Подготовка к ЕГЭ. Задание 14
Ege-ok.ru

Презентации

№1

Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной основания $\sqrt{3}$ и боковым ребром 1.
а) Докажите, что плоскости ACA_1 и B_1CE_1 перпендикулярны.
б) Найдите угол между прямыми BF_1 и CD_1.

Ответ: $\arccos\left(\frac{11}{4\sqrt{10}}\right)$

№2

В треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M – середина ребра SA, точка K – середина ребра SB, O – точка пересечения медиан основания.
а) Докажите, что плоскость CMK делит отрезок SO в отношении $3:2$, считая от вершины S.
б) Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если пирамида правильная,
$SC = 6$, $AB = 4$.

Ответ: $arctg\frac{\sqrt{23}}{5}$

№3

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S все ребра равны.
а) Постройте прямую пересечения плоскости SAD с плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AS.
б) Найдите угол между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AS.

Ответ: $90°$

№4

Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания $\sqrt{2}$ и боковым ребром 2. Точки M и N – середины ребер A_1B_1 и CC_1 соответственно.
а) Докажите, что $MN \perp BC_1$
б) Найдите расстояние от точки M до плоскости BC_1D.

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{5}}$

№5

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре B_1C_1 отмечена

точка L так, что $B_1L = 4$. Точки K и M – середины ребер AC и A_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой A_1C_1 и содержит точки K и L.
а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.
б) Найдите объем пирамиды, вершина которой - точка M, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

Ответ: $5\sqrt{3}$

№6

Угол при вершине осевого сечения конуса равен $arccos\frac{7}{9}$
а) Докажите, что площадь полной поверхности конуса в четыре раза больше площади его основания.
б) Найдите угол в развертке боковой поверхности.

Ответ: $120°$

№7

Дан прямой круговой конус объемом $12\sqrt{3}\pi$. Через его вершину S проведено сечение SCD. Точки C и D, лежащие на окружности основания конуса, стягивают дугу $120°$. Угол SCD равен $arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}$.
а) Докажите, что квадрат длины образующей относится к квадрату радиуса основания конуса как 13:12.
б) Найдите площадь сечения SCD.

Ответ: 18

№8

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S проведена высота SD. На отрезке SD взята точка K так, что $SK:KD = 1:2$. Известно, что двугранные углы между основанием и боковыми гранями равны $\frac{\pi}{6}$, а расстояние от точки K до бокового ребра равно $\frac{4}{\sqrt{13}}$.
а) Докажите, что расстояние от точки D до бокового ребра втрое больше, чем расстояние от точки K до бокового ребра.
б) Найдите объем пирамиды.

Ответ: 216

№9

Объем пирамиды $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M. При этом $DM:MC = 2:3$.
а) Докажите, что эта плоскость делит пирамиду на два многогранника равного объема.
б) Найдите площадь сечения пирамиды указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.

Ответ: 3

№10

Длина высоты SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна 1, а длины сторон основания ABC равны $2\sqrt{6}$. Точки M и N - середины отрезков AC и BC. Вычислить радиус сферы, вписанной в пирамиду $SAMN$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+1+\sqrt{3}}$

№11

Треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с нижним основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 рассечена плоскостью, проходящей через точки E, F, C, где точка E является серединой ребра AA_1, точка F лежит на ребре BB_1, причем $BF:FB_1 = 1:2$.

а) Докажите, что объем пирамиды EBB_1C_1C равен $2/3$ объема призмы $ABCA_1B_1C_1$.

б) Найдите объем части призмы $ABCA_1B_1C_1$, заключенный между секущей плоскостью и нижним основанием этой призмы, если объем призмы равен 36.

Ответ: 10

№12

Основания шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильные шестиугольники. Точки K, L, и M –середины ребер EF, CD и BB_1, соответственно.

а) Докажите, что плоскость KLM делит ребро FF_1 в отношении $1:5$, считая от точки F.

б) Найдите расстояние от центра основания $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ до плоскости KLM, если призма правильная и $AB = 1$ и $AA_1 = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$

№13

В шар вписана треугольная пирамида, в основании которой лежит правильный треугольник. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания, а другие образуют с плоскостью основания угол $\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{3}{7}}$. Найдите радиус шара, если высота пирамиды равна 6.

Ответ: 5

№14

В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами $7, 8, 9$. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°.

а) Докажите, что центр окружности, описанной около основания пирамиды, центр сферы, описанной около пирамиды и вершина пирамиды лежат на одной прямой.

б) Найдите высоту пирамиды.

