

Ответы к Тренировочному варианту №4

1. 2
2. 34,3
3. 18
4. 0,9951
5. -8
6. 3
7. 2,5
8. 418
9. -33
10. 800
11. 16
12. 2
13. а) $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi\tau}{2}; \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{12}$
14. $\frac{3}{\sqrt{5}}$
15. $(-8; -7) \cup (-2; -1) \cup (4; 5) \cup (5; 6)$
16. 4
17. 125 000
18. $[1; 3] \cup \{4\}$
- 19.

Решение:

а) Нет. Пусть n – количество последовательных членов геометрической прогрессии, произведение которых делит 1008 без остатка. Так как $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$, то члены геометрической прогрессии состоят только из простых множителей 2, 3 и 7.

Пусть первый член такой прогрессии равен $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$, а ее знаменатель равен $2^d \cdot 3^e \cdot 7^f$, где

a, b, c, d, e, f – целые неотрицательные числа. При этом хотя бы одно из чисел d, e, f больше нуля.

Тогда произведение чисел равно

$$2^{na+d+2d+\dots+(n-1)d} \cdot 3^{nb+e+2e+\dots+(n-1)e} \cdot 7^{nc+f+2f+\dots+(n-1)f} =$$

$$2^{na+\frac{(n-1)n}{2}d} \cdot 3^{nb+\frac{(n-1)n}{2}e} \cdot 7^{nc+\frac{(n-1)n}{2}f}$$

Полученное число является делителем числа $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$. Следовательно, имеем

$$na + \frac{(n-1)nd}{2} \leq 4, \quad nb + \frac{(n-1)ne}{2} \leq 2 \quad \text{и} \quad nc + \frac{(n-1)nf}{2} \leq 1.$$

Пусть $n \geq 4$, тогда $na + \frac{(n-1)nd}{2} \geq 4a + 6d$.

Аналогично $nb + \frac{(n-1)ne}{2} \geq 4b + 6e$ и $nc + \frac{(n-1)nf}{2} \geq 4c + 6f$.

Неравенства $4a + 6d \leq 4$, $4b + 6e \leq 2$ и $4c + 6f \leq 1$ имеют целые неотрицательные решения только при $d = e = f = 0$, что невозможно. Следовательно, $n \leq 3$. Значит, ни пять, ни четыре числа не могут образовывать геометрическую прогрессию и иметь при этом произведение, которое делит число 1008. Поэтому ответ на вопросы а) и б) – нет.

б) Нет.

в) Пусть $n = 3$. Приведем пример пяти чисел, удовлетворяющих условию задачи при $n = 3$.

Положим, что $a = b = c = e = f = 0$, $d = 1$. Получаем три члена геометрической прогрессии - 1, 2, 4. Их произведение равно 8. Заметим, что $\frac{1008}{8} = 126$.

Пусть $126 = 6 \cdot 21$, тогда в качестве четвертого и пятого чисел произведения можно взять числа, 6 и 21, а полученное произведение $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 21 = 1008$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.