Подготовка к ЕГЭ. Задание 16
Ege-ok.ru

Презентации

№1

Точка E – середина гипотенузы ML прямоугольного треугольника KLM с углом $30°$ при вершине M. Окружность, вписанная в треугольник KME касается катета MK в точке A, а окружность, вписанная в треугольник KLE, касается катета KL в точке B.

а) Докажите, что $KE = AB$

б) В каком отношении точка касания большей из окружностей делит гипотенузу?

Ответ: как $1:3$, считая от точки L.

№2

В трапеции $ABCD$ основания BC и AD относятся как $1:2$. Пусть K –середина диагонали AC. Прямая DK пересекает сторону AB в точке L.

а) Докажите, что $AL = 2BL$

б) Найдите площадь четырехугольника $BCKL$, если площадь трапеции $ABCD$ равна 9.

Ответ: 2

№3

Дан четырехугольник $ABCD$.

а) Докажите, что отрезки LN и KM, соединяющие середины противоположных сторон, делят друг друга пополам.

б) Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $KL = 6$, $KM = 4\sqrt{3}$, $\angle MKL = 30°$.

Ответ: $24\sqrt{3}$

№4

Дан параллелограмм $ABCD$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BDC, касаются диагонали BD в точках M и N соответственно. Окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются диагонали AC в точках K и L соответственно.

а) Докажите, что $MNKL$ – прямоугольник.

б) Найдите площадь этого прямоугольника, если известно, что $BC - AB = 4$, а угол между диагоналями параллелограмма $ABCD$ равен $30°$.

Ответ: 4

№5

Дана трапеция, в которую можно вписать окружность и около которой можно описать окружность.

а) Докажите, проекция диагонали этой трапеции на большее основание равна боковой стороне.
б) Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей, если основания трапеции равны 3 и 27.

Ответ: 10

№6

Дан треугольник ABC со сторонами $AC = 6$, $AB = 10$, $BC = 14$.
а) Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности, параллельна стороне AB.
б) Найдите расстояние от вершины C до этой прямой.

Ответ: $2\sqrt{3}$

№7

Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, пересекает основание BC в точке K.
а) Докажите, что $BK = 3CK$.
б) Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке N. Найдите AB, если $BK = 18$ и $BN = 17$.

Ответ: 18

№8

Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC касается основания AC в точке D и боковой стороны AB в точке E. Точка F - середина стороны AB, а точка G - точка пересечения окружности и отрезка FD, отличная от D. Касательная к окружности, проходящая через точку G, пересекает сторону AB в точке H.
а) Докажите, что $\angle AFD = \angle B$.
б) Найдите угол BCA, если известно, что $FH : HE = 2 : 3$

Ответ: $arccos\frac{3}{4}$

№9

В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к AB, пересекает сторону CD в точке M. Известно, что $AD = 8$, $AB = 4$, угол CDB равен α градусов.
а) Докажите, что EM — медиана треугольника CED.
б) Найдите длину EM.

Ответ: $\frac{2\cdot\sqrt{4-cos^2\alpha}}{cos\,\alpha}$

№10

В окружность радиуса 7 вписан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Длины сторон AB и BC равны. Площадь треугольника ABD относится к площади треугольника BCD как 2:1. Величина угла ADC равна $120°$. Найдите длины всех сторон четырехугольника $ABCD$.

Ответ: $CD = \sqrt{21}; AD = 2\sqrt{21}; AC = BC = 7\sqrt{3}$

№11

Угол при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{\pi}{6}$. Построен круг радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$ с центром в вершине треугольника. Определите отношение площади общей части треугольника и круга к площади треугольника, если длина медианы, проведенной к боковой стороне равна $\sqrt{7}$.

Ответ: $\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}$

№12

Медианы BK и CL в треугольнике ABC пересекаются в точке M. Известно, что $BC = 5$ см, $BK + CL = 9$ см и косинус угла $BMC = -\frac{5}{16}$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: $\frac{3\sqrt{231}}{4}$

№13

В треугольнике KLM биссектрисы углов при вершинах K и M пересекаются в точке N. Через точки K, N и M проведена окружность с центром в точке O. Площадь треугольника KMO равна $27\sqrt{3}$, угол $KLM = 120°$

а) Докажите, что треугольник KMO равносторонний.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM.

Ответ: 6

№14

На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D, что окружность проходящая через точки A, C и D, касается прямой BC.

а) Доказать, что треугольники ABC и DBC подобны.

б) Найти AD, если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

Ответ: 10

№15

В треугольнике ABC проведена средняя линия MN, соединяющая стороны AB и BC. Окружность, проведенная через точки M, N и C касается стороны AB, а ее радиус равен $\sqrt{2}$. Длина стороны AC равна 2. Найти синус угла ACB.

