

## Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2018 года

1. Какое из чисел  $\frac{49}{18}$  и  $\frac{79}{24}$  ближе к 3?
2. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых разность между корнями уравнения  $x^2 + 3ax + a^4 = 0$  максимальна.
3. Решите уравнение  $\sin 4x \cos 10x = \sin x \cos 7x$ .
4. Решите неравенство  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x} \geq (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{\log_x(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$ .
5. Данна трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Пусть  $M$  – середина отрезка  $AD$ , а  $N$  – произвольная точка отрезка  $BC$ . Пусть  $K$  – пересечение отрезков  $CM$  и  $DN$ , а  $L$  – пересечение отрезков  $MN$  и  $AC$ . Найдите все возможные значения площади треугольника  $DMK$ , если известно, что  $AD : BC = 3 : 2$ , а площадь треугольника  $ABL$  равна 4.
6. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - 8y + 6a + 28 \leq 0 \\ ay^2 - 6ay - 8x + 11a - 12 \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCDA'B'C'D'$  с боковыми ребрами  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ . На ребрах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  нижнего основания отмечены соответственно точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , таким образом, что  $AK : KB = 4 : 5$ ,  $BL : LC = 3 : 1$ ,  $CM : MD = 7 : 2$ ,  $DN : NA = 3 : 1$ . Пусть  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  – центры сфер, описанных около тетраэдров  $AKNA'$ ,  $BLKB'$ ,  $CMLC'$ , соответственно. Найдите  $PQ$ , если известно, что  $QR = 1$  и  $AB : BC = 3 : 2$ .
8. Найдите все пары чисел  $x$ ,  $y$  из промежутка  $(0, \frac{\pi}{2})$ , при которых достигается минимум выражения

$$\left( \frac{\sqrt{3} \sin y}{\sqrt{2} \sin(x+y)} + 1 \right) \left( \frac{\sqrt{2} \sin x}{3 \sin y} + 1 \right)^2 \left( \frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3} \sin x} + 1 \right)^4$$

## Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2018 года

1. Какое из чисел  $\frac{49}{32}$  и  $\frac{59}{24}$  ближе к 2?
2. Найдите все значения параметра  $p$ , при которых разность между корнями уравнения  $x^2 + px + 3p^4 = 0$  максимальна.
3. Решите уравнение  $\cos 12x \cos 5x = \cos 8x \cos x$ .
4. Решите неравенство  $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^{\frac{\lg x}{\lg(\sqrt{6}-\sqrt{5})}} \geq (\sqrt{6} - \sqrt{5})^{\frac{\lg(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{\lg x}}$ .
5. Данна трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Пусть  $M$  – середина отрезка  $AD$ , а  $N$  – произвольная точка отрезка  $BC$ . Пусть  $K$  – пересечение отрезков  $CM$  и  $DN$ , а  $L$  – пересечение отрезков  $MN$  и  $AC$ . Найдите все возможные значения площади треугольника  $ABL$ , если известно, что  $AD : BC = 4 : 5$ , а площадь треугольника  $DMK$  равна 2.
6. Найдите все значения параметра  $p$ , при которых система

$$\begin{cases} px^2 + 8px + 12y + 18p - 30 \geq 0 \\ py^2 - 4py + 12x + 6p + 42 \geq 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCDA'B'C'D'$  с боковыми ребрами  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ . На ребрах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  нижнего основания отмечены соответственно точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , таким образом, что  $AK : KB = 9 : 7$ ,  $BL : LC = 7 : 5$ ,  $CM : MD = 5 : 3$ ,  $DN : NA = 3 : 1$ . Пусть  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  – центры сфер, описанных около тетраэдров  $AKNA'$ ,  $BLKB'$ ,  $CMLC'$ , соответственно. Найдите  $QR$ , если известно, что  $PQ = 1$  и  $AB : BC = 4 : 3$ .
8. Найдите все пары чисел  $x$ ,  $y$  из промежутка  $(0, \frac{\pi}{2})$ , при которых достигается минимум выражения

$$\left( \frac{\sqrt{7} \cos y}{\sqrt{6} \sin(x+y)} + 1 \right) \left( \frac{\sqrt{6} \cos x}{3 \cos y} + 1 \right)^2 \left( \frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{7} \cos x} + 1 \right)^4$$