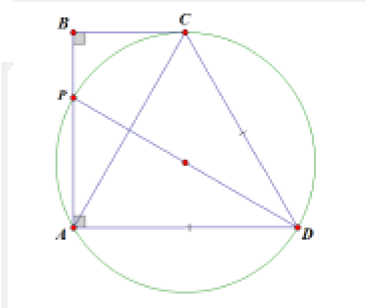
Задание 16 из Тренировочной работы МИОО 27.04.2016

Задание 16. Окружность, проходящая через вершины A, C и D прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, пересекает меньшую боковую сторону AB в точке P и касается прямой BC. Известно, что $AD = CD$.

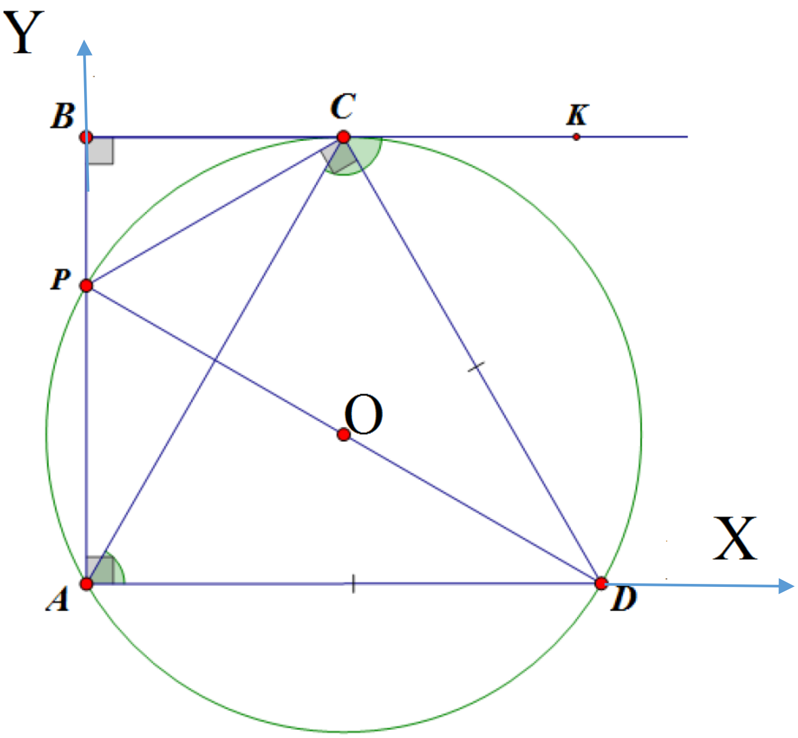
а) Докажите, что CP - биссектриса угла ACB.

б) В каком отношении прямая DP делит площадь трапеции?



Остановлюсь на решении пункта б)

Введем систему координат.



Пусть сторона треугольника имеет длину а.

Т.е. $|AD| = |CD| = |AC| = a$

Запишем координаты точек:

$$A(0;0)\ D(a;0)\ C\left(\frac{1}{2}a;\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\ B\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\ O\left(\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$$

Пусть точка Р имеет координаты $P(0;y)$. Найдем ее координаты.

Указанная точка лежит на пересечении прямых DO и AB.

Запишем уравнение прямой DO.

Координаты направляющего вектора прямой DO имеют вид: $\vec{DO}\left(-\frac{1}{2}a;\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$

Поэтому уравнение прямой DO имеет вид:

$$\frac{x-a}{-\frac{1}{2}a}=\frac{y}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}$$

Точка P лежит на прямой DO. Поэтому полагая координату X равную нулю найдем координату Y точки P.

$\frac{-a}{-\frac{1}{2}a}=\frac{y}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}$. Отсюда $y=\frac{a}{\sqrt{3}}$

Таким образом точка P имеет координаты $P\left(0;\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$.

Площадь треугольника $PAD=\frac{a^2}{2\cdot\sqrt{3}}$

Площадь трапеции $ABCD=\frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot a^2}{8}$

Площадь четырехугольника $PBCD=\frac{5\cdot\sqrt{3}\cdot a^2}{24}$

Поэтому искомое отношение равно $\frac{\frac{a^2}{2\cdot\sqrt{3}}}{\frac{5\cdot\sqrt{3}\cdot a^2}{24}}=\frac{4}{5}$

С уважением Сергей Симутин.