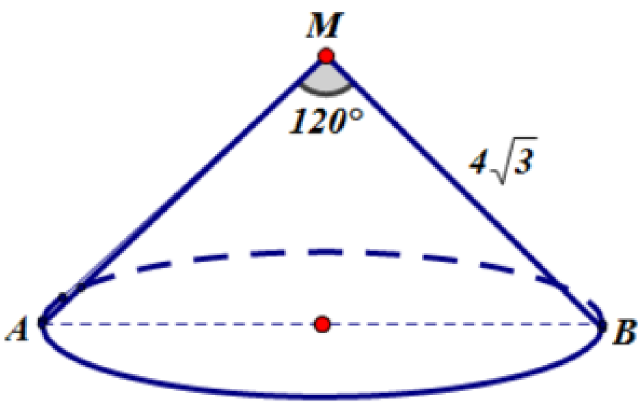
Задание 14 из пробного варианта ЕГЭ-2016, г. Томск

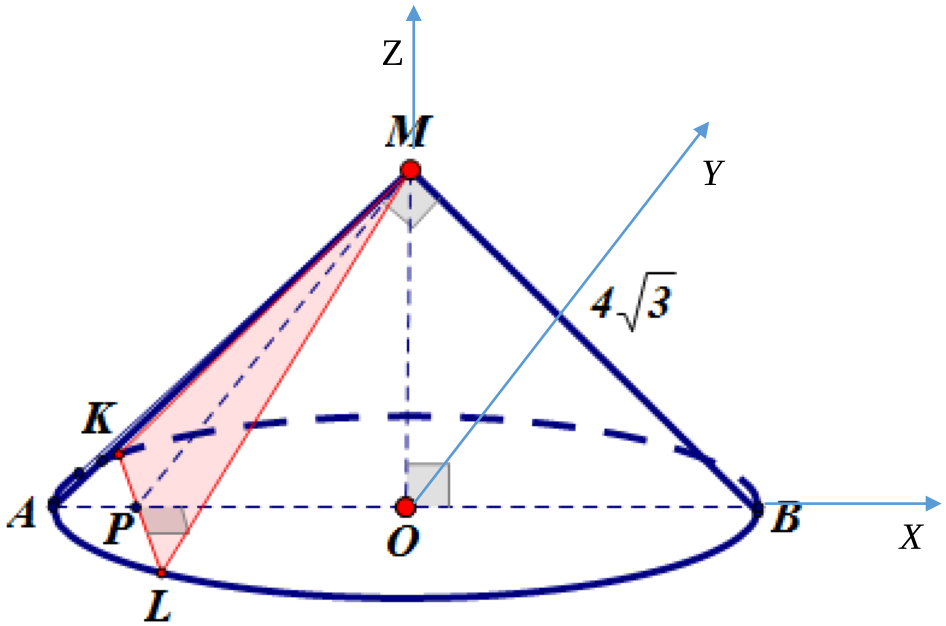
Задание 14. Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса - треугольник с углом 120° при вершине M. Образующая конуса равна $4\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник - тупоугольный.

б) Найдите угол при основании этого треугольника.



Введем систему координат



Так как угол $MBO=30^\circ$ тогда $|OM|=2\cdot\sqrt{3}$ $\quad |OA|=|OB|=6$

Запишем координаты точек:

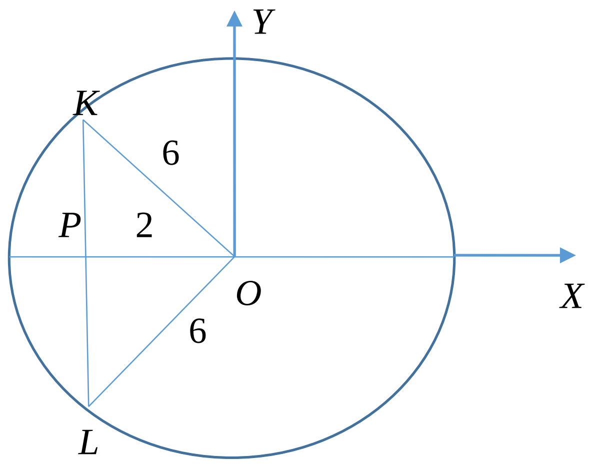
$$O(0;0;0)\ B(6;0;0)\ M\left(0;0;2\sqrt{3}\right)$$

