Постановка задачи

Задание 14 из Пробного варианта, г. Брянск (2016 г.)

Задание 14.Дана правильная треугольная пирамида SABC.

А) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M ребра SA перпендикулярно высоте CN основания пирамиды.

Б) Найдите площадь этого сечения, если каждое ребро данной пирамиды равно 12 и $AM : MS = 1:3$

Краткая теория

1. Если даны два вектора, то косинус угла φ между векторами a = (x_1; y_1; z_1) и b = (x_2; y_2; z_2):

$$\cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

2. Чтобы найти направляющие вектора, надо из координат его конца вычесть координаты начала.
3. Для чего нужны направляющие вектора?

4. Для того чтобы задать уравнение прямой в пространстве необходимы всего два параметра:

   координаты точки $M(x_0; y_0; z_0)$ через которую будет проходить эта прямая и направляющий вектор этой прямой $p(p_1; p_2; p_3)$

   Уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}$$

5. Для того чтобы задать уравнение плоскости в пространстве необходимы также всего два параметра:

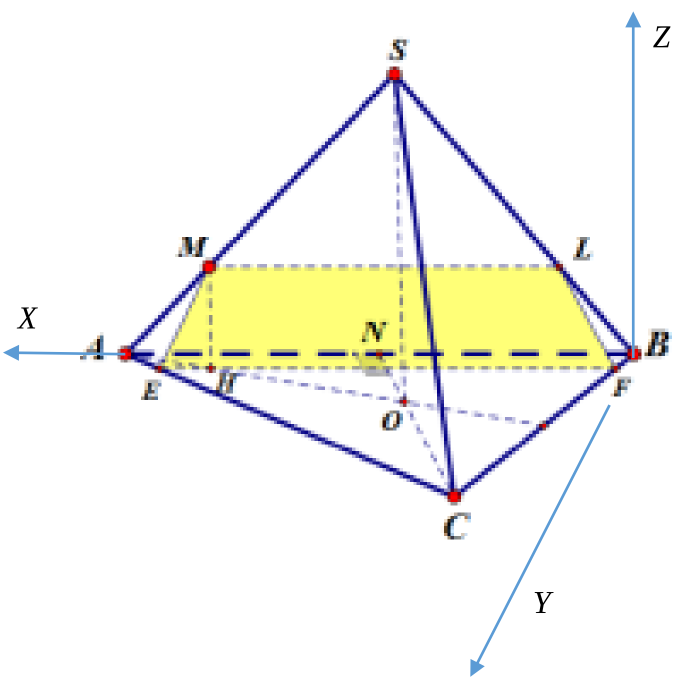
   координаты точки $M(x_0; y_0; z_0)$ через которую будет проходить эта плоскость и вектор нормали этой плоскости $n(n_1; n_2; n_3)$

   Уравнение плоскости имеет вид:

$$n_1 \cdot (x - x_0) + n_2 \cdot (y - y_0) + n_3 \cdot (z - z_0) = 0$$

Этих сведений достаточно для решения поставленной задачи.

Введем систему координат



Идея решения заключается в следующем:

1). Записываем координаты точек A; B; C; S; O   (Блок I)

2). Находим координаты точки M. (Блок II)

3). Записываем уравнение плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой CN.   (Блок III)

4). Находим точки:

E как пересечение плоскости и прямой AC   (Блок IV)

L как пересечение плоскости и прямой SB   (Блок V)

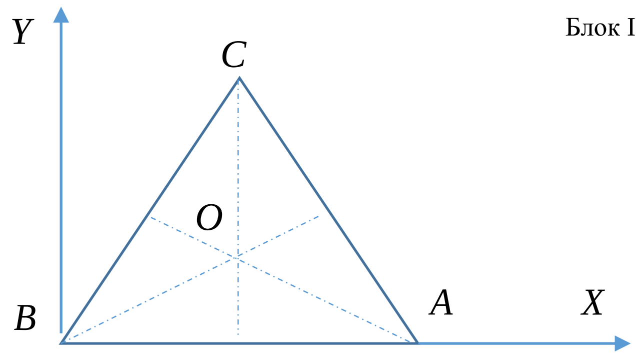
F как пересечение плоскости и прямой BC   (Блок VI)

5). Находим расстояние от точки M до прямой EF. (Блок VII)

6). Доказываем, что указанная плоскость трапеция. (Блок VIII)

7). Вычисляем площадь этой трапеции (Блок IX)

Блок I



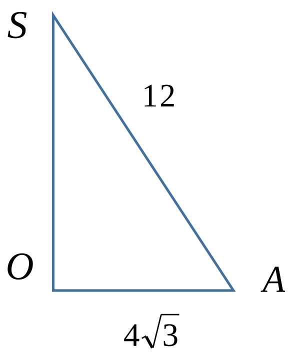
Запишем координаты точек:

$B(0;0;0)\quad A(12;0;0)\quad C(6;6\sqrt{3};0)$

Треугольник BAC правильный поэтому координаты точки O можно вычислить как среднее арифметическое координат точек BAC $O\left(\frac{0+12+6}{3};\frac{0+0+6\sqrt{3}}{3};\frac{0+0+0}{3}\right)$ то есть $O(6;2\sqrt{3};0)$

Вычислим длину отрезка OA . Строим вектор $\vec{OA}(6;4\sqrt{3};0)$ Поэтому $|OA|=4\sqrt{3}$

Найдем $|OS|$



$|OS|^2=144-48=96\quad |OS|=4\sqrt{6}$ Таким образом точка S имеет координаты $S(6;2\sqrt{3};4\sqrt{6})$

Блок II

Для нахождения координаты точки M воспользуемся формулами деления отрезка в данном отношении

Если известны две точки $A(x_A; y_A; z_A)$ $S(x_S; y_S; z_S)$, то координаты точки $M(x_M; y_M; z_M)$, которая делит отрезок AS в отношении $\lambda = \frac{AM}{MS}$, выражаются формулами:

$$M_X = \frac{A_X + \lambda \cdot S_X}{1+\lambda} \quad M_Y = \frac{A_Y + \lambda \cdot S_Y}{1+\lambda} \quad M_Z = \frac{A_Z + \lambda \cdot S_Z}{1+\lambda}$$

Имеем: $M_X = \frac{21}{2}$ $M_Y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $M_Z = \sqrt{6}$

Таким образом $M\left(\frac{21}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{6}\right)$

Блок III

Напишем уравнение плоскости, проходящей через точку M которая перпендикулярна прямой OC.