Ответ: $\frac{1}{2}$

№16

В треугольнике KLM проведены биссектрисы KN и LP, пересекающиеся в точке Q. Отрезок PN имеет длину 1, а вершина M лежит на окружности, проходящей через точки N, P и Q.

а) Докажите, что треугольник PNQ равнобедренный.

б) Найдите стороны и углы треугольника PNQ.

Ответ: $QN = QP = \frac{\sqrt{3}}{3}; \angle NMQ = \angle QMP = 30°; \angle NQP = 120°$

№17

Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Окружность с центром O, построенная на большей стороне CD как на диаметре, касается боковой стороны AB в точке P и второй раз пересекает основание AD в точке H.

а) Докажите, что $\angle CDP = \angle HCP$.

б) Найдите отношение $AH:DH$, если $\angle ADC = 60°$.

Ответ: $1:2$

№18

Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC соответственно в точках D и E. Точки A, D, E и C лежат на одной окружности.

а) Докажите, что $AC \cdot BE = AB \cdot DE$

б) Найдите длину высоты треугольника ABC, опущенной из точки A, если длины сторон AB и AC соответственно равны 6 и 4.

Ответ: $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

№19

Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 3$; $AD = 5$. На сторонах AB и CD взяты точки M и N соответственно так, что $MN \parallel AD$ и в трапеции $MBCN$ и $AMND$ можно вписать окружности.

а) Докажите, что трапеции $MBCN$ и $AMND$ подобны.

б) Найдите радиусы окружностей, вписанных в трапеции $MBCN$ и $AMND$.

Ответ: $\frac{3\cdot\sqrt{15}}{\sqrt{15}+3}$; $\frac{15}{\sqrt{15}+3}$.

№20

Первая окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник KLM, касается боковой стороны KL в точке B, а основания ML - в точке A. Вторая окружность с центром O_1 касается основания ML и продолжений боковых сторон.

а) Докажите, что треугольник OLO_1 прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если радиус первой равен 6 и $AK = 16$.

Ответ: 24

№21

Окружность, вписанная в треугольник ABC касается сторон AB и BC соответственно в точках K и L. MN –отрезок касательной к окружности, параллельной стороне AC и заключенный внутри треугольника ABC.

а) Докажите, что отрезок BL равен полупериметру треугольника MBN.

б) Найдите периметр треугольника $A\square C$, если $AC = 5$, $MN = 2$.

Ответ: $\frac{50}{3}$

№22

Вневписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на основание.

б) Известно, что радиус этой окружности в пять раз больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

Ответ: $3:1$

№23

Точки D и E — середины сторон соответственно AC и BC треугольника ABC. На отрезке DE как на диаметре построена окружность, пересекающая продолжения сторон AC и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что биссектрисы углов MEN и NDM пересекаются на этой окружности.

б) Найдите MN, если известно, что $AB = 14,\ BC = 10,\ AC = 6$.

Ответ: 3,5

№24

В прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC, $\angle C = 90°$, проведены медиана BN и биссектриса AM, которые пересекаются в точке K. Известно, что $KM = 2$.

а) Докажите, что $\frac{CM^2}{MB^2} = \frac{1}{2}$.

б) Найдите AM.

Ответ: $4 + \sqrt{2}$

№25

Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, $AB = AD$, CA – биссектриса угла C, $\angle BAD = 140°, \angle BEA = 110°$.

а) Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

б) Найдите угол CDB.

Ответ: $50°$

№26

Трапеция $ABCD$ вписана в окружность w $(AD \parallel BC)$. Окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD, касаются оснований трапеции BC и AD в точках P и Q соответственно. Точки X и Y – середины дуг BC и AD соответственно.

а) Докажите, что расстояние между точками X и B равно расстоянию от точки X до центра окружности, вписанной в треугольник ABC.
б) Найдите угол между прямыми XP и YQ.

Ответ: $90°$

№27

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Известно, что $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90°$ и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника ABD и точкой пересечения биссектрис треугольника ADC равно $\sqrt{2}$.
а) Докажите, что угол между биссектрисами углов ABD и ACD равен $60°$,
б) найдите длину стороны BC.

Ответ: $\sqrt{3}$

№28

В прямоугольном треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на катетах BC и AC так, что
$CD = CE = 1$. Точка O является точкой пересечения отрезков AD и BE.
Площадь треугольника BOD больше площади треугольника AOE на $\frac{1}{2}$.
Кроме того, известно, что $AD = \sqrt{10}$.
Найдите длину гипотенузы AB.

