Ответы к тренировочному варианту №8

1. 11
2. 37,5
3. 8
4. 0,1
5. 0,8
6. 576
7. 3
8. 58,5
9. -0,96
10. 50
11. 595
12. 0,0625
13. а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$; б) $-\frac{13\pi}{3}$
14. 216
15. $\left[\frac{-3-\sqrt{5}}{2};-\frac{5}{2}\right)\cup\left(-\frac{5}{2};\frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left(-1;\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right]$
16. $\arccos\frac{3}{4}$
17. 5
18. Наименьшее значение равно $\frac{1}{5}$ достигается при $a=\pm\frac{2}{5}; b=\frac{4}{5}$.
19. а) да; б) нет; в) 110.

Решение. а) Сумма цифр числа 2014 однозначна и равна 7. Из теоремы об остатках при делении на 9 следует, что остаток от деления числа на 9 равен сумме его цифр, так 2014 = 9·223 + 7.

Пусть x и y – различные натуральные числа. Обозначим через $s(x)$ сумму цифр числа x, а через $s(y)$ сумму цифр числа y. Пусть для чисел x и y ($x\pm y$) справедливы равенства:

$$x + y = 2014,\quad s(x) = s(y),\quad \text{где}\quad x,y,s(x),s(y)\in N. \qquad (1)$$

Числа x и y с одинаковой суммой цифр дают одинаковые остатки при делении на 9, причем, $s(x)$ и $s(y) < 9$. С учетом равенств (1), для $s(x)$ и $s(y)$ будет справедливо:

$a = s(x)+ s(y)=2\cdot s(x) \Rightarrow$ а – четное число, а сумма цифр числа a равна $s(a)=7 \Rightarrow a = 9\cdot m + 7$.

Далее решим систему уравнений относительно натуральных m, a и $s(x)$:

$$\begin{cases} a = 9\cdot m + 7 \\ a = 2\cdot s(x) \\ s(x) < 9 \end{cases} :\ m = 1,\ a = 16,\ s(x)=8. \qquad (2)$$

Решение системы (2) подтверждает, что существуют различные натуральные числа, сумма которых равна 2014, с одинаковой однозначной суммой цифр, равной 8. Поэтому, ответ – да. Это верно, например, для следующих различных натуральных чисел:

2014 = 2008 + 8 = 1700 + 314 = 1610 + 404 = 1412 + 602 = 1313 + 701 = 1511 + 503 и т.д.

б) Предположим, что число 199 можно представить в виде суммы двух различных натуральных чисел x и y с одинаковой суммой цифр. Пусть одно из этих чисел состоит из a сотен, b десятков и c единиц. Тогда другое число состоит из $1-a$ сотен, $9-b$ десятков и $9-c$ единиц. Суммы цифр чисел x и y равны по условию, значит будет справедливо равенство: $a + b + c = 1+ 9 + 9 - a - b - c \Rightarrow 2\cdot(a + b + c) = 19$.

Левая часть полученного равенства четная, а справа число 19 – простое нечетное число, поэтому это равенство невозможно. Таким образом, число 199 нельзя представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр, поэтому ответ - нет.

в) Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ - различные натуральные числа с одинаковой суммой цифр $s(a_i)$, а искомое число x является их суммой, т.е. $x = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$. Заметим, что $a_1 \geq s(a_i)$. Согласно следствия теоремы об остатках, числа с одинаковой суммой цифр $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ дают одинаковые остатки при делении на 9, поэтому разность любых двух этих чисел будет не меньше 9. Значит, будет справедливо $x \geq s + (s + 9)+(s + 18)+(s + 27)+(s + 36) = 5\cdot s + 90$, а если $s \geq 4$, то $x \geq 5\cdot 4+90 = 110$. Оценка точна: так при $s=4$ имеем: 4+13+22+31+40 = 110.

Остаётся рассмотреть случаи, когда $s \leq 3$.

- если $s = 1$, то $x \geq 1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 = 11111 > 110$.
- если $s = 2$, то $x \geq 2 + 11 + 20 + 101 + 110 = 244 > 110$.
- если $s = 3$, то $x \geq 3 + 12 + 21 + 30 + 102 = 168 > 110$.

Значит, наименьшее возможное натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр, равно 110.

Ответ: а) да; **б)** нет; **в)** 110.

2.**а**) Найдите трехзначное число, сумма цифр которого равна 20, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9. В ответе укажите, сколько всего существует таких чисел.

б) Найдите остаток от деления числа $2009\cdot 2011\cdot 2013\cdot 2015 + 2018^2$ на 7.

