Ответы к Тренировочному варианту №10

1. 18,8
2. 3,6
3. -2,5
4. 0,05
5. 125
6. 7
7. -1,75
8. 9
9. 3,5
10. 60
11. 64
12. 0
13. а) $-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}, k \in Z.$ б) $\frac{23\pi}{12}$
14. $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$
15. $[-1; 0]$
16. $AB = BC = 7\sqrt{3}; AD = 2\sqrt{21}; DC = \sqrt{21}$
17. 26
18. $b < -1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}; \ -\frac{1}{2} < b < 0$
19.

Решение.

а) Чтобы не прибегать к объемным вычислениям и наименее прибегать к полному перебору, далее используем элементы алгебры остатков. Сумма остатков равна остатку суммы. Чтобы сумма квадратов трёх чисел делилась на 3, необходимо, чтобы выполнялся один из двух случаев: либо все три числа при делении на 3 имеют остаток 0, либо все три числа при делении на 3 имеют нечётные остатки.

Разложим число 20 на слагаемые различными способами. Так, есть 4 способа парных слагаемых для числа 20: 20 = 2·9 + 2 = 2·8 + 4 = 2·7 + 6 = 2·6 + 8.

Рассмотрим остаток суммы квадратов чисел для этих вариантов $9^2+9^2+2^2 = 8^2+8^2+4^2 = 7^2+7^2+6^2 = 6^2+6^2+8^2$ при делении на 3: 0 + 0 + 2 = 2; **1 + 1 + 1 = 3**; 1 + 1 + 0 = 2; 0 + 0 + 2 = 2, т.к. 81≡0(mod3), 64≡1(mod3), 49≡1(mod3), 36≡0(mod3),16≡1(mod3), 4≡1(mod3).

Условию делимости на 3 удовлетворяет только один вариант разложения 20=8+8+4. Проверим этот вариант на условие делимости на 9. Сумма остатка равна 1 + 1 + 7 = 9, т.к. 64≡1(mod9), 16≡7(mod9). Значит сумма квадратов этих цифр делится на 9. Поэтому цифры 8,8,4 не подходят по условию.

Рассмотрим 4 способа разложений числа 20 на три слагаемых:

20 = 9 + 8 + 3 = 9 + 7 + 4 = 9 + 6 + 5 = 8 + 7 + 5. Рассмотрим суммы остатков при делении суммы квадратов этих чисел на 3: 0 + 1 + 0=1; 0 + 1 + 1=2; 0 + 0 + 1=1; **1 + 1 + 1=3**, т.к. 9≡0(mod3), 25≡1(mod3). Далее проверим последний вариант на условие делимости на 9.

Сумма остатка при делении суммы $8^2 + 7^2 + 5^2$ на 9 равна 1 + 4 – 2 = 3, т.к. 49≡4(mod9), 25≡-2(mod9). Эта сумма не делится на 9. Значит, условию задачи удовлетворяет любое число, записанное цифрами 5, 7 и 8. Следовательно, существует 3·2!=6 различных трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 5, 7, 8 без повторений. Это числа 578, 587, 758, 785, 875, 857. Ответ – 6.

б) Заметим, что число 2009 делится без остатка на 7 (2009 = 7·287), поэтому первое слагаемое делится без остатка на 7.

Второе слагаемое $2018^2 = (2016+2)^2 = (7\cdot 288)^2 + 4\cdot 7\cdot 288 + 2^2$. Поэтому остаток от деления исходного выражения на 7 равен $2^2 \equiv 4 \pmod 7$. Ответ – 4.

в) Для нахождения требуемого числа воспользуемся основным признаком делимости на 11, согласно которому числа $n=a_1a_2a_3\ldots a_{10}$ (a_i - цифры согласно позиционной записи числа n) и $S(n) = a_1-a_2+a_3-\ldots-a_{10}$ одновременно делятся на 11.

Пусть число A – сумма цифр, входящая в S(n) со знаком «+», а число B – сумма цифр, входящая в S(n) со знаком «–». Тогда число A–B, согласно условию задачи, должно делиться на 11.

Положим, что B – A = 11, кроме того, очевидно, что A + B = 1+2+3+…+9 = 45. Далее решим систему уравнений относительно A и B:

$$\begin{cases} B - A = 11 \\ A + B = 45 \end{cases} : \ A = 17, B = 28.$$

Согласно решения системы, подберём группу из пяти различных цифр с суммой, равной 17. Например, 1+2+3+5+6=17. Эти цифры возьмём в качестве цифр числа под нечётными номерами. В качестве цифр числа под чётными номерами возьмём оставшиеся цифры 4, 7, 8, 9, 0 (4+7+8+9=28). Очевидно, что условию задачи удовлетворяет, например, число 1427385960, поэтому ответ – да.

Ответ: а) 6; **б)** 4; **в)** да.