Ответ: $\frac{21\sqrt{15}}{10}$

№15

В треугольной пирамиде $SABC$ на ребре SB взята точка M, делящая отрезок SB в отношении $3:5$, считая от точки S. Через точки A и M параллельно медиане BD треугольника ABC проведена плоскость α.
а) Докажите, что плоскость α делит ребро SC в отношении $3:10$, считая от точки S.
б) Найдите, в каком отношении плоскость α делит объем пирамиды.

Ответ: $9:95$

№16

Основание четырехугольной пирамиды - квадрат, а все боковые грани - прямоугольные треугольники, у которых вершины прямых углов лежат на основании пирамиды. Высота пирамиды равна единице, и один из двугранных углов при вершине равен $120°$.
а) Докажите, что вершина пирамиды проецируется в вершину основания.
б) Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{1}{3}$

№17

Боковые ребра пирамиды $SABC$ с вершиной S попарно перпендикулярны.
а) Докажите, что высота SH пирамиды проходит через точку пересечения высот основания ABC.
б) Найдите SH, если боковые ребра равны 2, 2 и $7\sqrt{2}$.

Ответ: $1{,}4$

№18

Через середину высоты правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение α, перпендикулярное боковому ребру. Длина бокового ребра равна 4, а угол между боковыми ребрами, лежащими в одной грани равен $\frac{\pi}{3}$.
а) Докажите, что боковые ребра пирамиды, принадлежащие разным граням, попарно перпендикулярны.
б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α.

Ответ: $5\sqrt{2}$

№19

Через сторону AB основания ABC правильной треугольной пирамиды $DABC$ проведена плоскость перпендикулярно ребру DC. Известно, что эта плоскость разбивает пирамиду на две треугольные пирамиды, объёмы которых относятся как 3 : 5, причём точка D содержится в большей из этих частей.
а) Докажите, что эта плоскость делит высоту DH пирамиды в отношении 5 : 1, считая от вершины D.
б) Найдите угол между секущей плоскостью и плоскостью ABC.

Ответ: $30°$

№20

Точки M и N лежат на ребрах соответственно AB и A_1B_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причем $AM:MB = B_1N:NA_1 = 2:1$; точка K – середина ребра CC_1.

а) Постройте точку пересечения плоскости KMN с прямой B_1C_1.

б) Найдите угол между прямой BB_1 и плоскостью KMN, если параллелепипед прямоугольный, $AB = 3, BC = 2,\ AA_1 = 4$.

Ответ: $\arcsin\frac{1}{\sqrt{26}}$

№21

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $CD = 36$, $AD = 24$, $DD_1 = 28{,}8$. Точки M и N делят стороны основания AB и CB так, что $BM:MA = 5:4$, $BN:NC = 5:3$.

а) Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через вершину D_1 и точки M и N делит ребро AA_1 в отношении $1:2$, считая от точки A, а ребро CC_1 в отношении $1:3$, считая от точки C.

б) Найдите площадь сечения.

Ответ: $714\sqrt{2}$

№22

Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ описана около шара радиуса $\sqrt{10}$. Точки M и N –середины ребер BB_1 и CC_1. В шар вписан цилиндр так, что его основание лежит в плоскости AMN. Найдите объем цилиндра.

Ответ: 18π

№23

Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны (*прямоугольный тетраэдр*).

а) Докажите, что площадь боковой грани равна среднему геометрическому площади основания и площади проекции этой грани на плоскость основания.

б) Найдите площадь основания, если площади боковых граней равны 6, 7, 8.

Ответ: $\sqrt{149}$

№24

В правильной треугольной пирамиде площадь боковой грани равна 6, а площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через боковое ребро пирамиды и ее высоту, равна 3.

а) Докажите, что синус угла между боковой гранью пирамиды и плоскостью основания равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

б) Найдите длину стороны основания пирамиды.

Ответ: $2\sqrt[4]{72}$

№25

Дана коробка в форме куба со стороной 8. Шар радиусом 2 касается его основания и двух соседних граней. Второй шар радиусом 3 касается двух других граней и первого шара.
Найдите высоту, на которой находится центр второго шара над плоскостью основания.

Ответ: $2+\sqrt{7}$

№26

В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы ABC и SAB прямые, двугранный угол между плоскостями ABS и ABC равен $arctg\,\frac{2\sqrt{10}}{3}$. Найдите длину высоты пирамиды, опущенной из вершины B на плоскость ASC, если $BC=7$, $AB=4$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

№27

Через середину высоты правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру SC. Угол между боковыми ребрами, лежащими в одной грани равен $\frac{\pi}{3}$.

