Ответы к тренировочному варианту №9

Часть 1.

1. 25
2. 16
3. 45
4. 0,028
5. 7
6. 4
7. -7
8. 12
9. 1
10. 45
11. 5,6
12. -4

Часть 2.

13.
$a)\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{3}+\pi n,\qquad n\in Z$

б) $-\dfrac{19\pi}{4};-\dfrac{14\pi}{3};-\dfrac{15\pi}{4};-\dfrac{11\pi}{3}$

14. 3
15. $(-\frac{1}{2};0)$
16. $\frac{2\sqrt{4-\cos^2\alpha,}}{\cos\alpha}$
17. 20
18. $(-\infty;-8)\cup(0;\infty)$
19.

Решение.

а) Отметим, что каждое число на доске будет делиться на 8. Действительно, исходное число 8 (и делится на 8). В случае удвоения числа, делящегося на 8 и при сложении чисел, делящихся на 8, всегда получим число, делящееся на 8. Следовательно, все числа, записанные на доске, будут делиться на 8, но 2012 не делится без остатка на 8 (т.к. 12 не делится на 8), поэтому число 2012 не может оказаться на доске. Ответ – нет.

б) Согласно условия, на доске может появиться некая числовая последовательность, в которой первые два числа всегда 8 и 16. С течением времени и по желанию ученика эта последовательность на доске может стать неким произвольным набором чисел, делящихся на 8, а может установить некую закономерность, приводящую последовательность к возрастающей прогрессии - арифметической или геометрической. Рассмотрим аналитические оценки для суммы чисел последовательности при этих случаях:

1) В случае арифметической прогрессии (a_1=8, d=8) определим, при каком целом значении n сумма членов прогрессии S_n будет равна 72. Получим уравнение вида:

$72=\frac{(8+8+(n-1)\cdot 8)}{2}\cdot n.$ После всех преобразований получим уравнение: $n^2-n-16=0.$

Это уравнение не имеет N-решений, поэтому $S_n \pm 72$.

2) В случае геометрической прогрессии (b_1= 8, q = 2) определим, при каком целом значении n сумма членов прогрессии S_n будет равна 72. Получим уравнение вида:

$72=\frac{8\cdot(2^3-1)}{2-1}$. После всех преобразований получим уравнение: $2^{n+3}=80.$

Это уравнение также не имеет N-решений, поэтому $S_n \pm 72$.

3) В случае произвольного набора чисел, определим, при каком целом значении n возможно равенство $72 = 8 + 16 + n{\cdot}m$. Здесь переменная n есть количество чисел m при вычислении суммы. Или переменная n определяет через сколько минут после первой (через $(n + 1)$ – минут) на доске может появиться число m, после чего сумма всех чисел станет равной 72. Значит, всегда $n \le m$.

После преобразований решим уравнение относительно n и m: $n{\cdot}m = 48$, где $n,m \in N$.

Это уравнение имеет четыре пары решений в натуральных числах: (1,48), (2,24), (3,16) и (6,8). Решение (1,48) не подходят по условию, т.к. число 48 не может появиться на доске третьим по счету после числа 16 (или через 2 минуты). Решение (6,8) не подходит по условию, т.к. число 8 может быть записано на доске только один раз.

Остаются два решения (2,24) и (3,16). Таким образом, через 3 минуты, на доске может быть записана следующая последовательность из четырех чисел {8, 16, 24, 24}, сумма которых равна 72. Или через 4 минуты на доске может быть записана последовательность из пяти чисел {8, 16, 16, 16, 16}, сумма которых равна 72. Следовательно, наибольшее время – 4 минуты, поэтому ответ – 4 минуты.

в) Для упрощения дальнейших вычислений разделим все числа на доске и число 832 на 8. Таким образом, необходимо за наименьшее время написать на доске число 104 ($832 = 8{\cdot}104$), начав с 1.

Отметим, что наибольшее число, которое получится на доске через 6 минут, если каждый раз удваивать новое наибольшее число, начиная с 1, будет число $64 = 2^6$. Заметим, что факторизация числа 104 есть $104 = 2^3 \cdot 13$, а в представлении числа в виде рациональных множителей есть вариант $104 = 2^6 \cdot 1{,}625$.

За 7 минут получить число 104 также невозможно, потому что если число 64 и далее удвоить получим 128 (перебор), а если к числу 64 прибавить число, не превосходящее 32, то получим только число 96.

В том случае, если в течение первых 6 минут ученик использовал хотя бы одно сложение вместо удвоения, то при первом использовании сложения наибольшее число, записанное на доске, увеличилось бы не более, чем в 1,5 раза: действительно, в этом случае самый большой результат получится тогда, когда мы к максимальному на данный момент числу прибавим второе по величине, то есть его половину, так $2^6 \cdot 1{,}5 = 64 + 32 = 96 < 104$. Разложение числа 104 на три слагаемых дает такой вариант $104 = 64 + 32 + 8$.

Следовательно, число 104 возможно получить за 8 минут. Приведем пример таких операций: 1, **2**, **4**, **8**, **16**, **32**, **64**, **96**, **104.** Представим его в исходных числах, начиная с 8:
8, **16**, **32**, **64**, **128**, **256**, **512**, **768**, **832**.

Ответ: а) нет; **б)** 4 минуты; **в)** 8 минут.