольник CHA с прямым углом H и катетами AH и HC. $AH = 12$, $\cos A = 0{,}6$. Найдём AC. Косинусом угла называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.

$$\cos A = \frac{AH}{AC} = \frac{12}{AC} = 0{,}6.$$

$AC = 12 : 0{,}6 = 20$.

По теореме Пифагора $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$.

Ответ: 16.

8. В треугольнике ABC $AB = BC$, высота CH равна 6, $AC = 6\sqrt{5}$ (см. рис. 367). Найдите тангенс угла ACB.

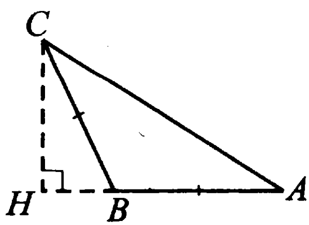


Рис. 367.

Решение.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. В данном треугольнике $BC = BA$, основание AC, равны углы CAB и ACB. Следовательно, можно вместо тангенса угла ACB найти тангенс угла CAB. Рассмотрим прямоугольный треугольник ACH с гипотенузой $AC = 6\sqrt{5}$ и катетами $CH = 6$ и HA. Длину катета HA можно найти по теореме Пифагора.

$$HA = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{\left(6\sqrt{5}\right)^2 - 6^2} = \sqrt{180 - 36} = \sqrt{144} = 12.$$

Тангенсом угла называют отношение противолежащего катета к прилежащему. Для нашего треугольника $\operatorname{tg} CAB = \dfrac{HC}{HA} = \dfrac{6}{12} = 0{,}5.$

Ответ: 0,5.

9. В треугольнике ABC $AC = BC = 15$, $\sin B = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите AB.

Решение.

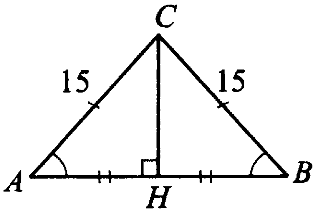


Рис. 368.

В равнобедренном треугольнике ABC высота CH является медианой, значит, $AH = HB$ (см. рис. 368). Рассмотрим прямоугольный треугольник BCH с гипотенузой $BC = 15$ и катетами CH и HB. В данном треугольнике $\sin B = \dfrac{\sqrt{21}}{5} = \dfrac{CH}{CB}$; $\dfrac{\sqrt{21}}{5} = \dfrac{CH}{15}$, тогда $CH = \sqrt{21} \cdot 15 : 5 = 3\sqrt{21}$. Катет HB можно найти по теореме Пифагора: $HB = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{225 - (3\sqrt{21})^2} = \sqrt{225 - 189} = \sqrt{36} = 6$.

AB в два раза больше HB, $AB = 6 \cdot 2 = 12$.

Ответ: 12.

10. В треугольнике ABC $AC = BC = 20$, $AB = 6\sqrt{39}$. Найдите $\sin A$.

Решение.

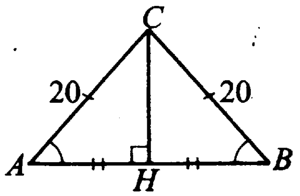


Рис. 369.

Проведём высоту CH, тогда $AH = BH = 3\sqrt{39}$. Рассмотрим прямоугольный треугольник ACH (см. рис. 369). Катет HC можно найти по теореме Пифагора.

$HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{20^2 - (3\sqrt{39})^2} = \sqrt{400 - 351} = \sqrt{49} = 7$,

$\sin A = \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{7}{20} = 0{,}35$.

Ответ: 0,35.

Тригонометрические функции тупого угла

① *Немного полезной информации*

Рассмотрим развёрнутый угол BAK (см. рис. 370). Луч AP делит его на два смежных угла. Оказывается, синусы этих смежных углов равны, а косинусы противоположны (то есть отличаются только знаком).

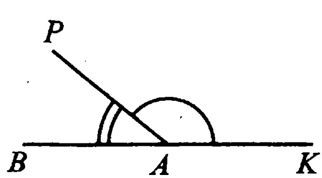


Рис. 370.

Например, если $\sin\angle BAP = 0{,}8$, то $\sin\angle PAK = 0{,}8$, $\cos\angle BAP = 0{,}6$ и $\cos\angle PAK = -0{,}6$.

Тангенсы смежных углов также противоположны.

Задачи с решениями

11. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = \frac{10}{\sqrt{109}}$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.

Решение.

Внешним углом треугольника называют угол, образованный стороной этого треугольника и продолжением другой его стороны. На рисунке 371 внешний угол при вершине A — это угол BAK.

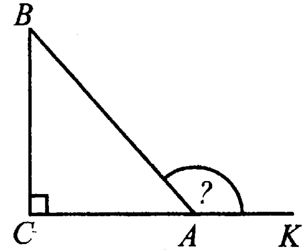


Рис. 371.

BAK и CAB — смежные углы. Тангенсы смежных углов — противоположные числа (отличаются только знаком), поэтому найдём тангенс угла CAB. Тангенсом угла называют отношение противолежащего катета к прилежащему. Для нашего треугольника $\cos A = \frac{10}{\sqrt{109}} = \frac{AC}{BA}$. Будем считать, что $AC = 10$, $BA = \sqrt{109}$. Найдём $BC = \sqrt{BA^2 - CA^2} = \sqrt{109 - 100} = \sqrt{9} = 3$. Тогда $\operatorname{tg} BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{10} = 0{,}3$. $\operatorname{tg} BAK = -0{,}3$.

Ответ: $-0{,}3$.

Разные задачи

12. Основания равнобедренной трапеции (см. рис. 372) равны 5 и 11. Боковые стороны равны 5. Найдите синус острого угла трапеции.

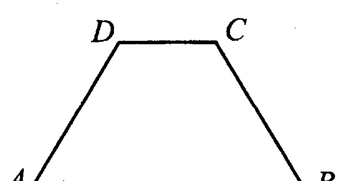


Рис. 372.

Решение.

В равнобедренной трапеции углы при основании равны. Если опустить высоты из вершин C и D на основание AB, то получатся два равных прямоугольных треугольника ADH и CBK (см. рис. 373).

$DCKH$ — прямоугольник, $DC = HK = 5$. $AH = BK = (11 - 5) : 2 = 3$. Синус острого угла трапеции, например A, найдём из прямоугольного треугольника ADH. По теореме Пифагора $DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$. $\sin A = \dfrac{DH}{DA} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$.

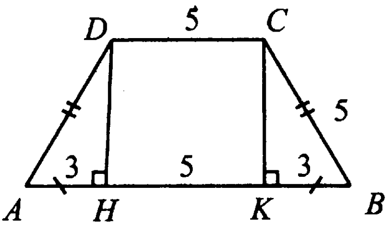


Рис. 373.

Ответ: 0,8.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $AC = 3$, $AB = 5$. Найдите $\sin B$.

2. Основания равнобедренной трапеции равны 11 и 91. Высота трапеции равна 16. Найдите тангенс острого угла.

3. В прямоугольном треугольнике ABC длина гипотенузы AB равна $11\sqrt{2}$, $\cos A = \dfrac{7}{11}$. Вычислите BC.

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, причём известно, что $\operatorname{tg} A = \dfrac{5}{12}$, $AC = 3$. Найдите AB.

5. Найдите основание AB равнобедренного треугольника ABC, если $AC = 7$, $\cos A = 0{,}125$.

Вариант 2

1. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = \sqrt{17}$, $AB = 17$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

2. Вычислите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{39}}{8}$ и α является углом некоторого треугольника.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $BC = 2{,}25$ и $\sin A = \frac{9}{13}$. Найдите длину гипотенузы.

4. В прямоугольнике $ABCD$ диагональ AC делит угол в отношении $1:2$, меньшая его сторона AB равна 16. Найдите диагональ данного прямоугольника.

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $AB = 11\sqrt{11}$ и $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Найдите AC.

Вариант 3

1. В треугольнике ABC угол C прямой. Найдите $\cos B$, если $AB = 20$, $AC = 2\sqrt{19}$.

2. Дан острый угол α, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Вычислите $\cos\alpha$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB известен $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а также длина катета $BC = 80$. Найдите длину второго катета.

4. Про прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C известно, что $\cos A = \frac{2}{7}$, $AB = 21\sqrt{5}$. Вычислите BC.

5. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AB = 8\sqrt{58}$ известен $\operatorname{tg} A = \frac{3}{7}$. Найдите AC.

Вариант 4

1. В прямоугольном треугольнике ABC даны длины катета $AC = \sqrt{19}$ и гипотенузы $AB = 10$. Найдите $\sin A$.

2. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} A = \frac{7}{2}$. Найдите AC, если $BC = 2{,}8$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известно, что $\sin A = \frac{2\sqrt{10}}{7}$, $CA = 39$. Найдите AB.

4. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. Найдите BC, если $\sin A = \frac{3}{4}$, $AC = 8\sqrt{7}$.

5. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB = 22$, $AD = 33$, $\sin A = \frac{6}{11}$. Найдите длину большей высоты параллелограмма.

Вариант 5

1. В прямоугольном треугольнике ABC известны катеты $AC = 16$, $CB = 12$. Найдите $\sin B$.

2. В $\triangle ABC$ найдите $\cos A$, если тангенс угла, внешнего к A, равен $2\sqrt{6}$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC $BC = CA = 15$. Чему равна высота, опущенная на AB, если $\sin A = 0{,}9$?