В качестве вектора нормали указанной плоскости возьмем направляющий вектор прямой OC.

Направляющий вектор прямой OC имеет вид $\vec{OC}\left(0;4\sqrt{3};0\right)$

Поэтому вектор нормали указанной плоскости будет иметь вид $\vec{n}\left(0;4\sqrt{3};0\right)$

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку M и вектор нормали которой $\vec{n}\left(0;4\sqrt{3};0\right)$

$$0 \cdot (x - \frac{21}{2}) + 4\sqrt{3} \cdot (y - \frac{\sqrt{3}}{2}) + 0 \cdot (z - \sqrt{6}) = 0$$

Уравнение необычное только на первый взгляд. Оно обозначает, что x координаты и z координаты точек этой плоскости могут принимать любые значения, а вот Y координаты всех точек плоскости равны одному и тому же значению, а именно $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Блок IV

Это свойство поможет нам легко найти координаты точки E, которая является точкой пересечения нашей плоскости и прямой AC.

Уравнение прямой AC имеет вид: $\frac{x-12}{-6} = \frac{y}{6\sqrt{3}} = \frac{z}{0}$ Последний член в приведенном уравнении $\frac{z}{0}$ означает что все Z координаты точек прямой AC равны нулю.

Наша плоскость пересекается с прямой AC в точке E. Это означает, что точка E принадлежит и плоскости, и прямой AC. Но ведь в плоскости Y координаты всех точек плоскости равны одному и тому же значению, а именно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Поэтому мы легко найдем x координату точки E, подставив в уравнение $\frac{x-12}{-6} = \frac{y}{6\sqrt{3}}$ значение $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Имеем: $\frac{x-12}{-6} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}$

Отсюда координата x будет равна $x = \frac{23}{2}$ Таким образом точка E имеет координаты $E\left(\frac{23}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

Блок V

Наша плоскость пересекается с прямой СВ в точке F.

Уравнение прямой СВ имеет вид: $\frac{x}{6}=\frac{y}{6\sqrt{3}}$

Это означает, что точка F принадлежит и плоскости и прямой СВ. Поэтому подставив в уравнение $\frac{x}{6}=\frac{y}{6\sqrt{3}}$ значение $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Имеем: $\frac{x}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 6\cdot\sqrt{3}}$

Отсюда координата x будет равна $x=\frac{1}{2}$

Таким образом точка F имеет координаты $F\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

Блок VI

Найдем координаты точки L, которая является точкой пересечения нашей плоскости и прямой SB.

Уравнение прямой SB имеет вид: $\frac{x}{6}=\frac{y}{2\sqrt{3}}=\frac{z}{4\sqrt{6}}$

подставляя в него значение $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ найдем координаты точки L

Имеем: $\frac{x}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2\cdot\sqrt{3}}$ Отсюда координата x будет равна $x=\frac{3}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2\cdot\sqrt{3}}=\frac{z}{4\cdot\sqrt{6}}$ Отсюда координата z будет равна $z=\sqrt{6}$

Таким образом точка L имеет координаты $L\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{6}\right)$

Блок VII

Легко можно найти расстояние от точки H до прямой EF.

Прямая EF имеет направляющий вектор $\vec{EF}\left(11;0;0\right)$

Построим плоскость, проходящую через точку M и имеющую вектор нормали $\vec{n}\left(11;0;0\right)$

$$11\cdot(x-\frac{21}{2})+0\cdot(y-\frac{\sqrt{3}}{2})+0\cdot(z-\sqrt{6})=0$$

Уравнение обозначает, что z координаты точек этой плоскости могут принимать любые значения, а вот X координаты всех точек плоскости равны одному и тому же значению, а именно $x=\frac{21}{2}$. Y координаты всех точек плоскости равны одному и тому же значению, а именно $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом точка H имеет координаты $H\left(\frac{21}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

Поэтому легко найти расстояние между точками M и H.

Строим вектор $\vec{HM}\left(0;0;\sqrt{6}\right)$. Вычисляем длину вектора $|HM|=\sqrt{6}$.

Блок VIII

Докажем параллельность прямых LM и FE.

Запишем вектора $\vec{LM}\,(9;0;0)$ $\quad \vec{FE}\,(11;0;0)$ $\quad \cos\varphi = \dfrac{9\cdot 11 + 0 + 0}{9\cdot 11} = \dfrac{99}{99} = 1$

Вычислим длину отрезков EM и LF. Запишем вектора $\vec{ME}\,(1;0;-\sqrt{6})$ $\quad \vec{LF}\,(1;0;\sqrt{6})$
Длины ME и LF одинаковы.

Блок IX

Вычислим площадь трапеции EMLF.

$$S = \frac{|LM| + |FE|}{2}\cdot|HM| \qquad S = \frac{9+11}{2}\cdot\sqrt{6} = 10\cdot\sqrt{6}$$