Ответы к тренировочному варианту №25

1. 188
2. 1906,4
3. 1,5
4. 0,55
5. 3
6. 95
7. 12
8. 45
9. 6
10. 0,33
11. 38
12. 45
13. $a) \pm \arccos\frac{7}{9} + 2\pi n;\ \pi \pm \arccos\frac{1}{9} + 2\pi n;\ \pi \pm \arccos\frac{5}{9} + 2\pi n, n \in Z$

    $б) -3\pi + \arccos\frac{5}{9}; -3\pi + \arccos\frac{1}{9}; -2\pi - \arccos\frac{7}{9}; -2\pi + \arccos\frac{7}{9}.$
14. $2 + \sqrt{7}$
15. $\left(-4; -\sqrt{\frac{34}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{34}{3}}; 3{,}5\right)$
16. $50°$
17. 384 000
18. $(-\infty; 0] \cup [3; \infty)$
19.

Решение:

Пусть S_1, S_1 – первоначальные средние баллы в первой и второй школе соответственно.

S_1^*, S_2^* - средние баллы в первой и второй школе после перехода ученика и пересчета.

n, k – число учащихся, писавших тест в первой и второй школе соответственно.

1-й вариант решения - используем комбинированный метод «оценка + пример».

а) Да**.** Подберем простой пример для крайнего случая - в первой школе писали тест 2 учащихся. Причем учащийся, который перешел в школу №2, написал тест на 6 баллов, а другой - на 2 балла. Тогда первоначальный средний балл в школе №1 равен $S_1 = \frac{2+6}{2} = 4$.

После перехода учащегося, набравшего 6 баллов, в школу №2, средний балл в школе №1 станет равным $S_1^* = \frac{2}{1} = 2$. Значит средний балл в школе №1 уменьшился в 2 раза.

б) Нет. Пусть $S_2 = 1$. Это означает, что любой из учащихся школы №2 написал тест на 1 балл. Пусть перешедший учащийся набрал b баллов (b – натуральное число по условию) и средний балл в школе №2 увеличился на 5%. Тогда $S_2^* = \frac{k+b}{k+1} = 1{,}05$. Но по условию, средний балл – целое число. Получаем противоречие. Значит, первоначальный балл в школе №2 не может быть равен 1, если средний балл в первой и во второй школе увеличился на 5%.

в) Выше показано, что $S_2 \neq 1$. Предварительно, можно утверждать, что как минимум $S_2 > 10$ и S_2 – целое число. И при умножении S_2 на 1,05 также должно получиться целое число. Так, например, если $S_2=12$, то $S_2^* = 12{,}6$. Тогда простым перебором находим, что $S_2=20$, а $S_2^*=21$. Поэтому число 20 и есть наименьшее значение первоначального среднего балла во второй школе.

2-й вариант - используем алгебраический метод решения.

а) Да**.** Суммарный балл всех учащихся за тест равен nS_1 и является натуральным числом (по условию). Пусть после перехода одного учащегося, набравшего b баллов, в школу №2 средний балл за тест в школе №1 уменьшился в 2 раза. Тогда суммарный балл за тест стал равен $\frac{1}{2}(n-1)S_1$, и соответственно он уменьшился на $b = \frac{1}{2}(n+1)S_1$ баллов. Поэтому для $2 \le n \le 35$ возможно найти натуральное число S_1, чтобы b также было числом натуральным. Значит возможно, чтобы средний балл в школе №1 уменьшился в 2 раза.

б) Нет. Пусть перешедший в школу №2 учащийся набрал b баллов. Тогда, согласно условия, справедливы следующие равенства:

$b = nS_1 - 1{,}05*(n - 1)*S_1$ откуда $20b = (21 - n)\,S_1$ (1).

$b = 1{,}05*(38 - n)*S_2 - (37 - n)*S_2$ откуда $20b = (58 - n)\,S_2$ (2).

Из (1) и (2) справедливо равенство $(21 - n)\,S_1 = (58 - n)\,S_2$ (3).

Пусть $S_2 = 1$, тогда из (3) следует, что $S_1 = \frac{21-n}{58-n} = 1 - \frac{37}{58-n}$. Получаем противоречие, поскольку по условию S_1 целое число и $n \le 35$. Значит, первоначальный балл в школе №2 не может быть равен 1, если средний балл в первой и во второй школе увеличился на 5%.

в) Выше показано, что $S_2 \neq 1$. Из тождества (2)**,** полученного при решении предыдущего пункта, можно утверждать, что $\mathbf{58 - n > 20}$, так как $n \le 35$. Поэтому $S_2 = 20$, $b = (58 - n)$. Поэтому число 20 и есть наименьшее значение первоначального среднего балла во второй школе.

Ответ: а) да; **б)** нет; **в)** 20.