4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C дана длина катета $CB = \frac{\sqrt{13}}{4}$ и $\cos A = \frac{6}{7}$. Найдите длину другого катета.

5. Найдите основание AB равнобедренного треугольника ABC, если $AC = 82$, $\operatorname{tg} A = \frac{9}{40}$.

Вариант 6

1. В треугольнике ABC угол C прямой, $\cos A = \frac{1}{3}$. Найдите AB, если $AC = \frac{8}{5}$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $BC = CA = 40$. Чему равна высота, опущенная на AB, если $\cos A = 0{,}28$?

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AB = 32$ из вершины A опущена высота AK. Найдите $\cos A$, если $BK = 8$.

4. В треугольнике ABC угол C прямой. Известно, что $BC = 8\sqrt{3}$ и $AC = 8$. Найдите $\cos A$.

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $BC = 3\sqrt{17}$ и $\operatorname{tg} A = 4$. Найдите AB.

Вариант 7

1. В равнобедренном треугольнике ABC $BC = CA$, $AB = 7$, $\sin A = 0{,}96$. Найдите длину высоты CH.

2. В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $BC = CA = 8\sqrt{3}$. Чему равна высота, опущенная на основание, если $\operatorname{tg} A = \sqrt{3}$?

3. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AB = 3$, $\operatorname{tg} A = 5$. Найдите высоту, опущенную на AB.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AB = 50$ известно, что высота, опущенная к BC, равна 48. Найдите $\cos A$.

5. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8\sqrt{5}$, $CB = 11\sqrt{5}$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

Вариант 8

1. В равнобедренном треугольнике ABC с боковыми сторонами BC и CA известно, что длина основания равна 8, а $\sin A = 0{,}6$. Найдите высоту, опущенную к основанию треугольника.

2. В параллелограмме $ABCD$ известен $\sin A = \dfrac{\sqrt{19}}{10}$. Найдите $\cos B$, если $\angle A$ — острый.

3. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, причём $\sin A = \dfrac{4}{9}$ и $BC = 3\sqrt{65}$. Найдите AC.

4. В треугольнике ABC угол C равен 90°, косинус внешнего угла при вершине A равен $-\dfrac{11}{\sqrt{157}}$, $BC = 2$. Найдите $3 \cdot AC$.

5. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 18. Высота трапеции равна 46. Тангенс острого угла при основании равен $\dfrac{23}{5}$. Найдите большее основание.

Параллелепипед, призма, пирамида (B10, B13)

Диагностическая работа

1. Найдите отношение площади боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды к площади её основания, если сторона основания равна 1, а апофема равна $\sqrt{3}$.

2. Найдите угол AED_2 многогранника, изображённого на рисунке 374. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

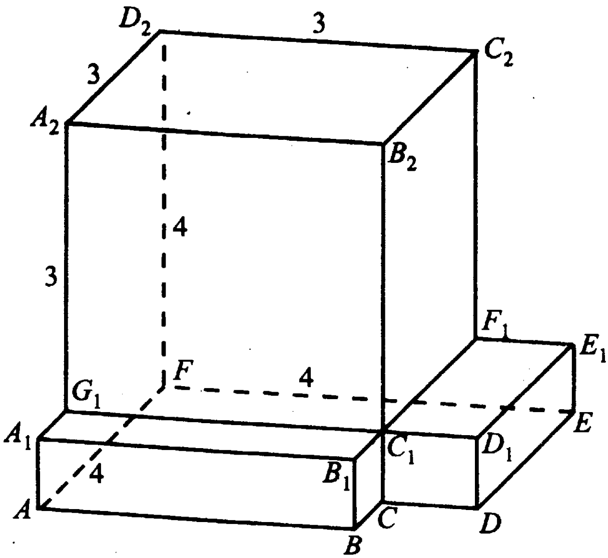


Рис. 374.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E — середина ребра DD_1, точка F — середина ребра D_1A_1, точка K — середина ребра C_1D_1. Найдите угол EFK. Ответ дайте в градусах.

4. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Площадь её поверхности равна 960. Найдите высоту призмы (см. рис. 375).

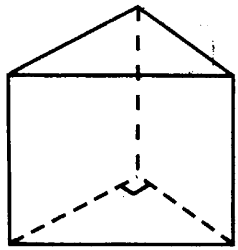


Рис. 375.

5. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ медианы основания пересекаются в точке M. Площадь треугольника ABC равна 9, объём пирамиды равен 33. Найдите длину отрезка MD.

Прямоугольный параллелепипед

Немного полезной информации

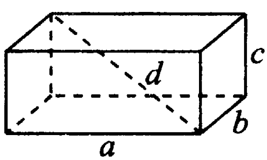


Рис. 376.

Объём прямоугольного параллелепипеда («кирпича», см. рис. 376) равен произведению трёх его измерений:

$$V = abc.$$

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда равна сумме площадей его шести граней:

$$S = 2(ab + bc + ac).$$

Диагональю прямоугольного параллелепипеда называют отрезок, соединяющий его противоположные вершины. Квадрат длины этого отрезка равен сумме квадратов трёх измерений параллелепипеда:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Если все три измерения прямоугольного параллелепипеда равны, то такой параллелепипед называется **кубом** (см. рис. 377).

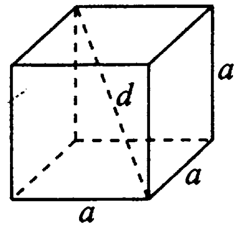


Рис. 377.

Для куба формулы объёма, площади и длины диагонали имеют вид

$$V = a^3, \quad S = 6a^2, \quad d = a\sqrt{3}.$$

Разбиение тела на прямоугольные параллелепипеды

Задачи с решениями

В этих задачах требуется найти объём или площадь поверхности многогранника с прямыми двугранными углами. При решении сначала разбивают данный многогранник на несколько прямоугольных параллелепипедов, а затем подсчитывают объём или площадь поверхности каждого параллелепипеда в отдельности.

1. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке 378 (все двугранные углы многогранника прямые).

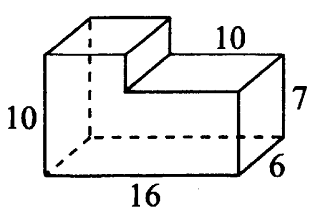


Рис. 378.

Решение.

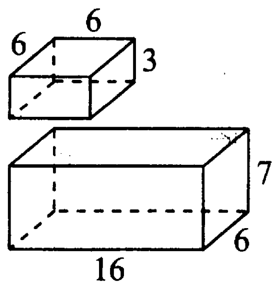


Рис. 379.

Данный многогранник составлен из двух прямоугольных параллелепипедов (см. рис. 379). Измерения большого параллелепипеда равны 16, 6 и 7. Измерения малого параллелепипеда равны $16 - 10 = 6$, 6 и $10 - 7 = 3$.

Суммарный объём этих параллелепипедов равен
$16 \cdot 6 \cdot 7 + 6 \cdot 6 \cdot 3 = 96 \cdot 7 + 36 \cdot 3 = 672 + 108 = 780$.

Ответ: 780.

2. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и K_2 многогранника, изображённого на рисунке 380. Все двугранные углы многогранника прямые.

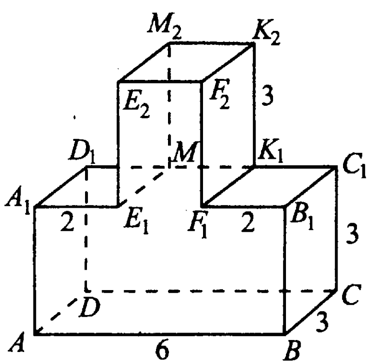


Рис. 380.

Решение.

Проведём плоскость $F_1F_2K_2$ и отбросим ту часть фигуры, которая оказалась справа. Достроим оставшуюся часть многогранника до пря-

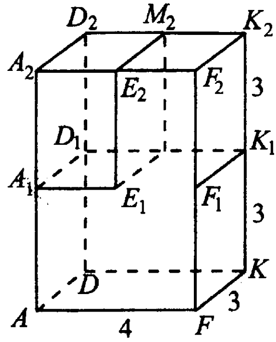


Рис. 381.

моугольного параллелепипеда $AFKDA_2F_2K_2D_2$ (см. рис. 381). Квадрат диагонали AK_2 найдём по формуле

$AK_2^2 = FA^2 + DA^2 + AA_2^2 = 4^2 + 3^2 + 6^2 = 16 + 9 + 36 = 61.$

Ответ: 61.

3. Найдите тангенс угла F_2AB многогранника, изображённого на рисунке 382. Все двугранные углы многогранника прямые.

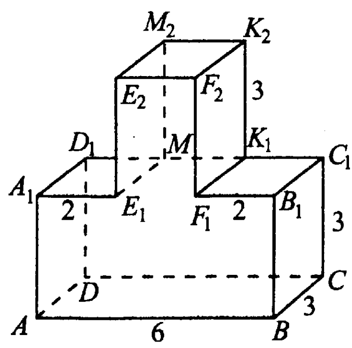


Рис. 382.

Решение.

Заметим, что угол $F_2AB = \alpha$ лежит в плоскости грани $AA_1E_1E_2F_2F_1B_1B$ многогранника (см. рис. 383). Все углы многогранника прямые, поэтому $F_2F_1 \perp AB$. В прямоугольном $\triangle AF_2F$ $\angle F = 90°$; $\operatorname{tg}\alpha = F_2F : AF = \dfrac{6}{4} = 1{,}5.$

Ответ: 1,5.

