Ответы к тренировочному варианту №26

1. 3465
2. 20
3. 12,5
4. 0,95
5. -210
6. 6,25
7. 14
8. 1
9. 2
10. 5905
11. 40
12. 49
13. $\frac{3\pi}{4}+\frac{4\pi n}{3}; -\frac{7\pi}{18}+\frac{4\pi n}{3}; -\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi n}{3},\ n \in Z$
14. $\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$
15. $[5; 10]$
16. $90°$
17. 20
18. 0
19.

Решение: пункты задания а) и б) относятся к категории задач о разложении египетской дроби на сумму аликвотных дробей. (Здесь египетская дробь – это положительное рациональное число вида $\frac{a}{b}$, аликвотные дроби – это дроби, у которых все числители равны 1, а знаменатели – попарно различные натуральные числа. Методов и алгоритмов решения этих задач достаточно много. Среди популярен, например, алгоритм **Фибоначчи** (1180 – 1240).

а) Различных разложений египетской дроби $\frac{33}{100}$ на сумму аликвотных дробей, когда в знаменателе египетской дроби составное число, много. Приведем некоторые из них.

1) данный подход назовем как «выбор ближайшего делителя». Определим все делители знаменателя - числа 100: 1,2,4,5,10,20,25,50,100. Выберем из них ближайший делитель к числу 33. Это число 25, и представим число 33 как сумму чисел из состава делителей числа 100, чтобы на них мог делиться знаменатель дроби без остатка: 33 = 25 + 5 + 2 + 1. Далее представим исходное число в виде суммы аликвотных дробей:

$$\frac{33}{100}=\frac{25+5+2+1}{100}=\mathbf{\frac{1}{4}}+\mathbf{\frac{1}{20}}+\mathbf{\frac{1}{50}}+\mathbf{\frac{1}{100}}.$$

2) следующий подход. Представим исходное число как $\frac{33}{100}=\frac{25}{100}+\frac{8}{100}=\frac{1}{4}+\frac{8}{100}$. Для того,

чтобы выполнить дальнейшее разложение, умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{8}{100}$ на

такое число, чтобы числитель получившейся дроби можно было разложить на слагаемые, каждый из которых будет делителем знаменателя (так как при сокращении в числителе получится 1). После решения многих подобных задач сделан вывод, что таким **«удобным»** числом является **число 6**: $\frac{8}{100}\cdot\frac{6}{6}=\frac{48}{600}=\frac{40}{600}+\frac{8}{600}=\mathbf{\frac{1}{15}}+\mathbf{\frac{1}{75}}$.

Далее запишем вариант представления исходного числа в виде суммы аликвотных дробей:

$$\frac{33}{100}=\mathbf{\frac{1}{4}}+\mathbf{\frac{1}{15}}+\mathbf{\frac{1}{75}}=\frac{99}{300}=\frac{33}{100}.$$

3) следующий подход. Так как в знаменателе исходной дроби составное четное число 100, уменьшим его в 2 раза: $\frac{33}{100}=\frac{33}{50}\cdot\frac{1}{2}$. Заметим, что $\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{3}}+\mathbf{\frac{1}{6}}$. Далее и получим еще одно представление числа $\frac{33}{100}$ в виде

$$\frac{33}{100}=\frac{33}{50}\cdot\frac{1}{2}=\frac{33}{50}\cdot\left(\mathbf{\frac{1}{3}}+\mathbf{\frac{1}{6}}\right)=\frac{11}{50}+\frac{11}{100}=\frac{1}{50}+\frac{10}{50}+\frac{10}{100}+\frac{1}{100}=\mathbf{\frac{1}{50}}+\mathbf{\frac{1}{5}}+\mathbf{\frac{1}{10}}+\mathbf{\frac{1}{100}}.$$

В ответе приведем наиболее «короткое» представление: $\frac{33}{100}=\mathbf{\frac{1}{4}}+\mathbf{\frac{1}{15}}+\mathbf{\frac{1}{75}}$.

