Ответы к Тренировочному варианту №13

1. 12,5
2. 120
3. 23
4. 0,26
5. -1
6. 49
7. 11,5
8. 0,488
9. 0,375
10. 2,5
11. 30
12. 3
13. а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$ б) $210°$
14. 5
15. $\left[-\frac{1}{3};0\right)\cup\left(\frac{1}{5};\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$
16. 6
17. 22,5
18. -2
19. а) да; б) 5

Решение.

а) Рассмотрим наводящие соображения при формировании требуемой прогрессии. Необходимо, чтобы в ней: количество чисел, делящихся на 8, было равно 0, все члены прогрессии делились на 10 и лишь только некоторые делились и на 10 и на 9.

Тогда начальный член такой арифметической прогрессии делится на 10, но не делится на 8, пусть $a_1= 10$. Пусть разность такой прогрессии делится и на 8 и на 10 или d = НОК (8; 10), $d = 40$. Значит, ни один член такой прогрессии не делится на 8, но каждый ее член делится на 10. При этом на 9 будет делиться только каждый $\{m + 9\cdot(k-1)\}$-й член прогрессии, где $k\geq1$, а m – номер числа, кратного 9, в первой девятке чисел.

Например, существует конечная арифметическая прогрессия, удовлетворяющая заданным требованиям, с параметрами $a_1= 10$, $d = 40$, $n = 2017$ и m=3:

10,50, 90,130,170,210,250,290,330,370, 410, 450, 490, 530, 570, 610, 650, 690, 730, ..., 80650. Ответ – да, существует.

б) Рассмотрим все такие наборы целых чисел без повторений: {2,90}, {3,60}, {4,45}, {5,36}, {6,30}, {9,20}, {12,15}, {18,10}. Факторизация числа $180 = 2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5$. Из данных наборов составим конечную арифметическую прогрессию {2,3,4,5,6}, состоящую из 5 чисел, с параметрами: $a_1=2$, d=1, n= 5, поэтому ответ - 5.

в) Можно показать, что условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда среди данных чисел ровно одно отрицательное и его модуль больше произведения всех остальных.

Предположим, что среди данных чисел чётное количество отрицательных. Тогда среди них есть положительное число a, и произведение всех чисел, кроме a, положительно. Это противоречит условию. Значит, среди данных чисел нечётное число отрицательных.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$ – две группы, на которые разбиты данные числа ($k + m =$ 2017). Ровно одно из двух произведений $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k$ и $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_m$ (а именно то, в котором нечётное число отрицательных сомножителей) – отрицательно; пусть $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k < 0$, а $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_m > 0$. Среди чисел x_1, x_2, ..., x_k найдётся отрицательное, скажем, $x_1 < 0$. Тогда произведение $x_2 \cdot \ldots \cdot x_k > 0$, а значит, $x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \geq 1$ (так как числа целые). Следовательно, $x_1 \cdot x_2 \ldots \cdot x_k + y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_m \leq x_1 + y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_m \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k < 0$.