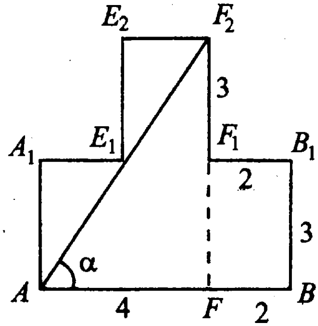


Рис. 383.

4. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 384 (все двугранные углы прямые).

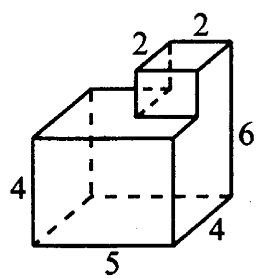


Рис. 384.

Решение.

Данный многогранник составлен из куба с ребром 2 и параллелепипеда $5 \times 4 \times 4$. Площадь поверхности куба равна $6 \cdot 2^2 = 24$. Учтём, что нижняя грань куба «склеена» с параллелепипедом, поэтому её площадь не включается в площадь исходного многогранника. Остаётся $24 - 2 \cdot 2 = 20$.

Площадь поверхности параллелепипеда равна
$2(5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 4) = 2 \cdot 56 = 112$. Также следует учесть, что квадрат 2×2 верхней грани параллелепипеда не будет включён в конечную площадь. Остаётся $112 - 2 \cdot 2 = 108$.

Искомая площадь равна $20 + 108 = 128$.

Ответ: 128.

5. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 385 (все двугранные углы прямые).

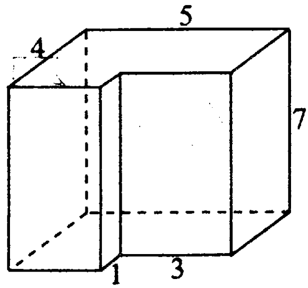


Рис. 385.

Решение.

При решении этой задачи данный многогранник удобнее всего рассматривать как прямую призму с высотой $h = 7$. Основанием этой призмы является многоугольник (см. рис. 386) с периметром $P = 2\cdot(5+4) = 18$ и площадью $S_{\text{осн.}} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 17$.

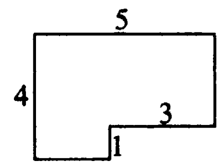


Рис. 386.

Тогда площадь боковой поверхности призмы равна $S_{\text{бок.}} = Ph = 18 \cdot 7 = 126$, а площадь всей поверхности равна $S = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}} = 126 + 2 \cdot 17 = 160$.

Ответ: 160.

Соотношения в прямоугольном параллелепипеде и кубе

Задачи с решениями

6. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 5. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 62. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

Решение.

Нам известны два измерения прямоугольного параллелепипеда (2 и 5), нужно найти третье измерение. Обозначим его через x. Тогда площадь поверхности параллелепипеда равна $S = 2(2 \cdot 5 + 2x + 5x)$. По условию

$S = 62$, поэтому $2(2 \cdot 5 + 2x + 5x) = 62$; $7x + 10 = 31$; $x = 3$. Искомое ребро равно 3.

Ответ: 3.

7. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 6. Объём этого параллелепипеда равен 36. Найдите диагональ параллелепипеда.

Решение.

Если обозначить неизвестное ребро через a, то объём равен $V = 2{\cdot}6{\cdot}a$. По условию $V = 36$, поэтому $2 \cdot 6 \cdot a = 36$; $a = 3$. Найдём диагональ d данного прямоугольного параллелепипеда.
$d^2 = 2^2 + 6^2 + 3^2$; $d^2 = 4 + 36 + 9$; $d^2 = 49$; $d = 7$.

Ответ: 7.

8. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то площадь его поверхности увеличится на 90. Найдите ребро куба.

Решение.

Обозначим ребро куба через a. Тогда площадь поверхности исходного куба равна $6a^2$, а площадь поверхности увеличенного куба $6(a+1)^2$. По условию $6(a+1)^2 - 6a^2 = 90$; $12a + 6 = 90$; $12a = 84$; $a = 7$.

Ответ: 7.

Параллелепипед и призма

Немного полезной информации

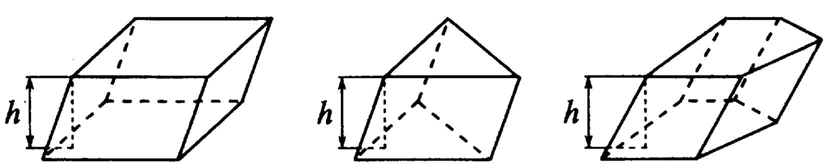


Рис. 387.

Объём параллелепипеда и призмы (см. рис. 387) может быть найден как произведение площади основания на высоту:

$$V = S_{\text{осн.}} h.$$

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту:

$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} h.$$

Площадь всей поверхности призмы равна сумме площади боковой поверхности и удвоенной площади основания (так как площади обоих оснований одинаковы):

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

Если призма прямая (см. рис. 388), то формулы остаются прежними, но высота прямой призмы равна её боковому ребру. Напомним, что в прямой призме боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания. В частности, любая правильная призма является прямой (но в основании правильной призмы к тому же обязательно лежит правильный многоугольник).

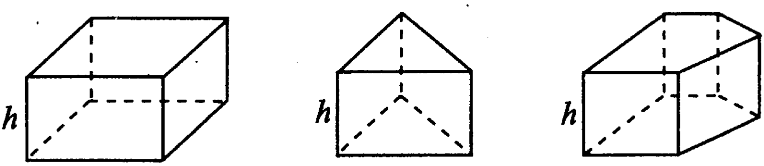


Рис. 388.

В правильной шестиугольной призме основание является правильным шестиугольником. Обозначив сторону этого шестиугольника через a, получаем следующие соотношения (см. рис. 389):

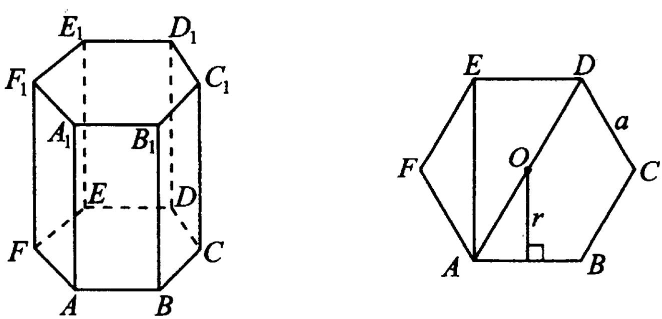


Рис. 389.

$$S_{\text{основания}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2},$$

$AD = 2a$, $AE = a\sqrt{3}$, $\angle EAD = 30°$, $\angle EFA = 120°$,

радиус описанной окружности $AO = a$,

радиус вписанной окружности $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Задачи с решениями

9. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 600 см^3 воды (см. рис. 390) и полностью погрузили в неё деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 12 см до отметки 16 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.

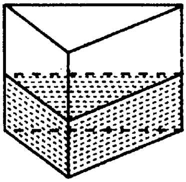


Рис. 390.

Решение.

Обозначим через S площадь основания призмы. Тогда из формулы объёма призмы $V = Sh$ имеем $12S = 600$, $S = 50$ (см^2). После погружения детали суммарный объём детали и воды вычисляется по той же формуле: $50 \cdot 16 = 800$ (см^3). Объём детали равен $800 - 600 = 200$ (см^3).

Ответ: 200.

10. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 48, проведена плоскость, параллельная боковому ребру (см. рис. 391). Найдите объём отсечённой треугольной призмы.

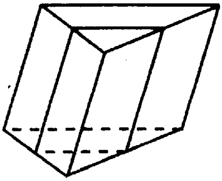


Рис. 391.

Решение.

Обозначим через V_1 и S_1 объём и площадь основания исходной призмы, через V_2 и S_2 объём и площадь основания отсечённой призмы. Так как у обеих призм общая высота, то $\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2}{S_1}$. Средняя линия отсекает от треугольника в основании исходной призмы подобный треугольник, коэффициент подобия $k = \frac{1}{2}$ (так как средняя линия в 2 раза меньше параллельной ей стороны треугольника). Отсюда $\frac{S_2}{S_1} = k^2 = \frac{1}{4}$; $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{4}$; $V_2 = \frac{1}{4}V_1 = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12$.

Ответ: 12.

11. Основанием прямой треугольной призмы (см. рис. 392) служит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Площадь её поверхности равна 180. Найдите высоту призмы.

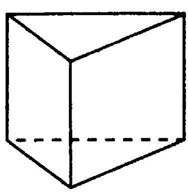


Рис. 392.

Решение.

По теореме Пифагора можно найти гипотенузу c треугольника в основании призмы. $c^2 = 5^2 + 12^2$; $c^2 = 169$; $c = 13$. Периметр основания призмы равен $P = 5 + 12 + 13 = 30$. Площадь прямоугольного треугольника в основании равна половине произведения его катетов: $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$. Площадь боковой поверхности равна $S_{\text{бок.}} = Ph = 30h$. В условии дана площадь всей поверхности призмы $S_{\text{полн.}} = 180$. Отсюда $S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}} = 180$; $30h + 2 \cdot 30 = 180$; $30h = 120$; $h = 4$.

Ответ: 4.