в) Существует ли десятизначное число, делящееся на 11, в записи которого каждая цифра встречается по одному разу?

Решение.

а) Чтобы не прибегать к объемным вычислениям и наименее прибегать к полному перебору, далее используем элементы алгебры остатков. Сумма остатков равна остатку суммы. Чтобы сумма квадратов трёх чисел делилась на 3, необходимо, чтобы выполнялся один из двух случаев: либо все три числа при делении на 3 имеют остаток 0, либо все три числа при делении на 3 имеют нечётные остатки.

Разложим число 20 на слагаемые различными способами. Так, есть 4 способа парных слагаемых для числа 20: $20 = 2\cdot 9 + 2 = 2\cdot 8 + 4 = 2\cdot 7 + 6 = 2\cdot 6 + 8$.

Рассмотрим остаток суммы квадратов чисел для этих вариантов $9^2 +9^2+2^2 = 8^2+8^2+4^2 = 7^2+7^2+6^2 = 6^2+6^2+8^2$ при делении на 3: 0 + 0 + 2 = 2; **1 + 1 + 1 = 3**; 1 + 1 + 0 = 2; 0 + 0 + 2 = 2, т.к. $81\equiv 0 \pmod 3$, $64\equiv 1 \pmod 3$, $49\equiv 1 \pmod 3$, $36\equiv 0 \pmod 3$, $16\equiv 1 \pmod 3$, $4\equiv 1 \pmod 3$.

Условию делимости на 3 удовлетворяет только один вариант разложения 20=8+8+4. Проверим этот вариант на условие делимости на 9. Сумма остатка равна 1 + 1 + 7 = 9, т.к. $64\equiv 1 \pmod 9$, $16\equiv 7 \pmod 9$. Значит сумма квадратов этих цифр делится на 9. Поэтому цифры 8,8,4 не подходят по условию.

Рассмотрим 4 способа разложений числа 20 на три слагаемых:

20 = 9 + 8 + 3 = 9 + 7 + 4 = 9 + 6 + 5 = 8 + 7 + 5. Рассмотрим суммы остатков при делении суммы квадратов этих чисел на 3: 0 + 1 + 0=1; 0 + 1 + 1=2; 0 + 0 + 1=1; **1 + 1 + 1=3**, т.к. $9\equiv 0 \pmod 3$, $25\equiv 1 \pmod 3$. Далее проверим последний вариант на условие делимости на 9.

Сумма остатка при делении суммы $8^2 + 7^2 + 5^2$ на 9 равна 1 + 4 – 2 = 3, т.к. $49\equiv 4 \pmod 9$, $25\equiv -2 \pmod 9$. Эта сумма не делится на 9. Значит, условию задачи удовлетворяет любое число, записанное цифрами 5, 7 и 8. Следовательно, существует $3\cdot 2!=6$ различных трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 5, 7, 8 без повторений. Это числа 578, 587, 758, 785, 875, 857. Ответ – 6.

б) Заметим, что число 2009 делится без остатка на 7 ($2009 = 7\cdot 287$), поэтому первое слагаемое делится без остатка на 7.

Второе слагаемое $2018^2 = (2016 +2)^2 = (7\cdot 288)^2 + 4\cdot 7\cdot 288 + 2^2$. Поэтому остаток от деления исходного выражения на 7 равен $2^2 \equiv 4 \pmod 7$. Ответ – 4.

в) Для нахождения требуемого числа воспользуемся основным признаком делимости на 11, согласно которому числа $n=a_1a_2a_3\ldots a_{10}$ (a_i - цифры согласно позиционной записи числа n) и $S(n) = a_1-a_2+a_3-\ldots-a_{10}$ одновременно делятся на 11.

Пусть число A – сумма цифр, входящая в S(n) со знаком «+», а число B – сумма цифр, входящая в S(n) со знаком «–». Тогда число A–B, согласно условию задачи, должно делиться на 11.

Положим, что B – A = 11, кроме того, очевидно, что A + B = 1+2+3+…+9 = 45. Далее решим систему уравнений относительно A и B:

$$\begin{cases} B - A = 11 \\ A + B = 45 \end{cases} : \ A = 17,\ B = 28.$$

Согласно решения системы, подберём группу из пяти различных цифр с суммой, равной 17. Например, 1+2+3+5+6=17. Эти цифры возьмём в качестве цифр числа под нечётными номерами. В качестве цифр числа под чётными номерами возьмём оставшиеся цифры 4, 7, 8, 9, 0 (4+7+8+9=28). Очевидно, что условию задачи удовлетворяет, например, число 1427385960, поэтому ответ – да.