б) Знаменатель дроби $\frac{15}{91}$ простое число. Покажем несколько представлений числа $\frac{15}{91}$ в виде суммы аликвотных дробей.

1) умножим исходную дробь $\frac{15}{91}$ на удобное число 6: $\frac{15}{91}\cdot\frac{6}{6}=\frac{90}{546}$. Определим все делители знаменателя - составного числа 546: 1,2,3,6,7,13,14,21,26,39,42,78,91,182,273,546.

Применяя «выбор ближайшего делителя», выберем число, ближайшее к числу 90, из делителей числа 546 – это число 78. Представим числитель 90 в виде суммы чисел, чтобы на них мог делиться знаменатель дроби без остатка: 90 = 78 + 6 + 3 + 2 + 1. Откуда получим представление числа $\frac{15}{91}$ в виде суммы аликвотных дробей:

$$\frac{15}{91}=\frac{90}{546}=\frac{78}{546}+\frac{6}{546}+\frac{3}{546}+\frac{2}{546}+\frac{1}{546}=\mathbf{\frac{1}{7}}+\mathbf{\frac{1}{91}}+\mathbf{\frac{1}{182}}+\mathbf{\frac{1}{273}}+\mathbf{\frac{1}{546}}.$$

2) следующий подход. Приведем исходную дробь к четному представлению**,** умножив число $\frac{15}{91}$ на 2: $\frac{15}{91}\cdot\frac{2}{2}=\frac{30}{91}\cdot\frac{1}{2}$. Заметим, что $\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{3}}+\mathbf{\frac{1}{6}}$. Последовательно применяя «выбор ближайшего делителя» для чисел 60 и 30 из состава делителей числа 546, получим еще одно представление числа $\frac{15}{91}$ в виде суммы аликвотных дробей:

$$\frac{15}{91}=\frac{15}{91}\cdot\frac{2}{2}=\frac{30}{91}\cdot\frac{1}{2}=\frac{30}{91}\cdot\left(\mathbf{\frac{1}{3}}+\mathbf{\frac{1}{6}}\right)=\frac{60}{546}+\frac{30}{546}=\frac{39+21}{546}+\frac{14+13+3}{546}=\frac{39}{546}+\frac{21}{546}+\frac{14}{546}+\frac{13}{546}+\frac{3}{546}=$$
$$=\mathbf{\frac{1}{14}}+\mathbf{\frac{1}{26}}+\mathbf{\frac{1}{39}}+\mathbf{\frac{1}{42}}+\mathbf{\frac{1}{182}}.$$

в) Пусть $m = dp$ и $n = dq$, где d – наибольший общий делитель (НОД) чисел m и n.

Тогда $\frac{1}{dp}+\frac{1}{dq}=\frac{1}{14}\Leftrightarrow 14(p+q)=dpq$. Заметим, что числа p, q и $p+q$ попарно взаимно простые числа, поэтому числа p и q являются взаимно простыми делителями числа 14.

С учетом того, что $m\leq n$, сгруппируем все возможные варианты в виде таблицы:

p	*q*	*d*	***m***	***n***
1	1	28	**28**	**28**
1	2	21	**21**	**42**
1	7	16	**16**	**112**
1	14	15	**15**	**210**
2	7	9	**18**	**63**

Ответ: а) например, $\frac{33}{100} = \mathbf{\frac{1}{4}} + \mathbf{\frac{1}{15}} + \mathbf{\frac{1}{75}}$; **б)** например, $\frac{15}{91} = \mathbf{\frac{1}{14}} + \mathbf{\frac{1}{26}} + \mathbf{\frac{1}{39}} + \mathbf{\frac{1}{42}} + \mathbf{\frac{1}{182}}$;
в) 28 и 28; 21 и 42; 16 и 112; 15 и 210; 18 и 63.