Тетраэдр и пирамида

① *Немного полезной информации*

Объём тетраэдра и пирамиды (см. рис. 393) можно найти по формуле

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}}h.$$

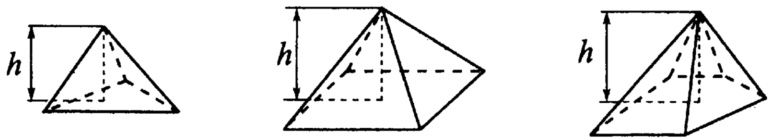


Рис. 393.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания и апофемы (высоты боковой грани, проведённой из вершины пирамиды, см. рис. 394):

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2}P_{\text{осн.}}l.$$

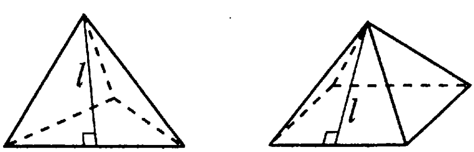


Рис. 394.

Высота правильной пирамиды падает в центр её основания. Углом между ребром и плоскостью основания называют угол между этим ребром и его проекцией на плоскость основания. На рисунке 395 $SABC$ — правильная пирамида, SO — высота. Тогда O — центр основания ABC. Угол между ребром AS и плоскостью основания $\alpha = \angle SAO$.

Углом между боковой гранью и плоскостью основания называют угол между апофемой боковой грани и проекцией этой апофемы на плоскость основания. На рисунке 396 $ABCS$ — правильная пирамида, SH — апофема, $\beta = \angle AHS$ — угол между гранью BCS и плоскостью основания ABC.

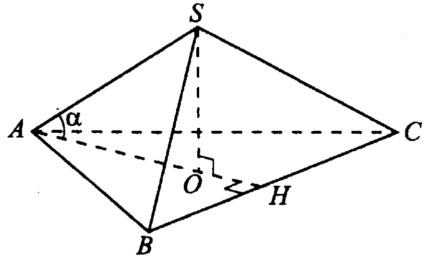


Рис. 395.

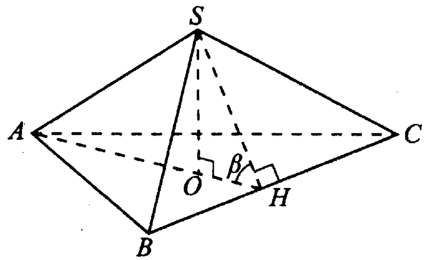


Рис. 396.

Задачи с решениями

12. Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды (см. рис. 397) равны 16, боковые рёбра равны 17. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

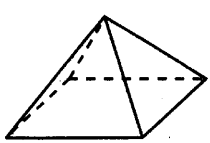


Рис. 397.

Решение.

Проведём апофему EH (см. рис. 398). EH — высота равнобедренного треугольника ABE, поэтому является его медианой,

и $AH = BH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{16}{2} = 8.$

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника AEH имеем $EH^2 = AE^2 - AH^2$; $EH^2 = 17^2 - 8^2 = 225$; $EH = 15$. В основании пирамиды лежит квадрат с периметром $4 \cdot 16 = 64$ и площадью $16^2 = 256$.

Искомая площадь равна сумме площади основания и площади боковой поверхности:

$S_{\text{полн.}} = S_{\text{осн.}} + \frac{1}{2}Pl = 256 + \frac{1}{2} \cdot 64 \cdot 15 = 256 + 480 = 736.$

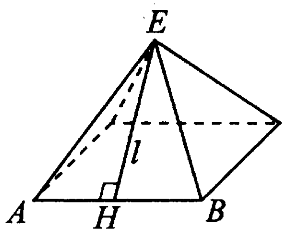


Рис. 398.

Ответ: 736.

13. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° (см. рис. 399). Высота пирамиды равна 12. Найдите объём пирамиды.

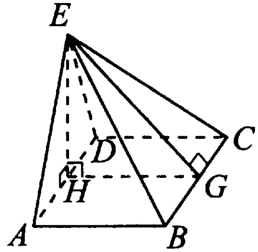


Рис. 399.

Решение.

По условию высота пирамиды $EH = 12$. Из прямоугольного треугольника EHG имеем $\operatorname{ctg} \angle EGH = \dfrac{HG}{EH}$; $HG = EH \operatorname{ctg} 60° = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$.

Аналогично из прямоугольного треугольника EHA получаем $HA = 4\sqrt{3}$.
Площадь прямоугольника в основании

$S_{\text{осн.}} = AB \cdot AD = HG \cdot (2 \cdot HA) = 4\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 96$. Объём пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h = \frac{1}{3} \cdot 96 \cdot 12 = 384$.

Ответ: 384.

14. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды (см. рис. 400) равна 4, боковое ребро равно 8. Найдите объём пирамиды.

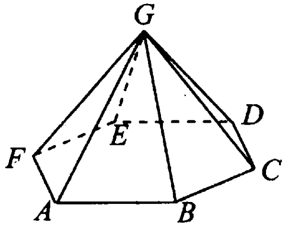


Рис. 400.

Решение.

Опустим из вершины G высоту GH на плоскость основания пирамиды. В основании пирамиды лежит правильный шестиугольник, и точка H — его центр. В правильном шестиугольнике радиус описанной окружности равен стороне шестиугольника, поэтому отрезки AH, BH, ..., FH разбивают шестиугольник на шесть равносторонних треугольников (см. рис. 401). Площадь каждого треугольника равна $4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$, поэтому площадь шестиугольника равна $24\sqrt{3}$.

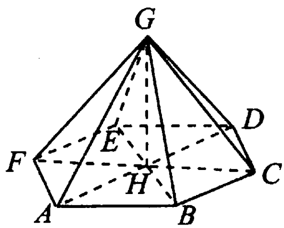


Рис. 401.

Теперь найдём высоту пирамиды. По теореме Пифагора для треугольника AHG имеем $HG^2 = AG^2 - AH^2$; $HG^2 = 8^2 - 4^2$; $HG^2 = 48$; $HG = 4\sqrt{3}$.

Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту: $V = \dfrac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 96$.

Ответ: 96.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Найдите площадь боковой поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 10 и 24, а её боковое ребро равно 20 (см. рис. 402).

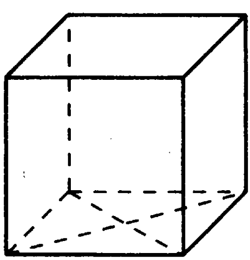


Рис. 402.

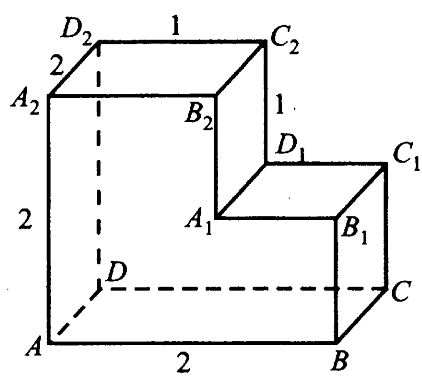


Рис. 403.

2. Найдите угол CAD_2 многогранника, изображённого на рисунке 403. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите тангенс угла CF_1F.

4. Объём куба равен $3\sqrt{3}$. Найдите его диагональ (см. рис. 404).

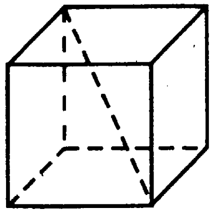


Рис. 404.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AB = 7$, $AD = 24$, $AA_1 = 15$. Найдите синус угла между прямыми CA и D_1C_1.

Вариант 2

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 405). Объём треугольной пирамиды A_1BC_1D равен 3. Чему равен объём куба?

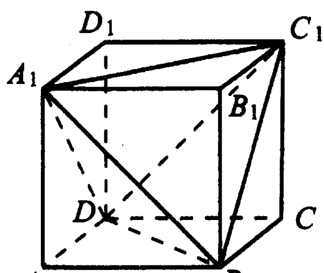


Рис. 405.

2. Найдите угол ADB многогранника, изображённого на рисунке 406. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите угол $C_1B_1F_1$. Ответ дайте в градусах.

4. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и B_3 многогранника, изображённого на рисунке 407. Все двугранные углы многогранника прямые.

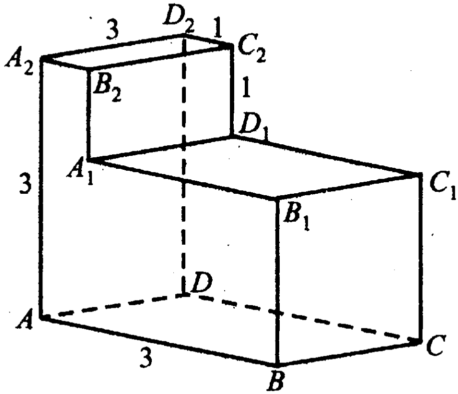


Рис. 406.

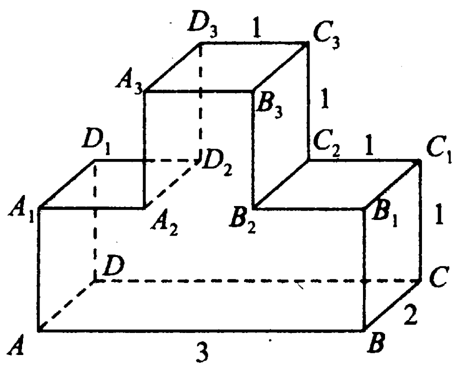


Рис. 407.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 2, найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1. Ответ дайте в градусах.

Вариант 3

1. Диагональ грани куба равна $3\sqrt{2}$ (см. рис. 408). Найдите объём куба.

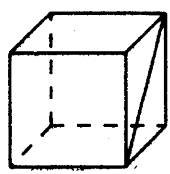


Рис. 408.

