Ответы к тренировочному варианту №46

1. 156
2. 11
3. 10
4. 85
5. 7
6. 12
7. -0,5
8. 60
9. 0,6
10. 9
11. 4
12. 2
13. а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; б) $-\frac{17\pi}{4}$
14. $\frac{\sqrt{6}}{6}$
15. $[1;\sqrt[3]{\frac{5}{4}}]$
16. $\frac{\sqrt{3}}{6}$
17. $100\left(\frac{\sqrt{10}}{3}-1\right)<p<100\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}-1\right)$
18. $(0;1]\cup\{\sqrt[4]{2}\}$
19.

Решение.

а) Пусть возможно, что сумма всех $2k$ выбранных чисел равняется 170 и в каждой паре одно из чисел ровно в три раза больше другого. По условию, сумма каждой пары различна, не превосходит 27 и может быть представлена в виде выражения: $b + 3b = 4b \leq 27$, где b – натуральное число $1 < b < 18$. Тогда сумма всех $2k$ выбранных чисел должна быть кратна 4, но число 170 не кратно 4. Получено противоречие. Поэтому нет, это невозможно. Приведем пример разбиения чисел на пары, дающего наибольшую сумму $2k$ выбранных чисел: (3+9) + (4+12) + (5+15) + (6+18) = 74.

б) Пусть возможно, что все первые 22 натуральных числа разбиты ровно на 11 пар различных чисел, число k равно 11 и все полученные суммы различны и не превосходят 27. Сумма первых 22 натуральных чисел равна: $S_{22} = \frac{1+22}{2}\cdot 22 = 23\cdot 11 = 253$. Тогда S_{22} должна быть равна сумме всех 11 пар выбранных чисел S*. Должно выполняться равенство $\mathbf{S_{22} - S^* = 0} \Rightarrow$

253 – (27 + 26 + 25 + 24 + 23 + 22 + 21 + 20 + 19 + 18 + 17) = 253 - 22·11=253–242=11≠0.

Требуемое равенство не выполняется, поэтому нет, число k не может быть равным 11.

в) Заметим, чтобы равенство $\mathbf{S_{22} - S^* = 0}$ было верным, увеличим наименьшую сумму пары чисел 17 на 11: 17+11=28. Тогда 253 – (27 + 26 + 25 + 24 + 23 + 22 + 21 + 20 + 19 + 18 + 28) = 253 - 23·11=0. Равенство выполняется, и только одна сумма, равная 28 не удовлетворяет условию (она > 27). Поэтому, наибольшее возможное значение числа k равно 10, $k = 10$. Для подтверждения полученной оценки приведем пример разбиения первых 22 натуральных чисел на 10 пар различных чисел с различными суммами:

1+18=19, 2+19=21, 3+20=23, 4+21=25, 5+22=27, 6+16=22, 7+17=24, 8+10=18, 9+11=20. Осталась единственная пара чисел 13 и 15, сумма этих чисел не удовлетворяет условию: 13+15=28 > 27.

Ответ: **а)** нет; **б)** нет; **в)** 10