а) Докажите, что плоскость сечения делит ребро SD на два равных отрезка,

б) найдите площадь этого сечения, если длина бокового ребра равна 4.

Ответ: $5\sqrt{2}$

№28

Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Все ребра пирамиды равны. Точка M – середина ребра BC.

а) Докажите, что ортогональная проекция середины ребра AB на плоскость CSD делит медиану SN этой грани в отношении $1:2$, считая от вершины S.

б) Найдите угол между прямой SM и плоскостью CSD.

Ответ: $arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$

№29

Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник, длина стороны которого равна $\sqrt{3}$. Основанием высоты, опущенной из вершины S, является точка O, лежащая внутри треугольника ABC. Расстояние от точки O до стороны AC равно 1. Синус угла OBA относится к синусу угла OBC как $2:1$. Площадь грани SAB равна $\sqrt{\frac{5}{6}}$.

а) Докажите, что площадь грани SAB относится к площади ее проекции на основание как $\sqrt{10}:1$.
б) Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

№30

Основание $ABCD$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – квадрат. Боковые грани – ромбы, а ортогональная проекция вершины C_1 на плоскость основания совпадает с точкой пересечения диагоналей основания $ABCD$.
а) Докажите, что $AA_1 \perp AC_1$.
б) Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC, если $AB = \sqrt{6}$.

Ответ: 2

№31

Точка K лежит на стороне AB основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ все ребра которой равны. Плоскость α проходит через точку K параллельно плоскости ASD. Сечение пирамиды плоскостью α - четырехугольник, в который можно вписать окружность
а) Докажите, что $BK = 2AK$.
б) Найдите расстояние от вершины S до плоскости α, если все ребра пирамиды равны 1.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{9}$

№32

Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания $\sqrt{2}$ и боковым ребром 2. Точки M и N – середины боковых ребер A_1B_1 и CC_1 соответственно.
а) Докажите, что $MN \perp BC_1$.
б) Найдите расстояние от точки M до плоскости BC_1D.

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{5}}$

№33

Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с меньшим катетом равным 6 и гипотенузой равной 10. Высота пирамиды равна 3.Проекция вершины пирамиды на плоскость основания равноудалена от меньшего катета и продолжений двух других сторон основания.
а) Докажите, что боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом.
б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ: 60

№34

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона AB основания $ABCDEF$ равна $\frac{8}{\sqrt{3}}$, а боковая грань образует с плоскостью основания угол

$60°$. Плоскость α проходит через прямую CF и перпендикулярна плоскости боковой грани DSE.
а) Докажите, что плоскость α делит боковое ребро SD в отношении $3:1$, считая от точки S.
б) Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка S, а основанием – сечение пирамиды $SABCDEF$ плоскостью α.

Ответ: 44

№35

Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. На продолжении ребра CD взята точка K такая, что $KD:KC = 3:4$. На ребре SC взята точка L такая, что $SL:LC = 2:1$. Через точки K, B и L проведено сечение пирамиды плоскостью α.
а) Докажите, что плоскость α делит ребро SD в отношении $8:3$, считая от точки S.
б) Найдите, в каком отношении плоскость α делит объем пирамиды.

Ответ: $95:169$

№36

Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость α пересекает его основания по хордам длины 12 и 16.
а) Пусть M и N — середины этих хорд, P — точка пересечения прямой MN с осью цилиндра. Докажите, что расстояния от точки P до плоскостей основания цилиндра относятся как $3:4$.
б) Найдите тангенс угла между плоскостью α и плоскостью основания цилиндра.

№37

Основание пирамиды $SABCD$ — равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 2BC$, M — середина бокового ребра SA, а высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания.
а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью BMC — прямоугольник.
б) Найдите расстояние между прямыми AD и CM, если $BC = 6$, высота пирамиды равна 16, а диагонали трапеции $ABCD$ перпендикулярны.

Ответ: 7,2

№38

Основание шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$— правильные шестиугольники. Точки K, L и M – середины ребер EF, CD и BB_1 соответственно.
а) Докажите, что плоскость KLM делит ребро FF_1 в отношении $1:5$, считая от точки F.

б) Найдите расстояние от центра основания $A_1B_1C_1D_1\square_1F_1$ до плоскости KLM, если призма правильная,
$AB = 1$ и $AA_1 = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$

№39

Основание $ABCD$ призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1 -$ трапеция с основаниями $AB = 2CD$.

а) Докажите, что плоскость BA_1D_1 проходит через середину бокового ребра CC_1.