2. Найдите угол AA_2C многогранника, изображённого на рисунке 409. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

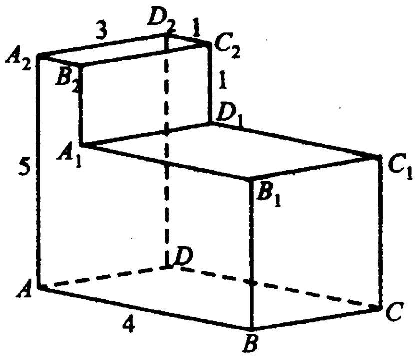


Рис. 409.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите угол BD_1D. Ответ дайте в градусах.

4. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности параллелепипеда равна 192. Найдите его диагональ (см. рис. 410).

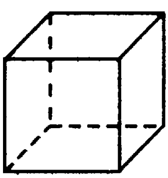


Рис. 410.

5. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 5 и 8. Её объём равен 120. Найдите высоту этой пирамиды.

Вариант 4

1. Боковые рёбра правильной четырёхугольной пирамиды равны 5, сторона основания равна 6 (см. рис. 411). Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

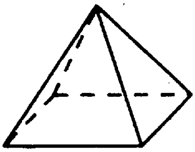


Рис. 411.

2. Найдите тангенс угла ABA_1 многогранника, изображённого на рисунке 412. Все двугранные углы многогранника прямые.

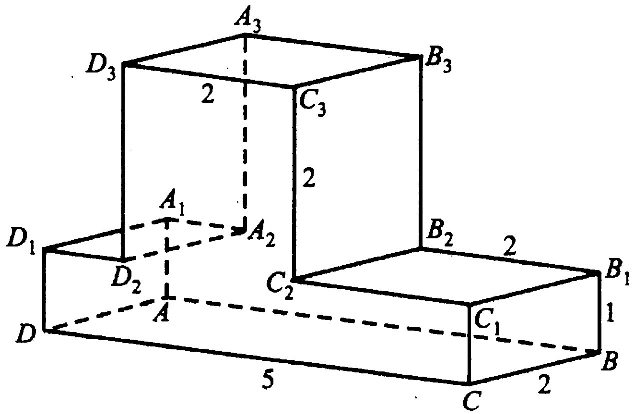


Рис. 412.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми DC_1 и B_1C_1. Ответ дайте в градусах.

4. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и C_2 многогранника, изображённого на рисунке 413. Все двугранные углы многогранника прямые.

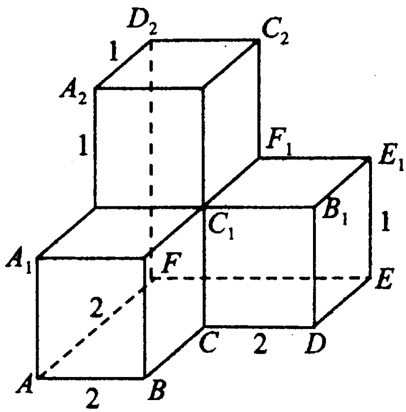


Рис. 413.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 5, объём равен 480. Найдите боковое ребро этой пирамиды.

Вариант 5

1. Из куба со стороной 5 вырезана правильная четырёхугольная пирамида (рис. 414) со стороной основания 3 и высотой 4. Найдите объём оставшейся части куба.

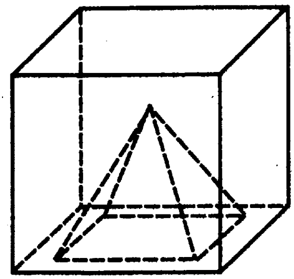


Рис. 414.

2. Найдите тангенс угла CDC_3 многогранника, изображённого на рисунке 415. Все двугранные углы многогранника прямые.

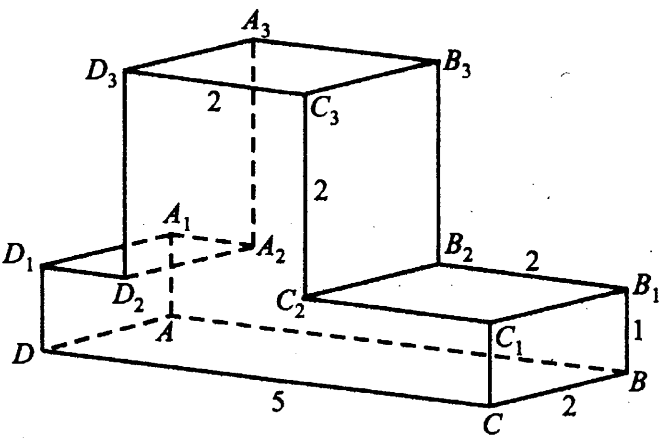


Рис. 415.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BB_1 и A_1D. Ответ дайте в градусах.

4. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 96 и 28 (см. рис. 416). Площадь её боковой поверхности равна 600. Найдите боковое ребро этой призмы.

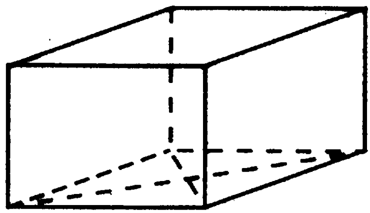


Рис. 416.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S вершина, $SC = 26$, $AC = 20$. Найдите длину отрезка SO (см. рис. 417).

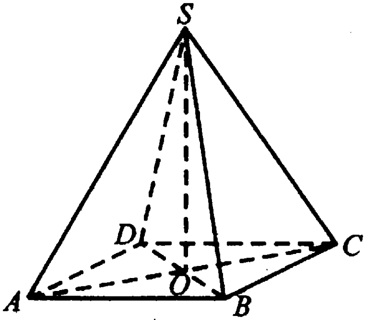


Рис. 417.

Вариант 6

1. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке 418 (все двугранные углы многогранника прямые).

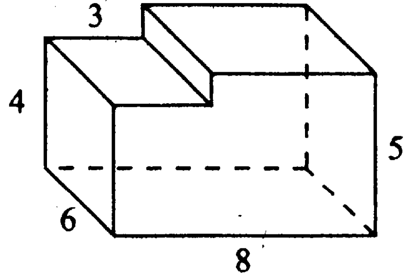


Рис. 418.

2. Найдите угол ABD_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $CD = 41$, $AD = 9$, $DD_1 = 40$. Ответ дайте в градусах.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите угол EAE_1. Ответ дайте в градусах.

4. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 5 и 6. Объём параллелепипеда равен 480. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины (см. рис. 419).

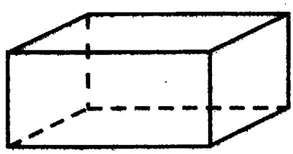


Рис. 419.

5. Объём правильной шестиугольной пирамиды равен 12. Сторона основания равна 2. Найдите боковое ребро (см. рис. 420).

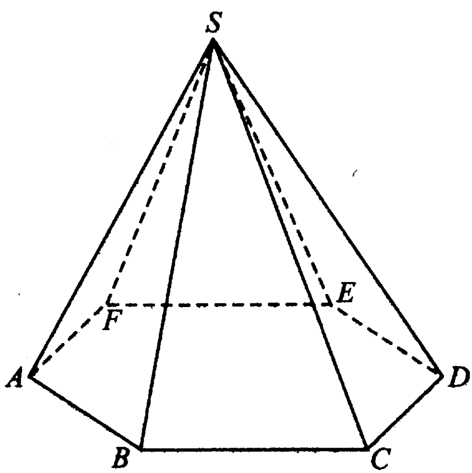


Рис. 420.

Вариант 7

1. В единичном кубе вырезали призму со стороной основания 0,2 и боковым ребром 1 (см. рис. 421). Найдите объём оставшейся части куба.

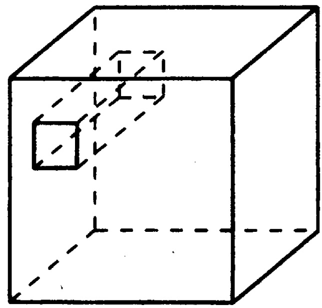


Рис. 421.

2. Найдите угол ACA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $AB = 6$, $AD = 8$, $AA_1 = 10$. Ответ дайте в градусах.

3. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AC_1 = 2B_1C_1$. Найдите угол между диагоналями DB_1 и AC_1. Ответ дайте в градусах.

4. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 5, 8, 25. Найдите ребро куба, объём которого равен объёму этого параллелепипеда (см. рис. 422).

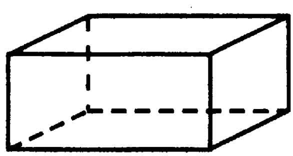


Рис. 422.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ K — середина ребра BC, S — вершина. Известно, что $SK = 10$, а площадь боковой поверхности равна 75. Найдите длину отрезка AB.

Вариант 8

1. Из куба со стороной $\sqrt{12}$ вырезана правильная четырёхугольная призма со стороной основания $\sqrt{3}$ и боковым ребром $\sqrt{12}$ (см. рис. 423). Найдите площадь поверхности оставшейся части куба.

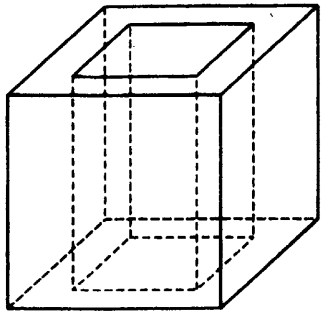


Рис. 423.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AB = 7$, $AD = 24$, $AA_1 = 15$. Найдите синус угла между прямыми CA и D_1C_1.

