

## Ответы к тренировочному варианту №32

### Часть 1.

1. 6
2. 500
3. 15
4. 2,1
5. 6
6. 24
7. 0,14
8. 3,5
9. 2,75
10. 240000
11. 440
12. 0,25
13.  $\{\frac{7}{3}; 9\}$
14.  $\frac{3}{\sqrt{5}}$
15.  $(-\infty; -\frac{1}{5})$
16. 16
17. 1 060 196,72
18. 9
- 19.

### 1-й вариант решения для пунктов а) и б) - используем метод «оценка + пример».

**а)** Да. Подберем простой пример для крайнего частного случая, когда в первой школе писали тест 2 учащихся. Причем, учащийся, который перешел в школу №2, написал тест на 6 баллов, а другой - на 2 балла. Тогда первоначальный средний балл в школе №1 равен  $S_1 = \frac{2+6}{2} = 4$ .

После перехода учащегося, набравшего 6 баллов, в школу №2, средний балл в школе №1 станет равным  $S_1^* = \frac{2}{1} = 2$ . Значит, средний балл в школе №1 уменьшился в 2 раза.

**б)** Нет. Пусть  $S_2 = 1$ . Это означает, что любой из учащихся школы №2 написал тест на 1 балл. Пусть перешедший учащийся набрал  $b$  баллов ( $b$  – натуральное число по условию) и средний балл в школе №2 увеличился на 5%. Тогда  $S_2^* = \frac{n+b}{n+1} = 1,05$ . Но по условию, средний балл – целое число. Получаем противоречие. Значит, первоначальный балл в школе №2 не может быть равен 1, если средний балл в первой и во второй школе увеличился на 5%.

### 2-й вариант решения - используем алгебраические оценки.

**а)** Да. Суммарный балл всех учащихся за тест равен  $n \cdot S_1$  и является натуральным числом (по условию). Пусть после перехода одного учащегося, набравшего  $b$  баллов ( $b \in N$ ), в школу №2 средний балл за тест в школе №1 уменьшился в 2 раза. Тогда суммарный балл за тест стал равен  $\frac{1}{2}(n-1) \cdot S_1$ , и соответственно он уменьшился на  $b = \frac{1}{2}(n+1) \cdot S_1$  баллов.

Поэтому для  $2 \leq n \leq 35$  возможно найти такое натуральное число  $S_1$ , чтобы  $b$  также было натуральным числом. Тогда возможно, чтобы средний балл в школе №1 уменьшился в 2 раза.

**б)** Нет. Пусть перешедший в школу №2 учащийся набрал  $b$  баллов. Тогда, согласно условия, справедливы следующие равенства:

$$b = nS_1 - 1,05 \cdot (n - 1) \cdot S_1 \quad \Leftrightarrow \quad 20b = (21 - n) \cdot S_1. \quad (1)$$

$$b = 1,05 \cdot (38 - n) \cdot S_2 - (37 - n) \cdot S_2 \quad \Leftrightarrow \quad 20b = (58 - n) \cdot S_2. \quad (2)$$

$$\text{Из (1) и (2) следует равенство: } (21 - n) \cdot S_1 = (58 - n) \cdot S_2. \quad (3)$$

Пусть  $S_2 = 1$ , тогда из (3) следует, что  $S_1 = \frac{58-n}{21-n}$  или  $S_1 = 1 + \frac{37}{21-n}$ .

Значение  $S_1$  будет целым только при  $n=20$ , тогда из (2) следует, что  $20b = 38$  и  $b=1,9$ .

Получили противоречие, поскольку  $b \in N$  по условию. Значит, первоначальный балл в школе №2 не может быть равен 1, если средний балл в первой и во второй школе увеличился на 5%.

**в)** По условию, первоначальные средние баллы в каждой школе целые числа, а после перехода ученика, средний балл в первой школе увеличился на 5% и во второй тоже увеличился на 5%.

В решении пункта б) показано, что  $S_2 \neq 1$ . Для нахождения минимально возможного значения  $S_2$  используем оценки (1) – (3). Учтем системную зависимость между уравнениями (1) и (2) для целых  $S_1, S_2$  и натуральных  $b, n$  и сведем их в систему уравнений для неизвестных  $S_1, S_2 \in Z$  и  $b, n \in N$ :

$$\begin{cases} 20b - (21 - n) \cdot S_1 = 0 \\ 20b - (58 - n) \cdot S_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

1) Пусть  $S_2 = 2$ . Тогда из второго уравнения системы (4) получим уравнение-следствие:

$10b = 58 - n$ . Единственное решение  $n = 8, b = 5$ . Подставляя это решение в первое уравнение системы, найдем, что  $S_1 = 7,69$ . А это противоречит условию для  $S_1$ . Поэтому при  $S_2 = 2$  система (4) не имеет решений.

2) Пусть  $S_2 = 3$ . Тогда из второго уравнения системы получим уравнение-следствие:

$$20b - 3n = 174. \text{ Его решение: } b = 3k, n = 58 - \frac{20b}{3} \text{ или } n = 58 - 20l, \text{ где } k, l \in N.$$

Единственное решение этого уравнения:  $n = 18, b = 6$ . Таким образом, получено решение системы:  $S_1 = 40, S_2 = 3, n = 18, b = 6$ . Значит, число 3 есть наименьшее значение первоначального среднего балла во второй школе.

**Ответ: а)** да; **б)** нет; **в)** 3.