Пусть точка Р имеет координаты $P(x;0;0)$. Найдем ее координаты из условия перпендикулярности векторов $\vec{MB}\left(6;0;-2\sqrt{3}\right)$ и $\vec{PM}\left(-x;0;2\sqrt{3}\right)$. Скалярное произведение этих векторов равно нулю $MB_xPM_x+MB_yPM_y+MB_zPM_z=0$.

Имеем: $-6\cdot x+0-4\cdot 3=0 \qquad x=-2$

Таким образом точка P имеет координаты $P(-2;0;0)$

Найдем координаты точек K и L.



Из треугольников OKPи OPL $PK=4\sqrt{2}$ $PL=4\sqrt{2}$

Точки K и P имеют координаты $K(-2;4\sqrt{2};0)$ $L(-2;-4\sqrt{2};0)$.

Докажем, что плоскость KLM перпендикулярна прямой MB.

Запишем уравнение указанной плоскости KLM.

Мои ученики пишут уравнение плоскости используя определитель, но не уверен, что что это будет более наглядно чем запись указанного уравнения, приводимого в учебнике.

Итак, уравнение плоскости имеет вид $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$

Так как точки K L M принадлежат этой плоскости тогда подставив их координаты мы должны получить тождество.

Имеем: для точки $M(0;0;2\sqrt{3})$ $\qquad A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 2\sqrt{3}+D=0$

для точки $\qquad K(-2;4\sqrt{2};0)$ $\quad A\cdot(-2)+B\cdot 4\sqrt{2}+C\cdot 0+D=0$

для точки $\qquad L(-2;-4\sqrt{2};0)$ $\quad A\cdot(-2)-B\cdot 4\sqrt{2}+C\cdot 0+D=0$

Решая систему имеем: $A=\sqrt{3}$ $\quad B=0$ $\quad C=-1$ $\quad C=2\sqrt{3}$

Итак, плоскость KLM имеет вид $\sqrt{3}\cdot x-z+2\sqrt{3}=0$

Легко проверить что, подставив координаты точек K L M мы получаем тождество для всех трех точек.

Так как коэффициенты ABC в приведённом уравнении плоскости определяют вектор нормали $n(\sqrt{3};0;-1)$плоскости можно легко доказать, что плоскость K L M перпендикулярна прямой MB.

Вычислим косинус угла между векторами $n(\sqrt{3};0;-1)$ и $\vec{MB}(6;0;-2\sqrt{3})$

$$\cos\varphi=\frac{6\sqrt{3}+0+2\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}\cdot\sqrt{6^2+12}}=\frac{8\sqrt{3}}{2\cdot 4\sqrt{3}}=1$$

Все дальнейшие доказательства и вычисления также не вызывают трудностей.

Вычислим угол KML – обозначим его β. Вектор $\vec{KM}$ имеет координаты $\vec{KM}(2;-4\sqrt{2};2\sqrt{3})$

Вектор $\vec{LM}$ имеет координаты $\vec{LM}(2;4\sqrt{2};2\sqrt{3})$

$\cos\beta=\dfrac{4-32+12}{\sqrt{4+32+12}\cdot\sqrt{4+32+12}}=\dfrac{-16}{48}=-\dfrac{1}{3}$ Угол β чуть больше 109 градусов.

Вычислим угол KLM – обозначим его γ. Вектор $\vec{KL}$ имеет координаты $\vec{KM}(0;-8\sqrt{2};0)$

Вектор $\vec{LM}$ имеет координаты $\vec{LM}(2;4\sqrt{2};2\sqrt{3})$

$$\cos\gamma=\frac{0-64+0}{8\sqrt{2}\cdot\sqrt{4+32+12}}=\frac{-8}{\sqrt{2}\cdot4\sqrt{3}}=-\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\sin\gamma=\sqrt{1-\cos^2\gamma}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

С уважением Сергей Симутин.