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 2, найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1. Ответ дайте в градусах.

4. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 2 и 7. Объём призмы равен 84. Найдите её боковое ребро.

5. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ медианы основания пересекаются в точке M. Площадь треугольника ABC равна 9, объём пирамиды равен 33. Найдите длину отрезка MD.

Цилиндр, конус, шар, комбинация тел (B10, B13)

Диагностическая работа

1. Если каждое ребро куба уменьшить на 2, то площадь его поверхности уменьшается на 48. Найдите ребро куба.

2. Объём первого конуса равен 30 м^3. У второго конуса радиус основания в 2 раза больше радиуса первого конуса, а высота второго в 3 раза меньше высоты первого. Найдите объём второго конуса. Ответ укажите в м^3.

3. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 8 и 5 (см. рис. 424). Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

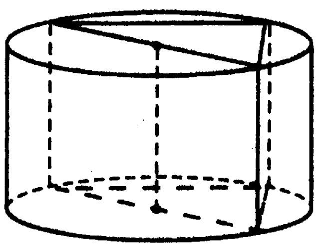


Рис. 424.

4. Высота конуса равна 15, а диаметр основания — 16. Найдите образующую конуса.

Цилиндр

1 ***Немного полезной информации***

Для объёма и площади боковой поверхности цилиндра (см. рис. 425) справедливы те же формулы, что и для призмы:

$$V = S_{\text{осн.}}h, \quad S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}}h.$$

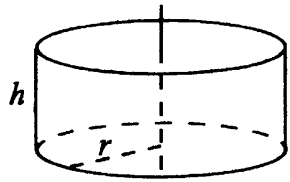


Рис. 425.

Если радиус основания равен r, то площадь основания цилиндра равна πr^2, а периметр — $2\pi r$. Тогда формулы объёма цилиндра, площадей боковой и полной поверхности цилиндра имеют вид

$$V = \pi r^2 h, \quad S_{\text{бок.}} = 2\pi rh, \quad S_{\text{полн.}} = 2\pi r(h + r).$$

Задачи с решениями

1. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 45 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 3 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Решение.

Объём воды после переливания остаётся тем же: $V_1 = V_2$; $\pi r_1^2 \cdot 45 = \pi r_2^2 \cdot h_2$. Так как диаметр второго сосуда в 3 раза больше диаметра первого, то и радиус второго втрое больше радиуса первого:
$45r_1^2 = (3r_1)^2 \cdot h_2$; $45r_1^2 = 9r_1^2 \cdot h_2$; $h_2 = 5$.

Ответ: 5.

2. Площадь осевого сечения цилиндра равна 6 (см. рис. 426). Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, делённую на π.

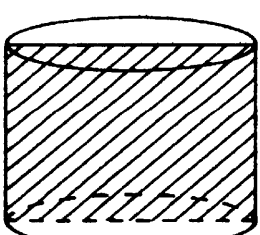


Рис. 426.

Решение.

Осевое сечение — это прямоугольник со сторонами $2r$ и h, где r — радиус основания, h — высота цилиндра. Площадь этого прямоугольника равна $2rh$. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $S_{\text{бок.}} = 2\pi rh$. Отсюда $\frac{S_{\text{бок.}}}{\pi} = 2rh = 6$.

Ответ: 6.

Конус

Немного полезной информации

Объём конуса (см. рис. 427) может быть вычислен по той же формуле, что и объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h.$$

Если известен радиус основания r, то объём можно найти по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

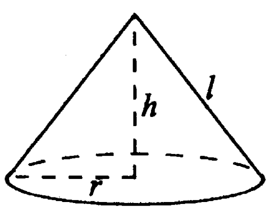


Рис. 427.

Площади боковой и полной поверхности конуса вычисляются следующим образом (l — образующая):

$$S_{\text{бок.}} = \pi rl, \quad S_{\text{полн.}} = \pi r(r + l).$$

Задачи с решениями

3. Найдите объём V конуса, образующая которого равна 10 и наклонена к плоскости основания под углом 30°. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Решение.

По условию $h = l\sin 30° = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ (см. рис. 428);

$r = l\cos 30° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$. Искомый объём равен

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot (5\sqrt{3})^2 \cdot 5 = 125\pi$; $\frac{V}{\pi} = 125$.

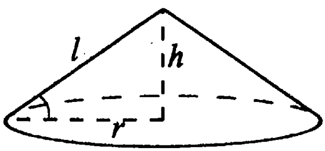


Рис. 428.

Ответ: 125.

4. Длина окружности основания конуса равна 4, образующая равна 5. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Решение.

Обозначим через r радиус основания конуса, через l образующую. Тогда по условию $2\pi r = 4$; $\pi r = 2$.
$S_{\text{бок.}} = \pi r l = 2 \cdot 5 = 10$.

Ответ: 10.

5. Найдите объём V части конуса, изображённой на рисунке 429. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

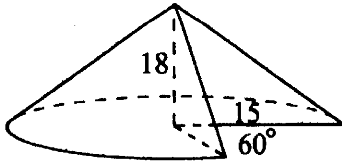


Рис. 429.

Решение.

Угол 60°, вырезанный из основания, составляет $\dfrac{60}{360} = \dfrac{1}{6}$ часть полного угла. Таким образом, $\dfrac{1}{6}$ часть конуса была удалена, $\dfrac{5}{6}$ осталось. Объём конуса с радиусом основания 15 и высотой 18 равен $\dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 18 = 225 \cdot 6 = 1350\pi$. Искомый объём $V = \dfrac{5}{6} \cdot 1350\pi = 1125\pi$; $\dfrac{V}{\pi} = 1125$.

Ответ: 1125.

Шар

Немного полезной информации

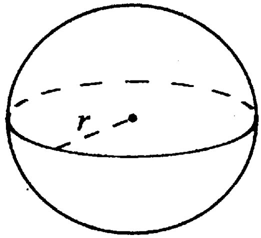


Рис. 430.

Объём шара и площадь его поверхности вычисляются по формулам

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad S = 4\pi r^2.$$

Задачи с решениями

6. Объём шара равен $36\,000\pi$. Найдите площадь его поверхности, делённую на π.

Решение.

Обозначим через r радиус шара. Тогда $\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\,000\pi$; $r^3 = 27\,000$; $r = 30$. Площадь поверхности шара равна $S = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 30^2 = 3600\pi$; $\frac{S}{\pi} = 3600$.

Ответ: 3600.

7. Площадь большого круга шара равна 10 (см. рис. 431). Найдите площадь поверхности шара.

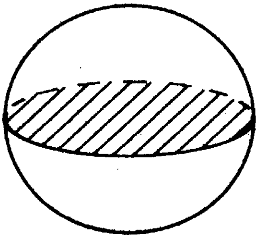


Рис. 431.

Решение.

Обозначим радиус шара через r. Тогда площадь большого круга шара равна πr^2, а площадь поверхности шара — $4\pi r^2$. Таким образом, площадь поверхности шара в 4 раза больше площади большого круга шара и равна $4 \cdot 10 = 40$.

Ответ: 40.

Увеличение и уменьшение геометрических тел

① *Немного полезной информации*

При увеличении всех линейных измерений тела в k раз площадь поверхности этого тела увеличивается в k^2 раз, а объём этого тела — в k^3 раз. Например, при увеличении радиуса шара в 5 раз площадь его поверхности увеличится в 25 раз, а объём — в 125 раз.

Объём параллелепипеда, призмы, цилиндра и конуса прямо пропорционален высоте и площади основания.

Задачи с решениями

8. Во сколько раз увеличится объём куба, если его рёбра увеличить в 4 раза?

Решение.

Объём куба прямо пропорционален третьей степени его ребра, поэтому объём увеличится в $4^3 = 64$ раза.

Ответ: 64.

9. Во сколько раз увеличится объём правильного тетраэдра, если все его рёбра увеличить в три раза?

Решение.

При увеличении всех линейных размеров тетраэдра в 3 раза его объём увеличится в $3^3 = 27$ раз.

Ответ: 27.

10. Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличить в 2,5 раза?

Решение.

Объём конуса прямо пропорционален площади основания. Площадь основания равна πr^2, то есть прямо пропорциональна квадрату радиуса. Таким образом, при увеличении радиуса основания в 2,5 раза объём увеличится в $2{,}5^2 = 6{,}25$ раз.

Ответ: 6,25.

Комбинации тел

Задачи с решениями

11. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту (см. рис. 432). Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 16.

Решение.

Объём конуса равен $\frac{1}{3}Sh$, а объём цилиндра — Sh, где S — площадь их общего основания, h — общая высота. Видно, что объём цилиндра в 3 раза больше объёма конуса и равен $16 \cdot 3 = 48$.

Ответ: 48.

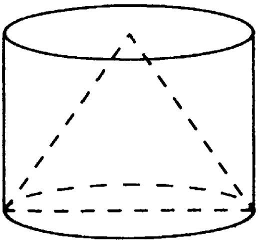


Рис. 432.

12. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра (см. рис. 433), радиус основания которого равен 5. Объём параллелепипеда равен 600. Найдите высоту цилиндра.

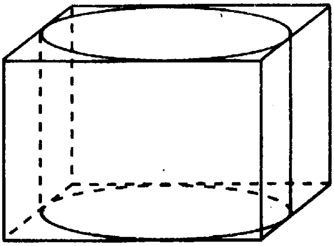


Рис. 433.