б) Найдите угол между боковым ребром AA_1 и этой плоскостью, если призма прямая, трапеция $ABCD -$ прямоугольная с прямым углом при вершине B, а $BC = CD$ и $AA_1 = \sqrt{6}CD$.

Ответ: $30°$

№40

Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S образует с плоскостью основания угол $45°$. Точка M – середина бокового ребра SD.

а) Докажите, что противоположные боковые грани пирамиды перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и CM, если стороны основания равны $\sqrt{2}$.

Ответ: 1

№41.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 3, боковое ребро SA равно 4. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причем AK: KB = SM: MC = 1: 2. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC.
а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.
Б) Найдите угол между плоскостями α и ABC.

Ответ: $\arccos\frac{3}{4\sqrt{3}}$

№42.

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 12. Точка K лежит на продолжении ребра BC за точку C так, что $CK = 9$. Точка L лежит на ребре AB и $AL = 5$. Точка M лежит на диагонали основания A_1C_1 так, что $A_1M : MC_1 = 1:3$.
а) Докажите, что сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, L, M, делит ребро A_1B_1 в отношении $1:5$, считая от точки A_1.
б) Найдите площадь сечения куба этой плоскостью.

Ответ: 156

№43.

В четырехугольной пирамиде $SKLMN$ с вершиной S боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $30°$. Известно, что $KN = 6$, $MN = 2$, $\angle KNM = 90°$, $\angle KLM = 60°$. Основание высоты пирамиды лежит внутри четырехугольника $KLMN$.

а) Докажите, что основание высоты пирамиды является центром окружности, вписанной в четырехугольник $KLMN$.

б) Найдите высоту пирамиды.

Ответ: $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+2}$

№44.

Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1)$. На ребре CC_1 выбрана точка D. Сечение, проходящее через точки A, B_1 и D делит призму на два многогранника $ABCDB_1$ и $B_1AA_1C_1D$, отношение объемов которых равно $13:17$.

а) Докажите, что объем пирамиды B_1DBA равен $\frac{1}{3}$ объема исходной призмы.

б) Найдите в каком отношении, считая от точки C_1, точка D делит ребро CC_1.

Ответ: $C_1D:DC = 7:3$

№45.

Основание четырехугольной пирамиды $SABCD$ – параллелограмм $ABCD$ с центром O. Точка M – середина ребра SC, K – середина ребра SA.

а) Докажите, что плоскость BMK делит ребро SD в отношении $1:2$, считая от вершины S.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BMK и угол между плоскостями BMK и ABC, если пирамида правильная, $AB = 10$, $SC = 8$.

Ответ: $\frac{10}{3} \cdot \sqrt{107}; arctg\left(\frac{\sqrt{7}}{10}\right)$

№46.

Основание четырехугольной пирамиды $SABCD$ – параллелограмм $ABCD$. Боковые ребра SA и SD равны. Точка M лежит на боковом ребре SC и не совпадает с его концами. Плоскость α проходит через точку M параллельно прямым BC и SA.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α - равнобедренная трапеция.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если боковая сторона трапеции равна меньшему основанию, а все ребра пирамиды равны 1.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6}$

№47.

Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ – равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $AC = BC$. Вершины M и N

правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой CA_1 , а вершины P и Q – на прямой AB_1.
а) Докажите, что $AA_1 = AC$.
б) Найдите расстояние между серединами отрезков $M\square$ и PQ, если $AC = 4$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

№48.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ угол между боковым ребром SC и плоскостью основания равен углу между этим боковым ребром и плоскостью грани ASD.
а) Найдите проекцию точки C на плоскость грани ASD.
б) Найдите этот угол.

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}$

№49.

Точка P лежит на ребре AD правильного тетраэдра $ABCD$, причем $AP:PD = 1:2$. Плоскость, проходящая через точку P перпендикулярно ребру CD, пересекает это ребро в точке M, а ребро BD – в точке Q.
а) Докажите, что плоскость PMQ делит высоту пирамиды пополам.
б) Найдите объем треугольной пирамиды $QABC$, если объем пирамиды $DPMQ$ равен V.

Ответ: $\frac{9}{4}V$

№50.

Основание наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равносторонний треугольник ABC. Боковые грани AA_1B_1B и AA_1C_1C – равные ромбы с острым углом при общей вершине A.
а) Докажите, что боковая грань BB_1C_1C –квадрат.
б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости BB_1C_1, если $\angle CAA_1 = 60°$, а сторона основания призмы равна $\sqrt{2}$.

Ответ: 1