Ответы к тренировочному варианту №37

1	100
2	23
3	6
4	7,5
5	2
6	1,125
7	45
8	4
9	9
10	20
11	117
12	2
13	а) $\pi + 2\pi n,\ n \in Z$; б) 7π
14	7,2
15	$\left(-\infty; -\frac{7}{4}\right] \cup \{0\}$
16	$120°; 30°; 30°$
17	7
18	$[-0{,}1; 0{,}1]$
19	

Ответ: а) 15; **б)** нет; **в)** 4.

Решение.

а) Заметим, что все счастливые двузначные натуральные числа четные и находятся на интервале от 20 до 48. Следовательно, всего таких чисел 15.

б) Предположим, что это возможно. Пусть $\overline{abcd}$ - десятичная запись меньшего из этих двух счастливых чисел, а $\overline{klmn}$ - десятичная запись большего из них. Из условия следует, что либо $10c + d + 16 = 10m + n$, либо $10c + d + 16 = 100 + 10m + n$. Отсюда следует, что

$$(m + n) - (c + d) = 9\,(c - m + 1) + 7 \quad \text{или} \quad (m + n) - (c + d) = 9\,(c - m - 10) + 6.$$

Значит, число $(m + n) - (c + d)$ при делении его на 9 дает остаток или 7 или 6. Также из условия следует, что либо $1000a + 100b + 2000 = 1000k + 100l$, либо $1000a + 100b + 2100 = 1000k + 100l$.

Отсюда получаем, что либо $(k + l) - (a + b) = 9(a - k + 2) + 2$, либо $(k + l) - (a + b) = 9(a - k + 2) + 3$.

Значит, число $(k + l) - (a + b)$ дает при делении на 9 или остаток 2, или остаток 3. Приходим к противоречию, так как по условию: $(k + l) - (a + b) = (m + n) - (c + d)$. Поэтому, ответ *нет*, не может разность двух счастливых четырёхзначных натуральных чисел равняться 2016.

в) Сформулируем несколько утверждений. Утверждение 1: сумма цифр счастливого шестизначного число четна, так как эта сумма равна удвоенной сумме его 3-х цифр. Утверждение 2: каждая цифра счастливого числа не больше суммы остальных цифр, так как эта цифра в сумме с двумя другими равна сумме трех оставшихся и, значит, сумма трех чисел не меньше этой цифры и тем более сумма пяти.

Если последняя цифра счастливого числа не равна 9, то сумма цифр следующего за ним числа нечетна (увеличивается на 1), и это число счастливым быть не может, а значит предыдущее число не может быть очень счастливым. Следовательно, последняя цифра очень счастливого числа равна 9.

Любое шестизначное число, у которого первая цифра не равна 1 будет больше числа, начинающегося с этой цифры и так как мы ищем наименьшее очень счастливое число, то, если мы найдем очень счастливое число, начинающееся с 1, то остальные числа уже можно будет не рассматривать. Будем искать наименьшее шестизначное очень счастливое число среди конструкций чисел вида: 1_ _ _ _ 9. По условию требуется, чтобы между цифрами 1 и 9 было как можно больше нулей.

Но 4 нуля быть не может, так как 9 больше суммы всех остальных цифр. Если нули стоят на 2, 3 и 4 местах, то предпоследняя цифра может быть равна только 8 (100089), но тогда следующее число 100090 не является счастливым.

Значит, наименьшее очень счастливое число следует искать среди чисел вида: $x = 100ab9$.

Пусть $a = 1$: $x=1001b9$. Тогда цифра b должна быть нечетной и не меньше, чем 7 (7 или 9), но числа, следующие за числами 100179 и 100199 счастливыми не являются (это числа 100180 и 100200). Значит, $a > 1$.

Пусть $a = 2$: $x=1002b9$. Тогда цифра b должна быть нечетной и не меньше, чем 6 (6 или 8), но числа, следующие за числами 100269 и 100289 счастливыми не являются (это числа 100270 и 100290). Значит, $a > 2$.

Пусть $a = 3$: $x=1003b9$. Тогда цифра b должна быть нечетной и не меньше, чем 5 (5, 7 или 9), но числа, следующие за числами 100359, 100379 и 100399 счастливыми не являются (это числа 100360, 100380 и 100400). Значит, $a > 3$.

Пусть $a = 4$: $x=1004b9$. Тогда цифра b должна быть четной и не меньше, чем 4 (4, 6 или 8). При $b=4$ $x= 100449$ – счастливое число ($4+4+1=9+0+0$) и следующее за ним 100450 также счастливое ($1+4+0=0+5+0$). Но так как при $b = 6$ или $b = 8$ числа будут больше найденного числа 100499, то наименьшими они являться не могут. Следовательно, число 100449 – наименьшее натуральное шестизначное очень счастливое число, а цифра 4 – предпоследняя цифра этого числа.