Решение.

Каждая сторона прямоугольника в основании параллелепипеда равна диаметру цилиндра, то есть $2 \cdot 5 = 10$. Площадь основания параллелепипеда равна $10 \cdot 10 = 100$. Высоту h параллелепипеда находим из формулы объёма параллелепипеда: $100h = 600$; $h = 6$. Найденная высота параллелепипеда одновременно является и высотой цилиндра.

Ответ: 6.

13. Объём куба равен 30 (см. рис. 434). Найдите объём четырёхугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.

Решение.

Рассмотрим куб как четырёхугольную призму. Его объём равен $V_{\text{куб}} = S_{\text{осн.}} h_{\text{куб}}$. Основание пирамиды совпадает с основанием призмы,

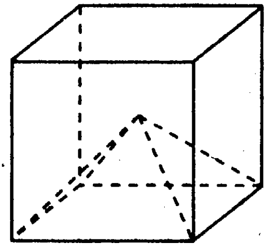


Рис. 434.

а высота вдвое меньше высоты призмы. Поэтому

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot h_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot \frac{1}{2}h_{\text{куб}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{\text{куб}} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5.$$

Ответ: 5.

14. Объём правильной шестиугольной пирамиды $GABCDEF$ равен 60 (см. рис. 435). Найдите объём треугольной пирамиды $GABC$.

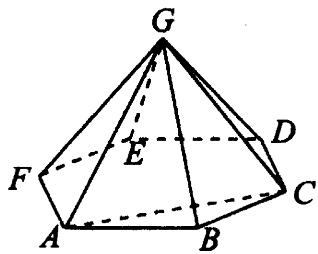


Рис. 435.

Решение.

Обозначим сторону шестиугольника в основании пирамиды через r. Правильный шестиугольник можно разбить на 6 правильных треугольников (как в задаче 12), поэтому площадь шестиугольника равна $6 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

Найдём площадь треугольника ABC.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{1}{6}S_{ABCDEF}.$$

Таким образом, площадь основания пирамиды $GABC$ в 6 раз меньше площади основания шестиугольной пирамиды, а их высóты совпадают.

Поэтому объёмы этих пирамид находятся в том же соотношении, что и площади их оснований. $V_{GABC} = \frac{1}{6}V_{GABCDEF} = \frac{1}{6} \cdot 60 = 10.$

Ответ: 10.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 8π, высота равна 2 (см. рис. 436). Найдите диаметр основания цилиндра.

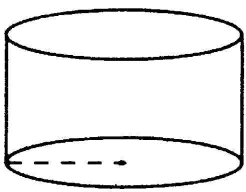


Рис. 436.

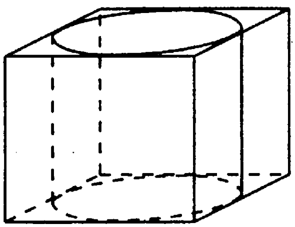


Рис. 437.

2. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, высота которого равна 16 (см. рис. 437). Объём параллелепипеда равен 64. Найдите радиус цилиндра.

3. В конус, осевым сечением которого является равносторонний треугольник, вписан шар. Найдите объём конуса, если объём шара равен 8.

4. Во сколько раз уменьшится площадь поверхности шара, если радиус шара уменьшится в 3 раза?

Вариант 2

1. Найдите площадь поверхности сферы, если площадь боковой поверхности вписанного в сферу конуса с основанием, совпадающим с сечением сферы, проходящим через её центр (см. рис. 438), равна $6\sqrt{2}$.

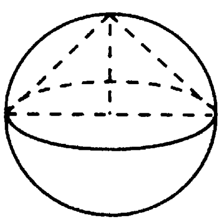


Рис. 438.

2. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра (см. рис. 439), радиус основания которого равен 5, а высота равна $2\sqrt{3}$.

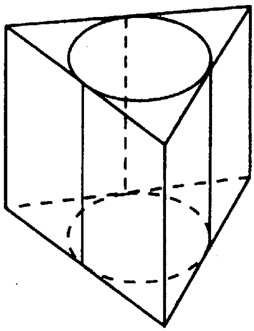


Рис. 439.

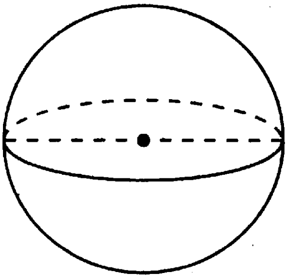


Рис. 440.

3. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара (см. рис. 440), если его объём увеличился в 27 раз?

4. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны $\sqrt[3]{2}$. Найдите объём параллелепипеда.

Вариант 3

1. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция с углом при основании $60°$ и боковой стороной 6, при этом одно из оснований проходит через центр окружности. Найдите объём конуса, описанного около пирамиды (см. рис. 441), если высота пирамиды равна 10. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

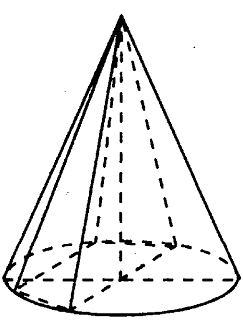


Рис. 441.

2. Объём первой пирамиды равен 24 м^3. У второй пирамиды площадь основания в 6 раз больше, чем площадь основания первой пирамиды, а высота второй пирамиды в три раза меньше, чем первой. Найдите объём второй пирамиды. Ответ дайте в кубических метрах.

3. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной $\sqrt{6}$. Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

4. В конус вписан цилиндр (см. рис. 442), высота которого в три раза меньше высоты конуса. Во сколько раз объём конуса больше объёма цилиндра?

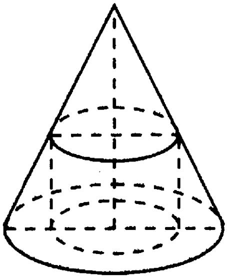


Рис. 442.

Вариант 4

1. Если каждое ребро куба увеличить на 2 (см. рис. 443), то его площадь поверхности увеличится на 192. Найдите ребро куба.

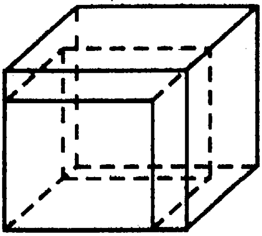


Рис. 443.

2. Диаметр основания конуса равен 18, а длина образующей — 15. Найдите высоту конуса.

3. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 35π, а высота — 7. Найдите диаметр основания.

4. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $5\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

Вариант 5

1. Если каждое ребро куба увеличить на 2, то его объём увеличится на 98. Найдите ребро куба (см. рис. 444).

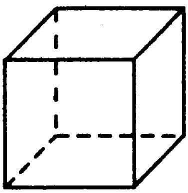


Рис. 444.

2. Радиусы двух шаров равны 9 и 40. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей обоих шаров (см. рис. 445).

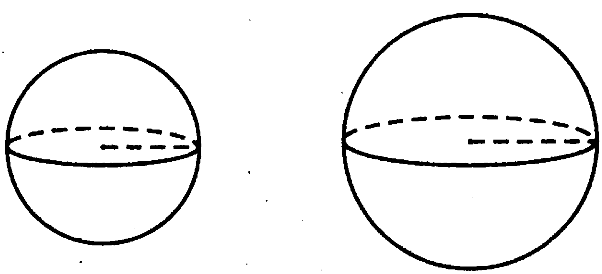


Рис. 445.

3. В шестиугольную призму вписан цилиндр, радиус основания которого равен $5\sqrt{3}$. Найдите высоту призмы, если её объём равен $30\sqrt{3}$.

4. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 9 см. На какой высоте (в см) будет находиться уровень жидкости, если её перелить во 2-й цилиндрический сосуд, радиус основания которого в 3 раза меньше радиуса 1-го?

Ответы

Ответы к диагностическим работам

Практический расчёт, оценка и прикидка (B1, B2)

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8
16	173	26	45	66	22	5	10 500

Чтение графиков и диаграмм (B3)

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8
3	16	10	5	8	100	40	9

Выбор наилучшего варианта (B4)

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
0,51	280	86 250	9800	20 900 000

Теория вероятностей (B6)

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6
0,002	0,25	0,6	0,2	0,125	3,6

Построение и исследование математических моделей (B14)

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6
96	1	50	10	300	20

Решение уравнений (B7)

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8
−242	−7	−5,5	2	3	1,5	−10,25	6

Вычисления и преобразования (B11)

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8
15,6	81	25	0,6	−0,5	264	8,5	0,95

Производная и исследование функций (B9)

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7
1	−7	6	4	1	0,5	9

Прикладные задачи (B12)

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
8	5	20	450

Наибольшие и наименьшие значения функций (B15)

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
−6	4	−3	−25

Площади (B5, B8)

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
18	6	16	12	5,625

Координаты и векторы (B5, B8)

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
−3	10	6	50	6

Углы и длины (B5, B8)

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
98	21	45	44	110

Тригонометрия (B5, B8)

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
0,7	2	4	2	−0,3

Параллелепипед, призма, пирамида (B10, B13)

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
2	60	60	30	11

Цилиндр, конус, шар, комбинация тел (B10, B13)

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
3	40	89	17

Ответы к вариантам для самостоятельного решения

Практический расчёт, оценка и прикидка (В1, В2)

	1	2	3	4	5	6	7	8
Вар. 1	7	6	18	80	6	11	69 300	15 000
Вар. 2	38	8	7	2	95	8	27	1500
Вар. 3	8	320	6	456	15	2000	8	3
Вар. 4	11	22	6	1	4	7	20	11 200
Вар. 5	10	3	864	56	2	15	15	320
Вар. 6	55,6	480	34	525	6	163	113	336