Ответ: 5

№29

Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC, CD и AD. Известно, что $AB = 30$, $BC = 24$, $CD = 50$, $AD = 74$.
а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.
б) Найдите O_1O_2.

Ответ: 9

№30

В треугольнике ABC точка $O -$ центр описанной окружности, точка R лежит на отрезке BC и
$BR = RC$. Описанная около треугольника BRO окружность пересекает AB в точке T.
а) Докажите, что $\angle BTR = \angle BOR$.
б) Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle BOR = 30°$, $RT = 8$, $BT = 6$.

Ответ: 48

№31

Через точку C проведены две прямые, касающиеся окружности в точках A и B. На большей из дуг AB взята точка D.
а) Докажите, что расстояние от точки D до хорды AB равно среднему геометрическому расстояний от точки D до касательных AC и BC.
б) Найдите расстояние от точки D до хорды AB, если известно, что $\sin\widehat{ACD} \cdot \sin\widehat{BCD} = \frac{1}{3}$ и $CD = 2$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

№32

В треугольник ABC со сторонами $BC = 6$, $AC = 10$ и $AB = 12$ вписана окружность. Касательная к окружности пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Точка K – точка касания окружности со стороной AB.

а) Докажите, что длина отрезка AK равна разности полупериметра треугольника ABC и стороны BC.

б) Найдите периметр треугольника AMN.

Ответ: 16

№33

В окружность радиуса $6\sqrt{2}$ с центром в точке O вписан треугольник MNL. Точка A лежит на стороне NL так, что $AN = NL$. Окружность, проходящая через точки A, N и O, пересекает сторону MN в точке B.

а) Докажите, что ON – диаметр окружности, проходящей через точки A, N и O.

б) Найдите сторону ML, если $NB = 3\sqrt{2}$, а $\angle ONL = 45°$.

Ответ: $6\sqrt{3} + 6$

№34

В треугольнике ABC угол B равен $\frac{\pi}{4}$, а угол C равен $\frac{\pi}{3}$. На медианах BB_1 и CC_1 как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Хорда PQ пересекает сторону BC в точке D.

а) Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой.

б) Найдите отношение $BD : DC$.

Ответ: $\sqrt{3} : 1$

№35

В треугольнике ABC угол C – тупой. Биссектриса BE угла B делит сторону AC на отрезки $AE = 3$, $EC = 2$.

Известно, что точка K, лежащая на продолжении стороны BC за точку C, является центром окружности, проходящей через точки C, E, и точку пересечения биссектрисы угла B с биссектрисой угла ACK.

а) Докажите, что треугольник BKE равен треугольнику BAE.

б) Найдите расстояние от точки E до стороны AB.

Ответ: $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

№36

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Точки M и N лежат на сторонах AB и CD соответственно, причём отрезок MN параллелен основаниям трапеции. Диагональ AC пересекает этот отрезок в точке O. Известно, что площади треугольников AMO и CNO равны.

а) Докажите, что $CM \parallel AN$.

б) Найдите MN, если $AD = a$ и $BC = b$.

Ответ: $\sqrt{ab}$

№37

Точка Q расположена на стороне MN треугольника LMN так, что $NQ : QM = 1 : 2$. При повороте этого треугольника на некоторый угол вокруг точки Q вершина L переходит в вершину N, а вершина M – в точку P, лежащую на продолжении стороны LM за точку L.

а) Докажите, что треугольник QLM – прямоугольный.

б) Найдите углы треугольника LMN.

Ответ: $120°; 30°; 30°$.

№38

Биссектрисы внутренних углов треугольника продолжены до пересечения с описанной около треугольника окружностью. В результате попарного соединения этих точек получился новый треугольник. Известно, что углы исходного треугольника равны $30°$, $60°$, $90°$, а его площадь равна 2.

а) Найдите углы нового треугольника.

б) Найдите площадь нового треугольника.

Ответ: $1 + \sqrt{3}$

№39

В окружности с центром в точке O радиуса 4 проведена хорда AB и диаметр AK, образующий с хордой угол $\frac{\pi}{8}$. В точке В проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке □.

а) Докажите, что треугольник BOC – равнобедренный.

б) Найдите длину медианы AM треугольника ABC.

Ответ: $2\sqrt{6\sqrt{2} + 9}$

№40

Окружности w_1 и w_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается w_1 и w_2 соответственно в точках B_1 и B_2. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A, пересекает отрезок B_1B_2 в точке C. Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1, O_1O_2, O_2B_2 в точках D_1, L, D_2 соответственно. Известно, что $CD_1 = CO_1$.

