Ответы к тренировочной работе №5

1. 1500
2. 0,2
3. 2,5
4. 0,7
5. 5
6. 60
7. 2
8. 1543,5
9. -6
10. 0,75
11. 20
12. 1
13. $\left\{\frac{\pi}{6}+\pi n, n \in z\right\}; \{\frac{1}{2}\}$
14. $5\sqrt{3}$
15. $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup [\sqrt[3]{3}; 3]$
16. 10
17. 810000
18. $[-2; 1) \cup (1; 4]$
19.

Решение:
а) При $n = 10$, $S = a^{10} + 1$ всегда делится без остатка на 10, когда число a^{10} оканчивается на 9. Это справедливо для всех двузначных натуральных чисел *a,* четная степень которых оканчивается на 9. Тогда имеем две числовые последовательности из возможных значений *a:*
13; 23; 33; 43; 53; 63; 73; 83; 93 и 17; 27; 37; 47; 57; 67; 77; 87; 97. Это возрастающие (d = 10) арифметические прогрессии. Отсюда искомая сумма равна А$=\frac{(13+93)}{2}\cdot 9+\frac{(17+97)}{2}\cdot 9=$ 477+513= 990.
б) Заметим, что число 2015 + 1 = 2016 = 7·288 делится без остатка на 7. Из теоремы Безу $an + 1n$ делится на $a + 1$ при любом нечетном значении степени *n*. Поэтому, при $a = 2015n$+1 будет делиться без остатка на 7 при нечетном значении степени *n*. При $n = 2k +1$, по формуле суммы нечетных степеней в общем виде имеем: $S = 2015^{2k+1} + 1 = (2015 + 1)\cdot(2015^{2k} - 2015^{2k-1}\cdot 1 + 2015^{2k-2}\cdot 1^2 -...- 2015\cdot 1^{2k-1} + 1^{2k})$ или $S = 7\cdot 288\cdot (2015^{2k} - 2015^{2k-1} + 2015^{2k-2} - ...- 2015 + 1^{2k})$.
$2015n$+1 делится без остатка на 7 равна Б = $(101+999)\ 2\cdot 450 = 550\cdot 450 = 247500$.
Покажем, что для всех четных $n = 2k$, где $k \geq 1$, сумма $2015^{2k} + 1$ не делится без остатка на 7.
Пусть $2015^{2k} + 1 = (4060225^k - 1) + 2$. Тогда первое слагаемое $4060225^k - 1$ согласно следствия из теоремы Безу, делится на разность оснований степеней при любом $k \geq 1$, т.е. оно делится на 4060225 – 1 = 4060224, а т.к. 4060224 = 7·580032, то оно делится и на 7. Второе слагаемое не делится на 7, и следовательно, для $\forall\ k \geq 1$ сумма $2015^{2k} + 1$ не делится без остатка на 7.

$1n$ делится на $a + 1$. При $n = 2015$, в общем виде имеем: $a^{2015} + 1 = (a + 1)\cdot(a^{2014} - a^{2013}\cdot 1$

$+\, a^{2012} \cdot 1^2 - ... - a \cdot 1^{2013} + 1^{2014}$). Поэтому сумма $S = a^{2015} + 1$ будет делиться без остатка на 11 для всех натуральных чисел $a = 11 \cdot k - 1$ из диапазона $a \le 100$, где k=1,…,9. Это возрастающая арифметическая прогрессия из 9 чисел: 10; 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98.

Тогда сумма всех $a \le 100$ таких, что $S = a^{2015} + 1$ делится без остатка на 11 равна

$$B = \frac{(10+98)}{2} \cdot 9 = 486.$$

Ответ: а) 990; **б)** 247500; **в)** 486.