Чтение графиков и диаграмм (В3)

	1	2	3	4	5	6	7	8
Вар. 1	7	57	6	5	21	4000	32	3
Вар. 2	2	5	25	480	2100	6000	2	8,5
Вар. 3	3	13	4	4	5	3000	690	12
Вар. 4	10	20	1000	8	1	40	96000	4

Выбор наилучшего варианта (В4)

	1	2	3	4	5
Вар. 1	24 480	209 440	700	62,5	3520
Вар. 2	30 600	5900	95 550	25 375	6540
Вар. 3	13 600	97 200	5200	65 190	264
Вар. 4	22	1 207 800	20 610	1173	2352
Вар. 5	75	400	459	447	1240

Теория вероятностей (B6)

	1	2	3	4	5	6
Вар. 1	0,08	0,16	0,25	0,0625	0,893	0,75
Вар. 2	0,15	0,875	0,973	36	4,375	0,55
Вар. 3	0,5	0,004	9	36	0,4	0,064
Вар. 4	37	0,75	0,9506	0,125	0,002	0,65
Вар. 5	19	0,9997	0,5	6	0,001	0,3
Вар. 6	0,68	0,15	0,17	0,2	0,25	0,104
Вар. 7	0,9604	0,04	0,44	0,025	0,33	0,99

Построение и исследование математических моделей (B14)

	1	2	3	4	5	6
Вар. 1	120	21	50	14	600	20
Вар. 2	96	75	56	16	20	22,5
Вар. 3	24	55	32	2	5	18
Вар. 4	30	36	42	20	1,5	20
Вар. 5	160	300	6	68	40	32 000
Вар. 6	2,4	160	10	81 000	52	2

Решение уравнений (B7)

	1	2	3	4	5	6	7	8
Вар. 1	18	5	8,5	7	−2	−5,5	−3,8	−2
Вар. 2	−42	2,625	3,5	9	5	−2	−2,5	3
Вар. 3	−507	1	−2	−2	8	−7,6	3	−2
Вар. 4	118	9	1	2	−5	−5	1,8	6
Вар. 5	−1,8	2	0	−8	2,5	−8	2	−0,5

Вычисления и преобразования (B11)

	1	2	3	4	5	6	7	8
Вар. 1	16,9	0,25	12	0,16	45	3	−18	2,5
Вар. 2	243	0,7	28	10	7	25	4	1,75
Вар. 3	2,5	3	144	1	3	2	8	−3,5
Вар. 4	539	−1	2	440	9	8	−8	0,5
Вар. 5	339	1	−11	8	9,5	0,875	1	1

Производная и исследование функций (B9)

	1	2	3	4	5	6	7
Вар. 1	0	5	5	1	2	0,75	8,8125
Вар. 2	27	3	1	8	−10	1	11,5
Вар. 3	−4	4	−6	2	3	2	−1
Вар. 4	−5,5	5	−3	−14	24	2	4
Вар. 5	1	6	5	7	4	−0,5	6
Вар. 6	4	2	−5	8	18	18	27
Вар. 7	4	6	1	6	21	6	8

Прикладные задачи (B12)

	1	2	3	4
Вар. 1	80	1800	3,75	50
Вар. 2	2000	40	2,2	15
Вар. 3	300	8,8	90	5
Вар. 4	240 000	20	0,25	1,6
Вар. 5	15	18	120	0,5
Вар. 6	0,3	10	45	45
Вар. 7	0,5875	0,045	60	0,33

Наибольшие и наименьшие значения функций (B15)

	1	2	3	4
Вар. 1	10	2	31	30
Вар. 2	2	−88	−3	36
Вар. 3	8	−146	80	−22
Вар. 4	15	−14	11	2
Вар. 5	302	−35	−0,5	9
Вар. 6	−15	967	8	−3

Площади (B5, B8)

	1	2	3	4	5
Вар. 1	10	17,5	2	3	15
Вар. 2	15	6	18	3	12
Вар. 3	8	12	6	10	3,375
Вар. 4	12	8	70	7,5	21
Вар. 5	10	11	7,5	15	7

Координаты и векторы (B5, B8)

	1	2	3	4	5
Вар. 1	10	−7	64	12	45
Вар. 2	3	3	2	41	15
Вар. 3	2	10	4	10	0
Вар. 4	10	−3	4,5	20	98
Вар. 5	5	7	365	5	6

Углы и длины (B5, B8)

	1	2	3	4	5
Вар. 1	23	66	180	2	2,5
Вар. 2	78	4	90	48	112
Вар. 3	42	122	110	6	21
Вар. 4	52	70	19	20	5
Вар. 5	30	36	52	107	12
Вар. 6	27	70	14	5	2
Вар. 7	48	5	13,5	150	109
Вар. 8	96	19	18	16	6

Тригонометрия (B5, B8)

	1	2	3	4	5
Вар. 1	0,6	0,4	12	3,25	1,75
Вар. 2	4	0,625	3,25	32	33
Вар. 3	0,9	0,6	80	45	56
Вар. 4	0,9	0,8	91	24	18
Вар. 5	0,8	−0,2	13,5	1,5	160
Вар. 6	4,8	38,4	0,25	0,5	12,75
Вар. 7	12	12	7,5	0,28	1,375
Вар. 8	3	−0,9	48,75	11	38

Параллелепипед, призма, пирамида (B10, B13)

	1	2	3	4	5
Вар. 1	1040	60	2	3	0,96
Вар. 2	9	45	90	12	45
Вар. 3	27	45	60	13	9
Вар. 4	84	0,2	90	12	13
Вар. 5	113	1	45	3	24
Вар. 6	222	45	30	16	4
Вар. 7	0,96	45	60	10	5
Вар. 8	90	0,96	45	12	11

§6. Цилиндр, конус, шар, комбинация тел (В10, В13)

	1	2	3	4
Вар. 1	4	1	18	9
Вар. 2	24	180	9	8
Вар. 3	120	48	12	2,25
Вар. 4	7	12	5	5
Вар. 5	3	41	0,2	81

Ответы к заданиям тренировочных тестов

Часть 1

	1	2	3	4	5
Вар. 1	3	15	37 800	0,994	20
Вар. 2	7	11	259	0,9975	22
Вар. 3	18	4	114 450	0,6	63
Вар. 4	21	9	6216	1,44	130
Вар. 5	4	1100	80	0,5	20
Вар. 6	4	11	8704	0,9	8
Вар. 7	4	5	68 400	0,25	2
Вар. 8	9000	2500	375	0,864	130
Вар. 9	7	4	64 400	0,6	100
Вар. 10	4620	231	3360	0,5	20
Вар. 11	4000	6400	22 008	0,9603	400
Вар. 12	1980	6250	29 250	0,875	80
Вар. 13	30	−10	5600	0,4	78
Вар. 14	78 000	3140	22 350	0,35	100
Вар. 15	2610	5000	32 967	0,25	25
Вар. 16	6786	23	32	0,09	6

Часть 2

	1	2	3	4	5
Вар. 1	7	216	5	3,2	0
Вар. 2	−1	1,5	2	30	0,5
Вар. 3	12	4	4	500	10
Вар. 4	8	−1	18	90	3
Вар. 5	−4	8	6	5	2,25
Вар. 6	−4,5	−3,125	0,4	8	−1
Вар. 7	6	16	10,5	180 000	−10,5
Вар. 8	3	−4	1	60	−1
Вар. 9	2	3,5	3	20	−10,8
Вар. 10	−7	1	−1	7,6	−36,5
Вар. 11	−15	−4	0,75	15	−6
Вар. 12	27	−1	2	4,8	9

Часть 3

	1	2	3	4	5
Вар. 1	12	0,28	3,25	8	289
Вар. 2	9	0,75	0,5	36	236
Вар. 3	5	0,75	45	17	242
Вар. 4	20	6,72	360	12	2744
Вар. 5	10	24	30	4	7
Вар. 6	12,5	19,25	0,5	9	60
Вар. 7	6,5	15	18	4	8
Вар. 8	5	−3	5	16	25
Вар. 9	9	−6,875	68	16	7
Вар. 10	7	16	117	4	0,6
Вар. 11	8	1,5	3,5	13,5	73
Вар. 12	10	1	9	60	94
Вар. 13	6	0,9	45	14	13
Вар. 14	40	−0,7	29	22	20
Вар. 15	9	4,8	29	4	90
Вар. 16	11,5	−0,6	20	1,2	3

Готовимся к ЕГЭ

Учебное издание

Коннова Елена Генриевна
Дремов Александр Петрович
Иванов Сергей Олегович
Шеховцов Виктор Анатольевич

МАТЕМАТИКА. ЕГЭ-2015
ЭКСПРЕСС-ПОДГОТОВКА: ЗАДАНИЯ С КРАТКИМ ОТВЕТОМ.
Все задания и методы их решения

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *А. Вартанов*
Компьютерная верстка *С. Иванов*
Корректор *Л. Андрецова*

Подписано в печать с оригинал-макета 16.09.2014.
Формат 60x84 1/16. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 22,32.
Доп. тираж 10 000 экз. Заказ № 140620

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344082, г. Ростов-на-Дону, ул. Согласия, 7.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в типографии ООО «Подольская Периодика»
142100, Московская обл., г. Подольск, ул. Кирова, 15.
www.podolsk-print.ru