а) Докажите, что $\angle CLO_2 = 3\angle CD_2O_2$.

б) Найдите отношение $LD_2 : O_2D_2$.

Ответ: $LD_2 : O_2D_2 = 1 : 1$

№41

Две окружности с центрами A и B и радиусами соответственно 2 и 1 касаются друг друга. Точка C лежит на прямой, касающейся каждой из

окружностей соответственно в точках A_1 и B_1 и находится на расстоянии $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ от середины отрезка AB.

а) Докажите, что условию задачи удовлетворяют две точки, и расстояние между ними равно $\frac{3}{4}A_1B_1$.

б) Найдите площадь S треугольника ABC, если известно, что $S > 2$.

Ответ: $\frac{15\sqrt{2}}{8}$

№42

Биссектрисы внутренних углов треугольника продолжены до точек пересечения с описанной около треугольника окружностью, отличных от вершин исходного треугольника. В результате попарного соединения этих точек получился новый треугольника. Известно, что углы исходного треугольника равны 30, 60 и 90 градусам, а его площадь равна 2.

а) Докажите, что углы нового треугольника равны 45, 60 и 75 градусов.

б) Найдите площадь нового треугольника.

Ответ: $\sqrt{3}+1$

№43

Вокруг трапеции с основаниями $\sqrt{8}$ и $\sqrt{28}$ описана окружность радиуса 3 с центром, находящимся внутри трапеции. Каждый из четырех отсекаемых сторонами трапеции сегментов отражен внутрь трапеции симметрично относительно отсекающей его стороны.

а) Докажите, что образ нижнего отсекаемого сегмента имеет общую область с образами боковых отсекаемых сегментов, а образ верхнего – не имеет.

б) Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек трапеции, которые не принадлежат ни одному из отраженных внутрь нее сегментов.

Ответ: $4\sqrt{14}$-36 $arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}+8$

№44

Прямая пересекает окружность радиуса R с центром в точке O в точках A и B таких, что градусная мера дуги AB равна $45°$, а прямую, перпендикулярную диаметру AM окружности и проходящую через ее центр, в точке D. Прямая, проходящая через точку B перпендикулярно диаметру AM, пересекает его в точке C.

а) Докажите, что $\frac{AC}{AO}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

б) Найдите площадь трапеции $OCBD$.

Ответ: $R^2\left(\frac{3+\sqrt{2}}{4}\right)$

№45

В остроугольном треугольнике ABC угол A равен $60°$. Высоты BN и CM пересекаются в точке H. Точка O- центр окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO, если $BC = 6\sqrt{3}$, $\angle ABC = 45°$.

Ответ: 9

№46

В параллелограмме $ABCD$ прямые l_1 и l_2 являются биссектрисами углов A и C соответственно, а прямые m_1 и m_2- биссектрисами углов B и D соответственно. Расстояние между l_1 и l_2 в $\sqrt{3}$ раз меньше расстояния между m_1 и m_2.

а) Найдите угол BAD.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABD, если $AC = \sqrt{\frac{22}{3}}$, $BD = 2$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{6}$

№47

В остроугольном треугольнике ABC высота CC_1 и биссектриса AA_1 пересекаются в точке P. Окружность, проведенная через точки A, C и P, касается прямой AB. Продолжение отрезка BP пересекает эту окружность в точке D. Известно, что $PC = CD$.

а) Докажите, что центр окружности лежит на хорде AD.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $CC_1 = 12\sqrt{3}$.

Ответ: $96\sqrt{3}$

№48

Четырехугольник, один из углов которого равен $2\operatorname{arctg} 2$, вписан в окружность радиуса $2\sqrt{3}$ и описан около окружности радиуса 1.

а) Найдите площадь четырехугольника.

б) Найдите угол между его диагоналями.

Ответ: $S = 7{,}3; \beta = \arcsin\frac{73}{80}$

№49

Через вершину C треугольника ABC и центр I вписанной окружности проведена прямая, пересекающая описанную окружность в точке E. Известно, что отрезок IE равен $6\sqrt{7}$, а радиус описанной окружности равен $7\sqrt{3}$.

а) Докажите, что $IE = EB$.

б) Найдите сторону AB.

Ответ: 24

№50

Угол BAC треугольника ABC равен α. Сторона BC является хордой окружности с центром O и радиусом R, проходящей через центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

а) Докажите, что около четырехугольника $ABOC$ можно описать окружность.
б) Известно, что в четырехугольник $ABOC$ можно вписать окружность. Найдите радиус r этой окружности, если
$R = 6,\ \alpha = 60°$

Ответ: $9\text{-}3\sqrt{3}$